Title	コミュニティ抽出を利用したボロノイゲームの着手決定
Sub Title	
Author	松本, 直己(Matsumoto, Naoki)
Publisher	慶應義塾大学デジタルメディア· コンテンツ統合研究センター
Publication year	2021
Jtitle	慶應義塾大学DMC紀要 (DMC review Keio University). Vol.8, No.1 (2021. 3) ,p.17- 23
JaLC DOI	
Abstract	グラフにおけるコミュニティ抽出とは，グラフからいくつかのコミュニティ−部分グラフ内の頂点間の辺密度が相対的に部分グラフ外への辺密度よりも高くなるような部分グラフ−を抽出する手法のことをいう．本稿では，ボロノイゲームと呼ばれる組合せゲームにおけるコミュニティ抽出を利用した着手決定方法を提案する．
Notes	研究ノート
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO32002001-00000008-0017

コミュニティ抽出を利用したボロノイゲームの着手決定

松本 直己*

概 要

グラフにおけるコミュニティ抽出とは，グラフからいくつかのコミュニティ—部分グラフ内の頂点間の辺密度が相対的に部分グラフ外への辺密度よりも高くなるような部分グラフ—を抽出する手法のことをいう．本稿では，ボロノイゲームと呼ばれる組合せゲームにおけるコミュニティ抽出を利用した着手決定方法を提案する．

1 はじめに

グラフとは，いくつかの**頂点**と頂点間をつなぐ**辺**からなる構造を指す．例えば，駅を頂点，駅同士を繋ぐ線路を辺として考えれば，電車の路線図はまさにグラフそのものである．この他にも，我々の身の周りには，多くのグラフ構造のデータが存在する．特に，人間同士の交友関係をグラフ化したものは**ソーシャルグラフ**とも呼ばれ，Facebook 社は 20 億を超えるアクティブユーザからなるソーシャルグラフを保有している [1]．いまや多くの人や企業がこのようなグラフ構造のデータを解析し，有益な情報を抽出して，ビジネスや実生活に役立てている．例えば，大規模なソーシャルグラフから，つながりの強い人の集団—**コミュニティ**—が抽出できれば，一人一人に商品の宣伝を行うよりも効率的に宣伝することが可能となる．そのようなコミュニティを見つけるための手法のことを一般に**コミュニティ抽出**[1]と呼ぶ．

組合せゲームとは，以下の 3 つを満たすゲーム[2]のことを指す：

(1) 二人のプレイヤーが交互に手を打つ．

(2) サイコロを振るなどの偶然要素を含まない (確定性)．

(3) ゲームの進行やお互いの手の内が隠されていない (完全情報性)．

例えば，囲碁や将棋は組合せゲームであり，すごろくやポーカーは上の性質 (2) や (3) を満たさないため，組合せゲームではない．さらに上記の 3 つの性質に加え，

(4) 最初に打つ手が無くなったプレイヤーの負け[3]．

---

*慶應義塾大学デジタルメディア・コンテンツ統合研究センター，E-mail: naokimatsumoto@dmc.keio.ac.jp

[1]クラスタリングとも呼ばれる．

[2]ここでいうゲーム（ゲーム的状況）とは，複数主体が関わる意思決定（行動）の相互依存的状況のことを指す．

[3]このようなゲームを正規形，逆に，最後に手を打ったプレイヤーを負けとするゲームは逆形という．

が成り立つゲームを **Conway ゲーム**と呼ぶ．また，プレイヤーによって可能な着手に違いのないゲームを**不偏ゲーム**と呼び，それが一般には異なるものを**非不偏ゲーム**と呼ぶ．以上の各分類に該当するゲーム例を図 1 に表す[4]．

	不偏 (impartial)	非不偏 (partisan)
Conway	ニム (Nim)	ドミナリング
非 Conway	ボロノイゲーム	囲碁，チェス

図 1: 組合せゲームの分類

組合せゲーム理論は，組合せゲームの数学的構造を研究する研究分野であり，また特に，局面全体を独立した部分局面に分解できるようなゲームに対して，プレイヤーの戦略を考える上での良い枠組みとなっている[5]．例えば，そのような部分性の強いゲームの一つである囲碁の研究に組合せゲーム理論おける解析手法が応用されている [2, pp.195–205]．また，Conway ゲームについては大変良い数学的な解析手法が知られており[6]，特にニムにおいてはその必勝法を簡単な計算で導けることが知られている [6, pp.40–42]．

一方，囲碁や将棋といった組合せゲームには，膨大な数の合法局面が存在し，ゲームの勝利者を求める問題は非常に難しい問題とされている[7]．したがって，コンピュータを用いたゲームの局面解析が長年研究されてきた．例えば囲碁においては，2015 年に登場したコンピュータ囲碁プログラム AlphaGo をはじめとする囲碁 AI の様々な手法が従来の定石や布石に大きな影響を与え，ゲームそのものの発展にも大きく寄与している[8]．このような研究の流れの中で，論文 [7] において，コミュニティ抽出を利用した囲碁の局面解析手法が提案されている．ものすごく大雑把に述べると，その手法は「局面のグラフ化」と「コミュニティ抽出によるコミュニティ（繋がりの強い石の集まり）集合の取得」の２つの処理を行った後，得られたコミュニティ同士を繋ぐ辺—**弱い紐帯**—を次の着手候補とするという手法であった[9]．しかしながら，この論文以降，コミュニティ抽出を組合せゲームに応用する研究は全くと言って良いほど行われてこなかった．

そこで本稿では，囲碁などよりも少し解析がし易いと考えられる不偏な非 Conway ゲームの一つであるボロノイゲームについて，コミュニティ抽出を利用した着手決定アルゴリズムを提案する．

[4] 囲碁やチェスは，最後に手を打ったプレイヤーが勝ちとならない場合がある．

[5] 現在，組合せゲーム理論は数学の一分野として確立されている．

[6] 不偏な Conway ゲームは Sprague と Grundy[3, 4] によって，また非不偏な Conway ゲームについても良い解析手法が Conway によって与えられている [5]．

[7] 計算量理論の専門用語で言えば，PSPACE 困難と呼ばれる複雑性クラスに属することが知られている．

[8] AlphaGo は囲碁のプロ棋士に初めてハンデなしで勝利したコンピュータプログラムでもある．

[9] そのような辺に対応する場所—碁盤の線の交差部分—への着手は，二つの繋がりの強い石の集まりを繋ぐための重要な着手となる．

2 定義・研究動機

ボロノイゲームとは，競争的施設配置問題の一般化として考案されたゲームである [8]．このゲームを Teramoto, Demaine & Uehara [9] がグラフ上へと拡張し，その後様々なグラフ上で研究が進められている [10]．以降では，特に断らない限り，グラフはすべて有限無向単純グラフ[10]とする．

定義 1 (ボロノイゲーム[11])**.** G をグラフとする．二人のプレイヤーがグラフの未彩色の頂点を $m \geq 1$ 個ずつ先手から順に自身の色（先手：白，後手：黒）で彩色する．その後，各頂点を「最も近い彩色済み頂点が持つ色」が白ならば集合 W，黒ならば集合 B に振り分ける（このとき，その頂点は該当プレイヤーに**支配されている**という）．もし，該当する色が一意に定まらない場合は，その頂点は W にも B にも属さないものとする．そして，ゲームの勝敗は以下のように決定される[12]．

- $|W| > |B| \Rightarrow$ 先手の勝ち．
- $|B| > |W| \Rightarrow$ 後手の勝ち．
- $|W| = |B| \Rightarrow$ 引き分け．

すなわち，ボロノイゲームは各プレイヤーが「なるべく多くの頂点を支配できるように」頂点を彩色していくゲームである[13]．図 2 にボロノイゲームの例を示す．

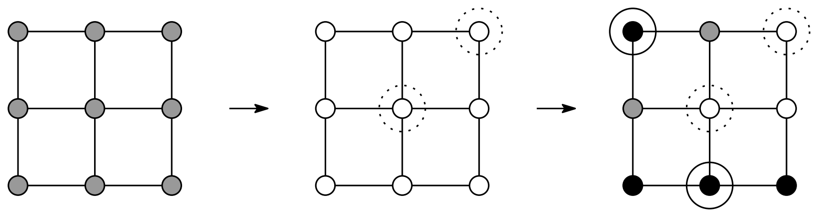

図 2: ボロノイゲームの例（$m = 2$）．白頂点が W，黒頂点が B，灰色の頂点は W, B どちらにも属していない頂点を示す．点線の丸印が先手，実線の丸印が後手が選んだ頂点を示す．この場合，$|W| = 3 < |B| = 4$ より，後手の勝ち．

以降では，議論をより単純にするために，$m = 1$ の場合のみ考える．$m = 1$ の場合，いくつかのグラフクラスでは，ゲームの勝敗が簡単にわかる．ここでは，道グラフ（図 3 に示されるようなグラフ）の場合のみ紹介する．

定理 2 ([11])**.** n 頂点の道グラフ P_n におけるボロノイゲームは，n が奇数の場合は先手が勝利でき，偶数の場合は引き分けとなる．

[10] 頂点数が有限で，辺に向きが付いておらず，かつ多重辺やループを含まないグラフ．また，本稿で扱うグラフはすべて重みが付いていないものとする．

[11] 正確には，この定義は 1 **ラウンド**ボロノイゲームの定義にあたる．「先手が m 個塗り，後手が m 個塗る」を k 回繰り返せば，k **ラウンド**ボロノイゲームの定義を得る．

[12] ここで，集合 S に対して，$|S|$ で S に含まれる要素の個数を表す．

[13] この彩色された頂点が，競争的施設配置問題における施設が配置された場所に対応する．

証明．グラフが道グラフの場合，なるべく中心に近い頂点を彩色するのが最適手となる．n が奇数の場合，中心の頂点を先手が彩色することで，後手の次の手に関わらず，$|W| \geq (n+1)/2$ となり，先手が勝てる（図3上）．n が偶数の場合は，中心にあたる頂点が2頂点存在するため，後手がどちらか一方（先手が彩色しなかった方）を塗ることで，$|W| = |B| = n/2$ を実現出来るため，引き分けとなる（図3下）． □

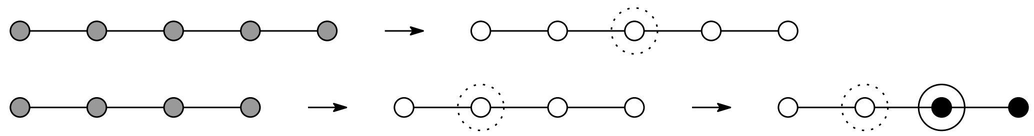

図 3: 道グラフ上のボロノイゲームの例（$m = 1$）

このように，グラフが単純な構造を持てば，プレイヤーの最適手が簡単にわかる．しかしながら，一般にはどちらのプレイヤーが勝利するかを判定する問題は NP 完全問題であることが知られており [9]，最適手を簡単に（多項式時間で）求めることはできないと考えられている[14]．一方で，道グラフもそうであるように，切断辺[15]があるようなグラフでは，その両端点のいずれかを先手が彩色することで，切断辺を取り除いて得られるグラフの少なくとも「少ない方の連結成分の頂点」は全て支配することができる．また，そのような切断辺を取り除いて得られる連結成分の連結度が高い場合[16]，その連結成分はコミュニティを成していると考えられる．そこで，与えられたグラフでコミュニティ抽出を行い，予めグラフのコミュニティ構造を明らかにすることで，最適に近い着手決定が行えるのではないかと考えた．

3 コミュニティ抽出を利用した着手決定

ここで，本稿の目的である，コミュニティ抽出を利用したボロノイゲームにおける（先手の）着手決定アルゴリズム（以降，アルゴリズム $\mathcal{A}$ と呼ぶ）を提案する．その手順を以下に簡単に記述する．

1. グラフ G に対し，コミュニティ抽出を適用．
2. 手順1で得られたコミュニティの集合 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ において，最もサイズの大きいコミュニティを $C_{\max} \in \mathcal{C}$ とする．
3. $C_{\max}$ に隣接しているコミュニティの中で，最もサイズの大きいコミュニティを $D \in \mathcal{C}$ とする．
4. $C_{\max}$ と D を繋ぐ弱い紐帯の端点で，$C_{\max}$ に含まれており，かつその中で最もの大きい頂点を先手の着手として出力．

[14] P≠NP 予想が正しければ．
[15] 取り除くとグラフが二つの連結成分に分離されるような辺のこと．
[16] すなわち，グラフが切断辺などを持たず "切れにくい" グラフであるということ．

手順1で適用するコミュニティ抽出のアルゴリズムを変更することで，得られるコミュニティの集合が異なるため，最終的に出力される頂点も一般には異なることが予想される．適用するコミュニティ抽出の一例として，コンダクタンスによるコミュニティ抽出がある [12, 13]．**コンダクタンス**は，内部接続が多く外部接続が少ない頂点集合を評価する指標で，正確には以下のように定義される．

定義 3 (コンダクタンス)．G をグラフとし，V をその頂点集合とする．S を G の頂点部分集合とする[17]．$cut(S)$ を S と $V-S$（S 以外）の間に張られている辺の本数，$vol(S)$ は S に含まれる頂点の次数[18]の合計とする．このとき，S のコンダクタンス $\phi(S)$ は

$$\phi(S) = \frac{cut(S)}{\min\{vol(S), vol(V-S)\}}$$

と定義される．V を k 個の頂点部分集合 $S_1, S_2, \ldots, S_k$ に分割したとき，G のコンダクタンス $\phi(G)$ は各 S_i のコンダクタンスの平均値を1から引いた値として定義される[19]．すなわち，

$$\phi(G) = 1 - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \phi(S_i).$$

図4の左のグラフに対してコンダクタンスによるコミュニティ抽出を利用したアルゴリズム $\mathcal{A}$ を実行すると，頂点 x が先手の着手となる．このとき，先手は少なくとも4頂点，後手は高々4頂点しか支配できないため，先手はゲームに負けることはない．

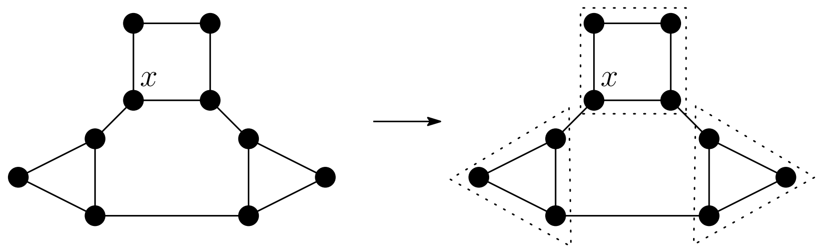

図 4: コンダクタンスによるコミュニティ抽出を利用した先手の着手決定の例．点線で囲まれたそれぞれの頂点部分集合が抽出されたコミュニティを示す．

最後に，アルゴリズム $\mathcal{A}$ で出力される頂点が，先手にとって常に「引き分け以上」の手になっているようなグラフクラスを紹介する．そのようなグラフで最も簡単な例としては，前節で紹介した道グラフがある．道グラフは，両端点が次数1，その他は次数2であるため,（ほぼ）中心にあたる切断辺で左右二つのコミュニティに分割するのが最もコンダクタンスが小さくなる分け方となる．

ここで，道グラフを少し拡張したキャタピラと呼ばれるグラフを考える．**キャタピラ**とは,「次数1の頂点を全て取り除くと，道グラフとなる」ような木グラフ[20]のことである

[17] S は少なくとも1頂点は含み，かつ，$S \neq V$ とする．
[18] 頂点に接続する辺の本数．
[19] 1から引くことによって，$\phi(G)$ は1に近ければ近いほど良いコミュニティ分割であることを示す．
[20] 閉路を持たないグラフ．

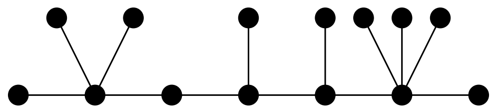

図 5: キャタピラの例

（図5）．定義から，道グラフもキャタピラの一つである．このキャタピラに対し，コンダクタンスによるコミュニティ抽出を利用したアルゴリズム $\mathcal{A}$ を適用すると,「着手すれば必ず引き分け以上」となる頂点が出力されることが確認できる.

定理 4. キャタピラ上のボロノイゲームにおいて，アルゴリズム $\mathcal{A}$ によって出力される頂点を先手が打つことによって，先手はゲームに負けない.

証明の概略. L をキャタピラ，L から次数 1 の頂点を全て取り除いて得られる道グラフを P とする．定義 3 より，コンダクタンス最小となる L の頂点集合 V の分割 $(S, V-S)$ は，$vol(S)$ と $vol(V-S)$ がなるべく均等に，かつ，P 上のある辺が S と $V-S$ を結ぶ（唯一の）弱い紐帯となるような分割になる（図 6）．対称性から $vol(S) \geq vol(V-S)$ とすると，キャタピラの性質から，$|S| \geq |V-S|$ が成り立つ．アルゴリズム $\mathcal{A}$ によって出力された着手を $x \in S$ とすると，P 上で x と隣接する頂点を後手が彩色したとしても，S の選び方から，先手が支配している頂点数は後手のそれ以上となる. □

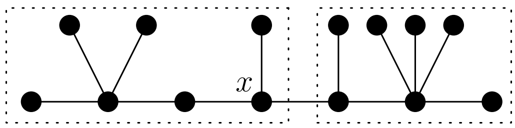

図 6: 図 5 のキャタピラに対してコンダクタンスによるコミュニティ分割を行った図.
x はアルゴリズム $\mathcal{A}$ によって出力される頂点.

4　おわりに

本稿では，ボロノイゲームにおけるコミュニティ抽出を利用した着手決定アルゴリズムを提案し，その手順を簡単に紹介した．このアルゴリズムの精度の数学的評価はまだ行えておらず，また十分な実験的評価も得られていないため，このアルゴリズム自体もまだ改善の余地があると考えてられる．加えて，コンダクタンス以外の指標（例えば，Newman & Girvan [14] によるモジュラリティなど）を用いた実験による評価も今後の課題として残されている.

本稿は数学的な内容に明るくない読者も想定し，数学的な定義や細かい説明をなるべく避けて記述した．各内容の詳細を知りたい読者は，本稿で参照している各文献を読まれるとよい．また，ゲーム理論を利用したコミュニティ抽出の研究も盛んに行われており，数年前にゲーム理論的コミュニティ抽出手法についてのサーベイが出版されている [15]．興味のある読者はこちらも是非参照されたい.

参考文献

[1] Facebook Reports Third Quarter 2020 Results.
`https://s21.q4cdn.com/399680738/files/doc_news/Facebook-Reports-Third-Quarter-2020-Results-2020.pdf`

[2] R.J. Nowakowski, Games of No Chance 4, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **63**, Cambridge Univ. Press, (2015).

[3] P.M. Grundy, Mathematics and games, *Eureka* **2** (1939), 6–8.

[4] R.P. Sprague, Über mathematische Kampfspiele, *Tohoku Math. J.* **41** (1935), 438–444.

[5] J.H. Conway, On Numbers and Games, *A K Peters/CRC Press* (2000).

[6] E.R. Berlekamp, J.H. Conway and R.K. Guy, Winning Ways for Your Mathematical Plays, *A K Peters/CRC Press* 4 vols. (1982 – 2004).

[7] Y. Malitsky, C. Fellows and G. Wojtaszcz, Detecting the community structures in the game of Go, *IADIS European Conference Data Mining* (2007), 135–139.

[8] H.K. Ahn, S.W. Cheng, O. Cheong and M.J. Golin and R. van Oostrum, Competitive facility location: the Voronoi game, *Theoret. Comput. Sci.* **310** (2004), 457–467.

[9] S. Teramoto, E.D. Demaine and R. Uehara, The Voronoi game on graphs and its complexity, *J. Graph Algorithms Appl.* **15** (2011), 485–501.

[10] S. Bandyapadhyay, A. Banik, S. Das and H. Sarkar, Voronoi game on graphs, *Theoret. Comput. Sci.* **562** (2015), 270–282.

[11] M. Kiyomi, T. Saitoh and R. Uehara, Voronoi game on a path, *IEICE Trans.* **94-D** (2011), 1185–1189.

[12] R. Andersen, F.C. Graham and K.J. Lang, Using Pagerank to locally partition a graph, *Internet Math.* **4** (2007), 35–64.

[13] S. Emmons, S. Kobourov, M. Gallant and K. Börner, Analysis of network clustering algorithms and cluster quality metrics at scale, *PloS one* **11** (2016), #e0159161.

[14] M.E.J. Newman and M. Girvan, Finding and evaluating community structure in networks, *Phys. Rev. E* **69** (2004), #026113.

[15] A. Jonnalagadda and L. Kuppusamy, A survey on game theoretic models for community detection in social networks, *Soc. Netw. Anal. Min.* **6** (2016), #83.