

報告番号	甲 乙 第	号	氏 名	田中 大海
主 論 文 題 名 : Nonelementary Computational Complexity of Substructural Logic (部分構造論理の非初等的計算量)				
(内容の要旨) 部分構造論理 (substructural logic) は, 超直観主義論理や多値論理などの既知の様々な論理体系をその射程に収める非常に広範な概念である. その本懐は, 一言で言えば, 多くの論理に共通して現れる諸性質の普遍的・統一的な把握にある. そうした種々の性質の中でも, 論理体系に付随する決定問題の性質の解明は伝統的にポピュラーな研究課題である. 特に, 論理の証明可能性問題 (provability problem) の決定 (不) 可能性 (すなわち, 与えられた項の証明可能性を有限時間内に判定するアルゴリズムが存在するかどうか) を明らかにすることは主要なテーマである. 加えて, 証明可能性問題を解くのにどれだけの計算資源 (例えば計算のステップ数や記憶領域の量) を要するのかを明らかにすることもしばしば論理学者の関心事となる. 実際, 論理の計算量は主に次の二つの意義を有する: (1) 当該の論理が単に決定可能であるか否かという粗雑な二分法に囚われず, その論理の量的側面のより精細な描像を与えるという理論的な意義. (2) 当該の論理がどの程度実用に耐えるかを端的に示すというプラクティカルな意義. 決定問題はそれを解くのに要する計算資源の多寡に応じて手に負える問題 (tractable problem) と手に負えない問題 (intractable problem) に大別される. しかし, 手に負えない問題の「手に負えなさ」は問題により著しく異なる. 手に負えない問題の中でも, 初等再帰時間では解けない問題, すなわち, その計算時間が初等再帰関数 (elementary recursive function) で抑えられないような問題が存在する. 本論文ではこの種の問題を極度に困難な問題 (extremely intractable problem) と呼ぶ. 極度に困難な問題を分類するための既存の尺度としては, Löb and Wainer (1970) による拡張 Grzegorzcyk 階層 (extended Grzegorzcyk hierarchy) の判定問題バージョンが知られている. しかし, 拡張 Grzegorzcyk 階層 (の判定問題バージョン) は計算量理論上の重要概念である決定問題の完全性を全く捕捉できないという弱点を抱えている. Sylvain Schmitz (2016) は拡張 Grzegorzcyk 階層のこうした欠点を指摘した上で, それを解消しつつも極度に困難な問題の適切な分類を可能にする画期的な分類法を提案した. Schmitz (2016) により提出されたこの新しい				

パラダイムは急増加計算量階層 (fast-growing complexity hierarchy) と呼ばれる。

2010 年代における非初等計算量理論上のこうしたブレークスルーの一方で、部分構造論理の文脈では、Chvalovský and Horčík (2016) が部分構造論理 FL_c の証明可能性問題の決定不能性を証明した。これにより、基本部分構造論理 (basic substructural logics) と称される 14 の最も基礎的な部分構造論理の証明可能性の計算量の全貌が明らかとなった。とはいえ、論理に対して考慮される決定問題は何も証明可能性問題に限らない。容易に考えられるもう一つの決定問題は、演繹可能性問題 (deducibility problem) と呼ばれる証明可能性問題の自然な一般化である。証明可能性問題が与えられた項の当該の論理における証明可能性を単に問うのに対して、演繹可能性問題は項の有限集合 S と単一の項 A の組を入力とし、 S に属する項を非論理的公理として認めたときに当該の論理で A が証明可能かどうかを問う。演繹可能性が証明可能性の一般化たる所以は有限集合 S を空集合として固定した特殊なケースが証明可能性問題に相当するためである。注意すべきは、古典論理や直観主義論理のようなよく知られた一部の部分構造論理においてはこれら二種類の問題を峻別する意味が本質的にはないということである。その理由は単に、古典論理や直観主義論理では演繹定理によって演繹可能性が証明可能性に効率的に（すなわち多項式時間で）還元可能であるからに他ならない。他方で、多くの部分構造論理では演繹定理が成り立たないがために、演繹可能性問題が非自明な計算課題として浮上する。これが部分構造論理において演繹可能性問題が証明可能性問題から独立した固有の関心を集める理由である。

部分構造論理の証明可能性の計算量解析の充実した発展に比して、部分構造論理の演繹可能性は計算量に関して未だ多くの謎とともに進展の余地を残している。本論文の主題は、様々な部分構造論理の演繹可能性問題の極度困難性を急増加計算量階層の観点から明らかにすることである。以下、本研究の主要な成果とともに論文の構成を述べる。

第 1 章では、本論文の背景、動機、および貢献をさらに詳しく述べる。第 2 章では、第 3 章と第 4 章の主結果の証明に必要な既知の諸概念（各種部分構造論理のシークエント計算、状態付きベクトル加算システム、急増加計算量階層、各種決定問題など）を簡単に説明する。

第 3 章と第 4 章では本論文の主結果を証明する。第 3 章では、部分構造論理 FL_{ew} （およびその関連体系）の演繹可能性の厳密な計算量を特定する。（第 3 章の内容は国際会議予稿集採録済み論文の内容に基づく。）大雑把に言って、 FL_{ew} とは直観主義命題論理から縮約規則を除いて得られる論理体系に相当する。 FL_{ew} をはじめとした縮約規則を持たない論理たちは、数ある部分構造論理の中でも特別な地位を占めている。実際、これらの論理は無制限の包括公理と無矛盾性を両立する素朴集合論の基盤を成すという理由

で特に非古典論理上の素朴集合論の文脈において耳目を集めてきた。

証明可能性問題に限って言えば, FL_{ew} の正確な計算量は既に知られている. Horčík and Terui (2011) は FL_{ew} の証明可能性が $PSpace$ (多項式空間決定可能な問題のクラス) において完全であることを証明した. これに対し, Blok and van Alten (2002) は FL_{ew} の演繹可能性問題が決定可能であることを証明したが, それ以降 FL_{ew} の演繹可能性に関して特に目立った進展はなく, その正確な計算量は不明であった. 余談だが, FL_{ew} の演繹可能性の計算量は, Logic Colloquium 2008 において Bílková (2008) により未解決問題として言及されたように, 少なくとも十数年前から解決されるべき課題として認知されていたようである. さて Horčík and Terui (2011) の結果から, FL_{ew} の演繹可能性が少なくとも $PSpace$ 困難であることが自明に帰結する. しかし, 我々はこの問題の最悪計算量が実際には多項式空間はおろか初等再帰時間すらも超越していることを証明し, 前述の未解決の問題を解決する. 正確には次を証明する:

FL_{ew} の演繹可能性は急増加計算量階層の第 3 層 (通称 Tower) において完全である.

この結果は, FL_{ew} の演繹可能性は確かに非初等再帰的ではあるものの, (ややインフォーマルな表現を用いれば) あくまでかろうじて非初等再帰的であるに過ぎない, ということを述べている.

FL_{ew} の演繹可能性の Tower 完全性は (a) Tower 所属性と (b) Tower 困難性を順に証明することにより帰結する. まず, FL_{ew} の演繹可能性が Tower に属することを示すために, Lazić and Schmitz (2015) により導入された $ABVASS_0$ (alternating branching vector addition systems with states and with full zero tests) と呼ばれる遷移系に着目する. 一言でいえば, $ABVASS_0$ とはゼロテスト命令を持たないカウンタ機械を 3 種類の新しい命令によって拡張することで得られる状態付きベクトル加算システム (vector addition system with states) の一種である. Lazić and Schmitz (2015) は $ABVASS_0$ の可達性問題 (reachability problem) の一種であるロッシー可達性問題 (lossy reachability problem) が Tower 完全であることを証明した. さらにこの事実を用いて彼らはアファイン論理の証明可能性問題も同様に Tower 完全であることを証明した. これらを踏まえれば, もし FL_{ew} の演繹可能性問題を $ABVASS_0$ のロッシー可達性問題に還元可能なことを示すことができれば FL_{ew} の演繹可能性の Tower 所属性が帰結するということが分かる. しかし, このような還元の存在を証明する際には多少の技術的困難が生じる. その困難は, 我々の論証が本質的にカット除去を必要とするにもかかわらず, 非論理的公理を伴った FL_{ew} では一般にカット除去が成立しないことに起因する. こうした困難を回避するために, カット除去が成

り立つような直観主義アファイン論理の変種 (ILZ_w) に注目する. 我々はまず FL_{ew} の演繹可能性を ILZ_w の証明可能性へと還元し, その後 ILZ_w の証明可能性を $ABVASS_0$ のロッシー可達性問題へと還元する. ここで, ILZ_w の証明可能性問題から $ABVASS_0$ のロッシー可達性問題への還元は Lazić and Schmitz (2015) の手法に強く依拠している. 目的の還元の存在はいわば ILZ_w を中継地点として機能させることで証明される.

続いて FL_{ew} の演繹可能性問題の Tower 困難性が示される. 我々はまず, Terui (2002) が導入した!冠頭シークエント (!-prenex sequent) と呼ばれる非常に制限された形をもつシークエントに着目する. 我々は, 直観主義論理アファイン論理における!冠頭シークエントに関する証明可能性問題が Tower 困難であることを確認し, さらにこの問題を FL_{ew} の演繹可能性問題へと効率的に還元することにより目的の結果を得る. 特に, !冠頭シークエントに関する直観主義論理アファイン論理の証明可能性問題の Tower 困難性は Lazić and Schmitz (2015) による結果を用いることにより簡単に示される.

第3章の証明では全体を通じて Lazić and Schmitz (2015) による優れた手法や結果が核心的な役割を果たすが, 他にも Avron (1988) の演繹定理, Laurent (2018) のパラメータ付き否定翻訳 (parametrized negative translation) など, 線形論理における既存の概念・技法が効果的に使用される. また, 我々の採る戦略は FL_{ew} のいくつかの断片 (BCK 論理など) に対しても同様に機能するため, そうした諸断片の演繹可能性の Tower 完全性も簡単に帰結する. さらに, 我々の証明技法のマイナーな帰結として, 初等アファイン論理 (elementary affine logic) の証明可能性問題の Tower 完全性も示される.

第3章では少数の論理体系の演繹可能性の計算量を特定したが, 第4章で我々が試みるのは広範な部分構造論理の計算量的特徴づけである. この点で, 第4章の貢献は部分構造論理の中心的スローガンにより即したものと言える. 我々の主結果に現れる計算量クラスは既存の結果, 例えば Horčík and Terui (2011) による結果, で言及される PSpace や coNP などの典型的な計算量クラスよりも遥かに巨大であるという点で特異である. 我々は, 部分構造論理が極度に困難な演繹可能性を伴うのはその論理がどのような条件を満たすときかを急増加計算量階層の観点から明らかにする. 主結果は以下である:

L を部分構造論理とする. 以下の各主張が成り立つ:

- (i) L が部分構造論理 FL_{ew} より弱いならば, L の演繹可能性問題は非初等再帰的 (Tower 困難) である.
- (ii) L が部分構造論理 FL_{eco} より弱いならば, L の演繹可能性問題は非原始再帰的 (Ackermann 困難) である.
- (iii) L が部分構造論理 FL_w より弱いならば, L の演繹可能性問題は非多重再帰的

(HyperAckermann 困難) である.

ここで, Ackermann と HyperAckermann はそれぞれ急増加計算量階層のレベル ω のレイヤーとレベル ω^ω のレイヤーをそれぞれ表す.

上記の主張は各々が数多の帰結をもたらすが, ここではそれらのうちほんの一例に言及する. 縮約と弱化の構造規則はシークエントの左辺に現れる項の数を増減させるという共通の特徴を持つ. このことに鑑みて, 増減させる項の数をパラメータ化することにより, 弱化と縮約の規則を無限個の規則群へと一般化することができる. このようにして得られる規則群を, Hori, Ono, and Schellinx (1994) は結び目規則 (knotted rules) と名付けた. 基本部分構造論理 FL_e にちょうど一つの結び目規則を加えることにより得られるどんな論理体系も演繹可能性に関して決定可能であることが van Alten (2005) により代数的に証明された. しかし, そうした体系のほとんど全てに関して演繹可能性の正確な計算量は依然として不明である. ところが, 我々の定理はそうした問題すべてが例外なく初等再帰時間では決定不能であることを保証する. これは我々の主結果の威力を端的に示している.

第 4 章の主結果の証明は簡潔である. 主張 (i) を示すために, 第 3 章の結果を考慮して FL_{ew} の演繹可能性から FL_{ew} よりも弱い任意の部分構造論理の演繹可能性への多項式時間計算可能な変換を構成する. この還元は交換規則と左右の弱化規則を非論理的公理を用いて FL_{ew} より弱い部分構造論理の内部でシミュレートすることにより示される. このアイデアは Lincoln, Scedrov, and Shankar (1995) が二階命題直観主義乗法線形論理の証明可能性が決定不能であることを示す過程で用いたテクニックを想起させる. ただし, 我々の変換が多項式時間還元になっていることを証明する際には, 第 3 章の証明の際に生じたものと同種の困難が生じる. その困難を回避するために, 第 3 章で用いた直観主義アファイン論理 (の変種) を再び活用する. また, 本質的に似たような発想は (ii) と (iii) の証明においても機能する. さらに我々は, こうした証明のアイデアを敷衍することにより, 直観主義命題論理よりも弱い任意の部分構造論理が演繹可能性に関して PSpace 困難であることも証明する.

最後の第 5 章では, 第 4 章までに得られた結果から引き出せる帰結とそれらに関連する未解決の課題について述べる.

Thesis Abstract

No.1

Registration Number	□ “KOU” □ “OTSU” No.	*Office use only	Name	Hiromi Tanaka
Thesis Title Nonelementary Computational Complexity of Substructural Logic (部分構造論理の非初等的計算量)				
Thesis Summary Substructural logic is a far-reaching concept encompassing a wide range of nonclassical logics. Estimating the computational complexity of a logic is a central concern for substructural logicians. In the literature, a well-investigated complexity question is the provability problem, i.e., the problem of determining whether a given term is provable in a logic under consideration. However, there is no doubt that a more general problem can be considered. A typical generalization of the provability problem is the so-called deducibility problem, i.e., the problem of determining whether a given term is deducible in a logic augmented with a given finite set of nonlogical axioms. A decision problem is classified as tractable or intractable, according to the computational resources it requires. Additionally, the degree of intractability drastically varies from problem to problem. We refer to a nonelementary problem (i.e., a problem for which there is no elementary recursive algorithm) as an “extremely intractable problem.” We aim to present the extreme intractability of deducibility in many logical systems in terms of the fast-growing complexity hierarchy (Schmitz, 2016), a game-changer in the literature on nonelementary computational complexity. Our contribution is twofold. We obtain a sharp complexity estimate for deducibility in full Lambek calculus with exchange and weakening (FL_{ew} , for short). Although FL_{ew} -deducibility is decidable (Blok and van Alten, 2002) and requires polynomial space (Horčík and Terui, 2011), its exact complexity bound remained open (Bílková, 2008). We fill this enormous complexity gap; that is to say, we show that deducibility in FL_{ew} is complete for the class Tower, the third layer in Schmitz’s hierarchy. Our proof relies heavily on the novel ideas of Lazić and Schmitz (2015). We also prove the Tower-completeness of provability in elementary affine logic. The central mission of substructural logic is not merely to show that a given logic possesses a desired property but to characterize important properties shared by many logics in a uniform way. Our second contribution aligns with this broader aim. We present simple conditions under which the worst-case complexity of deducibility requires nonelementary time. More precisely, we establish the sufficient conditions under which deducibility in a substructural logic is: (i) Tower-hard, i.e., not elementary recursive; (ii) Ackermann-hard, i.e., not primitive recursive; and (iii) HyperAckermann-hard, i.e., not multiply recursive. As a corollary, it follows that deducibility in any extension of full Lambek calculus with exchange by any one of the knotted rules introduced by Hori, Ono, and Schellinx (1994) is nonelementary.				