

博士学位請求論文審査報告書

報告番号 甲 乙 第 号 氏名 田中 大海

論文題目 Nonelementary Computational Complexity of Substructural Logic

論文審査担当者

主査 慶應義塾大学文学部教授・文学研究科委員 柏端 達也

副査 慶應義塾大学文学部准教授 峯島 宏次

副査 慶應義塾大学名誉教授 岡田 光弘

副査 北陸先端科学技術大学院大学名誉教授 小野 寛晰

学識確認者 慶應義塾大学文学部教授・文学研究科委員 柏端 達也

論文概要

本論文は、種々の論理体系を俯瞰する統一的な視座として部分構造論理に注目し、計算の複雑さという観点に基づいて広範な部分構造論理の体系を特徴づけることを試みた論稿である。従来、論理体系の計算の複雑さを評価する尺度としては証明可能性問題（provability problem）が用いられてきたが、その尺度のもとでは多くの部分構造論理が多項式空間などの典型的な計算量クラスに収まることが知られている。これに対して著者は、証明可能性問題を自然な形で一般化した演繹可能性問題（deducibility problem）という尺度に光を当て、部分構造論理の演繹可能性問題が証明可能性問題に比べてはるかに巨大な計算資源を要することを明らかにした。本論文は五つの章から構成されている。第1章では部分構造論理の概観とともに、本論文の中心的な課題である証明可能性問題と演繹可能性問題の背景が提示される。第2章では以後の章における主定理の証明に必要な諸概念が導入される。第3章では、縮約規則を欠く部分構造論理の演繹可能性問題について、その厳密な計算量が特定される。第4章では、より広範なクラスの部分構造論理の体系に対し、演繹可能性問題の巨大計算量を一般的に特徴づける定理が証明される。第5章では、本論文の総括が行なわれ、今後の課題として未解決の問題が提示される。

論文の構成は以下のとおりである。

1 Introduction

1.1 Sequent calculus and structural rules

1.2 Embodiment of substructural logics

1.3	Decision problems and computational complexity
1.4	An observation: two types of decision problems
1.5	State of the art
1.6	Contributions
1.7	Organization of this thesis
2	Preliminaries
2.1	Sequent calculi for substructural logics
2.1.1	Languages, terms, and sequents
2.1.2	Full Lambek calculus and basic substructural logics
2.2	Sequent calculi with implicit exchange
2.2.1	Languages, terms, and sequents in commutative logics
2.2.2	Sequent calculus for intuitionistic linear logic
2.2.3	Sequent calculus for classical linear logic
2.3	Alternating branching vector addition systems with states
2.4	Fast-growing complexity classes
2.4.1	Ordinal terms and fast-growing functions
2.4.2	Ordinal-indexed hierarchy of fast-growing complexity classes
2.5	Decision problems beyond ELEMENTARY
2.5.1	Decision problems for logics
2.5.2	Decision problems for counter systems
3	TOWER-complete problems in logics without contraction
3.1	Simple translation of classical linear logic to intuitionistic linear logic
3.2	TOWER upper bounds for contraction-free logics
3.2.1	The provability problem for elementary affine logic is in TOWER
3.2.2	The deducibility problems for FL_{ei} and FL_{ew} are in TOWER
3.3	TOWER lower bounds for contraction-free logics
3.3.1	TOWER-hardness of deducibility in FL_{ew} and related systems
3.3.2	TOWER-hardness of provability in elementary affine logic
4	Nonelementary lower bounds for various substructural logics
4.1	Nonelementary problems in substructural logics weaker than FL_{ew}
4.1.1	Sequent calculus for ILZ_w with explicit exchange
4.1.2	TOWER-hardness of deducibility in substructural logics weaker than FL_{ew}
4.1.3	HACK-hardness of deducibility in substructural logics weaker than FL_w

4.2 Nonprimitive recursive problems in substructural logics weaker than FL_{eco}

4.2.1 Cut-free sequent calculus for FL_{eco}

4.2.2 ACK-hardness of deducibility in substructural logics weaker than FL_{eco}

4.3 Further results

4.3.1 Case study on knotted extensions of FL

4.3.2 PSPACE-hardness of deducibility in logics weaker than intuitionistic propositional logic

5 Conclusion

各章の要約

本論文の第1章 (Introduction) では、まず部分構造論理の概要が提示される。部分構造論理は、最も基本的な体系であるフル・ランベック計算 (FL) にさまざまな構造規則を加えることで定義される論理である。この定義により、部分構造論理は、超直観主義論理や多値論理をはじめとする既存の多様な非古典論理を包含する枠組みとして位置づけられる。第1章では、このような「論理の一般的で普遍的な特徴づけ」を与える包括的枠組みとしての部分構造論理の意義が強調され、とりわけ、広範な論理体系に共通して現われる性質を明らかにすることが部分構造論理の主要な研究目的であると論じられる。

そのような性質として、本論文では、とくに論理体系の証明可能性問題と演繹可能性問題に関する計算の複雑さ (計算量) が中心的に扱われる。第1章では、伝統的な決定問題と対比して、計算の複雑さの概念に着目することで、より精緻な論理体系の特徴づけが可能となる点が強調され、なかでも演繹可能性問題の計算量を明らかにすることが、部分構造論理の研究プログラムの中で重要な位置を占めるという点が指摘される。これを踏まえ、部分構造論理の証明可能性問題と演繹可能性問題の計算量に関してこれまでの先行研究で得られている主要な成果が整理される。それとともに、演繹可能性問題の計算量を明らかにするためには2010年代に発展した非初等計算量理論、とりわけ急増加計算量階層 (fast-growing complexity hierarchy) が有効であるという展望が示され、本論文の主要な貢献が概観されている。

第2章 (Preliminaries) では、第3章と第4章で提示される主要な結果を得るために必要な諸概念が導入される。とくに、(1) フル・ランベック計算 (FL) に始まる部分構造論理のシークエント計算の諸体系、(2) 演繹可能性問題の計算量を特定するために用いられるカウンター機械の一つである状態付きベクトル加算システム、(3) 急増加計算量階層とさまざまな決定問題が簡潔に説明される。

第3章 (TOWER-complete problems in logics without contraction) は、本論文の主要成果の一つを提示する章であり、部分構造論理の体系 FL_{ew} における演繹可能性問題の計算量

が厳密に特定される。 FL_{ew} とは直観主義論理から縮約規則を除いた体系に相当する。具体的には、 FL_{ew} の演繹可能性問題は急増加計算量階層の第3層（Towerと呼ばれる）において完全であることが示される。このTower完全性は、 FL_{ew} の演繹可能性問題が (1) Towerクラスに属すること、および、(2) Tower困難であること、この二つを示すことから帰結する。(1)については、状態付きベクトル加算システムの一つであるABVASS₀に着目し、ABVASS₀の可達性問題の一種であるロッシー可達性問題がTower完全であるという先行研究で得られている成果を利用して、 FL_{ew} の演繹可能性問題をこのロッシー可達性問題に還元することで示される。(2)のTower困難性については、シークエントの形を制限した直観主義アファイン論理の証明可能性問題がTower困難であるという事実を利用し、この問題を FL_{ew} の演繹可能性問題に還元することによって示される。

第4章（Nonelementary lower bounds for various substructural logics）では、第3章で得られた個別の論理体系に対する結果を拡張し、より広範な部分構造論理に対する計算量的特徴づけを試みている。この貢献は、本論文で強調される部分構造論理が志向する「論理の普遍的特徴づけ」という理念に即したものであり、とくに急増加計算量階層の観点から、どのような条件のもとで演繹可能性が極端に計算困難になるかを明らかにしている。主要な結果は、任意の部分構造論理の体系Lに対して以下のような難易度階層を与えるものである。

- (i) L が FL_{ew} より弱ければ、演繹可能性問題はTower困難（非初等再帰的）である。
- (ii) L が FL_{eco} より弱ければ Ackermann困難（非原始再帰的）である。
- (iii) L が FL_w より弱ければ HyperAckermann困難（非多重再帰的）である。

これらの計算量クラスは、従来のPSPACEやcoNPなどの典型的な計算量クラスと比較して、はるかに高い計算の複雑さをもつ。また第5章では、結び目規則（knotted rule）の導入により得られる論理体系についても議論され、以上の結果から、 FL_e に特定の結び目規則を加えて拡張した体系においても、その演繹可能性問題がすべて初等再帰時間で決定不能であることが帰結として導かれることが指摘される。

終章の第5章（Conclusion）では、第4章までの結果から引き出される帰結が簡潔に要約されるとともに、今後の研究に向けた課題として未解決問題が整理される。

審査要旨

本論文は、広範な論理体系に共通して現われる諸性質を明らかにするという動機のもと、部分構造論理の枠組みに着目し、これまで十分に明らかにされてこなかった演繹可能性問題の計算の複雑さの解明に取り組んだ、きわめて挑戦的な論稿である。第1章では、部分構造論理および計算の複雑さをめぐる現代の研究動向に対する、的確でバランスの取れた

理解に基づき、本論文の新規性の所在が明快に示されている。とりわけ、技術的な細部に踏み込む前に、研究の意義や背景について言葉を尽くして丁寧に説明する構成は、本論文の特色の一つであり、高く評価することができる。

以下、評価点をより詳細に挙げていく。

本論文の独自性・新奇性としてまず特筆すべきは、部分構造論理において証明可能性問題（与えられた論理式が証明可能か否か）と演繹可能性問題（与えられた論理式がある有限の公理の集合のもとで証明可能か否か）が本質的に峻別されるという点に着目し、演繹可能性問題の計算量が、広範な部分構造論理を従来よりも精緻に特徴づける重要な指標であることを明確にした点である。構造規則を備えた論理——たとえば、古典論理や直観主義論理——では演繹定理が成り立つため、演繹可能性問題は証明可能性問題へと還元される。他方で、構造規則を欠く部分構造論理では、演繹定理が成り立たないゆえ、従来の証明可能性問題とは別に、演繹可能性問題の計算量を特定する必要がある。この演繹可能性問題の計算量を尺度として用いることで、広範な部分構造論理の体系に対して、驚くほど繊細かつ多様な分類を与えることが可能となる。伝統的な決定問題（すなわちある論理式の証明可能性を有限時間で判定するアルゴリズムが存在するか否か）と対比して、計算の複雑さ（その判定にどれくらいの計算資源が必要とされるのか）に着目することは、論理体系の性質をより精緻に特徴づける手段を与える。しかし、従来の証明可能性を基準とする場合、多くの部分構造論理は多項式空間（PSPACE）などの典型的な計算量クラスに収まり、体系間の差異はさほど顕著でなかった。演繹可能性問題に焦点を当てることによって初めて、部分構造論理の諸体系が示す計算的複雑性の多様な振る舞いとグラデーションが明らかになるのである。

評価点として第二に挙げられるのは、計算量理論の近年の進展に着目し、それに対する深い理解に基づいて、部分構造論理の計算複雑性に取り組んでいる点である。2010年代に著しい発展を遂げた非初等計算量理論、とりわけ急増加計算量階層は、Lazić and Schmitz (2015) によってすでに一部の論理体系の計算量の分類に用いられていたが、これを部分構造論理の演繹可能性問題に応用し、長らく未解決であった FL_{ew} の演繹可能性問題を解決に導いた点は、本論文の特筆すべき貢献の一つである。さらにこの成果を突破口として、第4章では、基礎的な部分構造論理諸体系の演繹可能性問題の計算量が一般的に特徴づけられるに至っており、その意義は大きい。

また技術的には、本論文では第3章および第4章における主定理の証明にさいして、証明論の手法、とくに線形論理の先行研究の成果を幅広く参照、活用し、厳密で洗練された証明を展開している点が高く評価できる。たとえば、第3章の主定理では、 FL_{ew} の演繹可能性問題をこのロッシー可達性問題に還元することで示されるが、この還元を成立させるためには、カット除去に関わる技術的困難を解消する必要がある。そのため、 FL_{ew} の演繹可能性を、直観主義アファイン論理（Intuitionistic Affine Logic）の一種である ILZ_w の証

明可能性に還元し、さらにそれを $ABVASS_0$ のロッシー可達性問題へと段階的に還元するというアプローチが採用されている。また、Tower困難性の証明においても、シークエントの形を制限した直観主義アファイン論理の証明可能性問題がすでにTower困難であるという事実を利用することで、効率的かつ洗練された証明が与えられている。これらの証明論的手法の巧みな活用もまた、本論文の評価すべき点の一つである。

以上のとおり、田中君の学位請求論文は、一貫した学術的姿勢のもと、部分構造論理の研究に対して新たな解釈の視座を提示しようとする意欲的な試みである。論文全体の構成は明確であり、各章で展開される議論もいずれも示唆に富んでおり、それぞれの論点において学術的意義が認められる点が、審査担当者によって高く評価された。

もともと、そうした高い評価にもかかわらず、今後さらに探究されるべき課題も認められ、それらについていくつかの指摘がなされた。

まず、本論文第3章ではBCK論理の演繹可能性がTower完全であることが示されているが、それと密接に関連するBCI論理（すなわちBCK論理から左弱化規則を除いた体系）の演繹可能性問題の決定可能性は、いまだ未解決のままである。この問題は、線形論理における代表的な未解決問題であるMELL（Multiplicative Exponential Linear Logic）の決定問題、およびオートマトン理論における難問であるBVASS（Branching Vector Addition Systems with States）の可達性の決定問題と密接に関係しており、これらの問題は相互に還元可能である。この意味で、BCI論理の決定問題の解決は大きなブレイクスルーとなり得るものであり、この問題に挑戦することは、本研究の延長として位置づけられ、今後の重要な課題でありうる。

また、第4章で示された広範な部分構造論理体系に対する計算量の一般的特徴づけを、言語学や計算機科学といった周辺分野で議論されてきた個別の論理体系にどう適用するかも、今後の重要かつ興味深い課題である。たとえば、ランバック計算はもともと言語学における範疇文法の論理的枠組みとして提案されたが、本論文で扱われる部分構造論理、とりわけ交換規則や弱化規則を制限した体系は、形式文法への応用可能性を秘めている。こうした応用の可能性を具体的に探ることは、部分構造論理の理論的意義をいっそう深めるとともに、新たな視点からの理論的洞察を導く契機となりうるはずである。

今後の課題についての上記の「注文」は、もとより、ここまで達成された小さくない成果を背景にしてはじめて田中君に対し可能となるものである。それは本論文の不完全さを示すものではない。なお田中君の学識については、問題なく水準を満たすことが学識確認者によって事前に確認されている。

以上により、本審査委員会は、田中大海君の学位請求論文を博士（哲学）の学位授与にふさわしいものと判断する。

令和7年7月4日 審査担当者一同