

# 論文審査の要旨及び担当者

No. 1

報告番号	甲 第 号	氏 名	大屋 栄
論文審査担当者	主 査	：星野 崇宏 (慶應義塾大学経済学部教授 博士(経済学))	
	副 査	：長倉 大輔 (慶應義塾大学経済学部教授 Ph.D.)	
		：中妻 照雄 (慶應義塾大学経済学部教授 Ph.D.)	
	面接担当	：沖本 竜義 (慶應義塾大学経済学部教授 Ph.D.)	
		：片山 翔太 (慶應義塾大学経済学部准教授 博士(理学))	
(論文審査の要旨)			
論文題名： Essays on Asset Return Modeling with Bayesian Markov Chain Monte Carlo			
<h2>1. 論文の概要</h2>			
<p>最適な資産運用のための枠組みとしての現代ポートフォリオ理論は、Markowitz (1952) によって提案された平均分散アプローチに端を発する。リスクとリターンのトレードオフを想定し、そのバランスの中から最適なポートフォリオを構成するという本アプローチは、様々な派生型を生み出しつつ、今日においてもファイナンスの実務で重要な役割を果たしている。このポートフォリオ最適化の手法を用いて資産運用を行うためには、ポートフォリオを構成する資産の収益率のモデル化が不可欠である。</p>			
<p>本論文の主たる目的は、この資産収益率のモデル化をマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法によるベイズ的アプローチで行うための新しい手法を提案することである。本論文は 5 つの章からなるが、第 1 章は論文の導入と要約、第 5 章は全体のまとめと今後の展望について述べているだけなので、第 2 章から第 4 章の内容について簡単に紹介する。</p>			
<p>第 2 章では、高次元の精度行列のベイズ推定法として広く応用されている Wang (2012) のアルゴリズムの問題点を指摘するとともに、それを克服した改良アルゴリズムを提案している。ここでの精度行列とは分散共分散行列の逆行列を指す。平均分散アプローチによるポートフォリオ最適化問題の解析解は精度行列の関数として表現されるため、これを安定的に推定することは極めて重要である。しかしながら、ポートフォリオを構成する資産の数(<math>p</math>)が推定に使用する観測時点の数(<math>n</math>)を上回った場合、通常は標本分散共分散行列は逆行列を持たない。さらに <math>p &lt; n</math> であっても、<math>p</math> が <math>n</math> に近い状況では精度行列の推定が不安定になることも知られている。これは当該分野で「<math>p &gt; n</math> 問題」と呼ばれ、ポートフォリオ最適化問題に限らず、Gaussian Graphical Model という変数間のグラフ構造を多変量正規分布の精度行列で表現するアプローチで生じることが知られている。</p>			

この解決策として LASSO に代表されるスパース推定法が提案されてきたが、ベイズ推定の文脈において、Wang (2012) は LASSO による精度行列のスパース推定をギブズ・サンプリングによる MCMC 法で行うアルゴリズムを提案した。しかし、Wang (2012) の方法では精度行列の正定値性を保証できないことを第 2 章は指摘し、この問題点を克服する改良アルゴリズムを提案した。そして、改良アルゴリズムがグラフ構造の推論に関して Wang (2012) の方法を上回る性能を持つことを数値実験によって示した。

第 3 章では、第 2 章で提案した改良アルゴリズムを現実の株式収益率のデータに適用し、Torri et al. (2019) の実験デザインに従ってバックテストによって他の精度行列の推定法と長期の運用結果を比較している。運用対象の資産には Kenneth French によりウェブサイト上で提供されている時価総額と時価簿価比率に基づいて集計した 100 個の米国株ポートフォリオを使用し、比較対象として非ベイズの LASSO やランダム行列理論に基づく推定法、分散共分散行列の Ledoit-Wolf 縮小推定などの方法を採用した。株式収益率にはマーケット・ファクターなどの共通因子が影響することを考慮し、これら 100 資産に対して Fama-French 3-Factor Model を仮定して誤差項の精度行列が疎行列になるようにしている。比較のための指標としてはシャープ比、エクスポージャー指標、ターンオーバー率などを使用した。バックテストの結果として得られた指標の比較より、 $p > n$  の場合における改良アルゴリズムの優位性が示された。

第 4 章では、資産収益率の分布として使われる skew-elliptical distribution のベイズ推定における識別問題を指摘し、それを克服したギブズ・サンプリングによる推定法を提案している。Markowitz (1952) による平均分散アプローチと整合的である資産収益率の分布は正規分布を含む楕円型分布(elliptical distribution)に限られることが知られている。この楕円型分布には分布の裾が厚い  $t$  分布なども含まれるが、分布の形状はモードを中心として対称であると仮定されている。しかし、現実の資産収益率の分布には歪みが存在しうるということが以前から指摘されており、楕円型分布を歪みが許容される分布に拡張する方法が提案されてきた。その 1 つに Sahu et al. (2003) による skew-elliptical distribution がある。

この分布のギブズ・サンプリングによるベイズ推定法は既に Harvey et al. (2010) が提案しているが、第 4 章では同推定法が識別問題を抱えていることを指摘している。具体的には同推定法では分布の歪みを決定する歪度行列の列の順序を入れ替えても尤度の値が変化しないため、ギブズ・サンプリングにおいて label switching と呼ばれる現象が起きてしまう。この問題に対処するため、第 4 章では歪度行列に識別制約を課した改良アルゴリズムを提案している。

さらに第4章では、識別制約の下で skew-elliptical distribution の歪度行列と精度行列に対して馬蹄事前分布 (horseshoe prior) によるスパース推定を行う方法も合わせて提案している。特に精度行列のスパース推定については、第2章で提案された精度行列の正定値性を保証した改良アルゴリズムを馬蹄事前分布の場合に拡張したものを使用している。そして、数値実験を行うことで、Harvey et al. (2010)による従来手法と異なり、提案手法において歪度行列の識別が機能していることを示した。

## 2. 論文の評価

次に本論文の主たる研究成果である第2章～第4章に対する評価を簡潔に述べる。

第2章で指摘されている Wang (2012)のアルゴリズムの問題点は、当該論文が公刊されてから10年が経過した現在でも広く認知されているとはいえない。例えば、Li et al. (2019)では Wang (2012)のアルゴリズムに完全に依拠した形で馬蹄事前分布による精度行列のベイズ推定を行なっている。したがって、Wang (2012)の問題点を指摘するとともに精度行列の正定値性が保証されるアルゴリズムを提案した本論文の当該分野への貢献は大きいといえる。さらに、LASSOによる高次元精度行列のスパース推定は Gaussian Graphical Model 全般で必要とされるため、改良アルゴリズムの応用事例はファイナンスにとどまらず幅広い研究領域に及ぶはずである。なお第2章の元となった論文は、統計学・データサイエンスに関する査読付き学術誌である *Japanese Journal of Statistics and Data Science* において“A positive-definiteness-assured block Gibbs sampler for Bayesian graphical models with shrinkage priors”として2022年4月に公刊されており、今後の改良アルゴリズムの普及が期待される場所である。

第3章は、第2章で提案された改良アルゴリズムのポートフォリオ最適化と長期資産運用への応用である。内容は Torri et al. (2019)のバックテストをなぞる形になっているが、Torri et al. (2019)では実施していない「 $p > n$  問題」が起きる状況での比較を行なっている点に新規性が認められる。さらに Torri et al. (2019)と異なり、株式収益率にファクターモデルを仮定することで実務での応用に即したモデル化につながるとともに、ファクターモデルの誤差項の精度行列が原理的に疎行列となることから精度行列のスパース推定を実行する統計学的意義も生じるという改善を図っている点も評価できる。この第3章の元となった論文も、ファイナンス分野の査読付き学術誌である *Asia-Pacific Financial Markets* において“A Bayesian graphical approach for large-scale portfolio management with fewer historical data”として2022年3月に公刊されている。

第4章の新規性の1つは、資産収益率の分布を skew-elliptical distribution という歪みを許容する分布に拡張する際に生じる歪度行列の識別問題を解決している点である。そもそも歪度行列の識別問題を指摘している先行研究が皆無である上、識別制約を課してギブズ・サンプリングを行うところまで到達できている研究は本論文が最初であろう。これに加えて歪度行列と精度行列のスパース推定に成功していることは高い評価に値する成果である。第4章の元となった論文は未だにワーキング・ペーパーであり、査読付き学術誌に採択されるころまでは来ていない。しかし、査読者の意見を取り入れて改訂を繰り返すことで、将来公刊されることが期待される内容である。

しかし、口頭試問では審査委員より本論文に対して幾つかの疑問や課題が指摘された。まず第2章で提案したアルゴリズムを高次元の精度行列に適用する際にかかる計算時間に関する疑問が審査委員から出された。大屋君の回答は「高次元になるとギブズ・サンプリングで生成すべき精度行列の要素数が増えるため、どうしても計算時間が延びてしまう。今は Python でプログラムを動かしているが、もっと高速なプログラミング言語で実行することで計算時間の短縮化が図られるだろう。」というものであった。さらに別の審査委員からは多変量 GARCH モデルへの拡張は可能かという質問が出されたが、現在の枠組みでは難しいという回答であった。また、第3章でのバックテストに関して、Fama-French 3-Factor Model のファクターで説明されるリスクと説明されないリスクを合わせてポートフォリオ最適化を行なっているが、ファクターで説明されるリスクだけに基づくポートフォリオ最適化も比較対象にしたらどうかという質問が審査委員から出された。大屋君からは「今回の実証研究では試していないが、検討に値する課題である。」との回答が得られた。別の審査委員からは第2章や第3章では資産収益率が正規分布に従うと仮定しているが、裾の厚い t 分布を試してみてもどうかという質問が出された。大屋君の回答は「t 分布への拡張は試していないが、原理的には可能である。しかし、計算時間はかかるだろう。」というものであった。

審査委員から出された疑問や課題は本論文の拡張の方向性を示唆する性格のものであり、本論文の学術的な価値や貢献を損なうものではない。これらに加えて、LASSO における罰則パラメータの設定法、ファクターモデルの誤差項の精度行列のスパース推定と長期資産運用の関係、skew-elliptical distribution でのスパース推定の意義などに関する質問が審査委員から出されたが、大屋君は的確に回答してくれた。

以上の所見から、本論文の内容はベイズ的アプローチによる資産運用のための新しい手法の提案という点において極めて新規性のある研究成果であり、審査委員会は全員一致で本論文が博士（経済学）の学位を授与するにふさわしい内容のものであると判断した。