

報告番号 甲 乙 第 号

氏名 高橋 優太

論文題目 On Gentzen's Three Consistency Proofs for Arithmetic  
(算術の無矛盾性に対するゲンツェンの三つの証明について)

論文審査担当者

主査 慶應義塾大学文学部教授 岡田 光弘  
文学研究科委員

副査 慶應義塾大学文学部教授 柏端 達也  
文学研究科委員

副査 日本大学文理学部教授 飯田 隆  
慶應義塾大学名誉教授

副査 神戸大学大学院システム情報学研究科教授 菊池 誠

学識確認 慶應義塾大学文学部教授 岡田 光弘  
文学研究科委員

## 論文概要

ヒルベルト学派ゲンツェンによる算術体系に対する三つの無矛盾性証明が論理的・哲学的に検討されている。それらの証明の哲学的意義が「命題の有限主義解釈」の立場から議論されている。第2証明の構成についての分析を通じて三つの証明構造間の論理的関係が明らかにされ、三つの証明に対する新しい統合的捉え方が提案されている。

論文の構成は次の通りである。

## Chapter 1 Introduction

(第一章 序論)

### 1.1 The Axiomatic Method and Hilbert's Program

(公理的方法とヒルベルトのプログラム)

### 1.2 Gentzen's Works on the Consistency of Arithmetic

(算術の無矛盾性についてのゲンツェンによる成果)

### 1.3 Objectives of the Thesis

(本論文の目的)

**Chapter 2 Philosophical Background of Gentzen's Interpretation for Arithmetic**  
(第二章 ゲンツェンによる算術の解釈についての哲学的背景)

**2.1 Introduction to Chapter 2**

(第二章への序)

**2.2 Hilbert and Brouwer on Mathematical Propositions**

(数学的命題に関するヒルベルトとブラウワー)

**2.3 Gentzen's Response to the Brouwer-style Objection**

(ブラウワー的反論へのゲンツェンによる応答)

**2.4 Formulation of Reduction Procedures with Spreads**

(域を用いた還元手続きの定式化)

**2.5 Proof of Main Lemma with Monotone Bar Induction**

(単調バー帰納法を用いた主要補題の証明)

**2.6 Conclusion of Chapter 2**

(第二章の結論)

**Chapter 3 Gentzen's Interpretation for Arithmetic and Circularity of Implication**  
(ゲンツェンによる算術の解釈と含意の循環)

**3.1 Introduction to Chapter 3**

(第三章への序)

**3.2 Circular Reasoning Concerning Implication**

(含意に関わる循環論法)

**3.3 Gentzen-style Interpretation for Implication**

(含意に対するゲンツェンの解釈)

**3.4 Way Out of Circularity**

(循環の回避)

**3.5 Conclusion of Chapter 3**

(第三章の結論)

**Chapter 4 Contentual and Formal Aspects of Gentzen's Interpretation for Arithmetic**  
(ゲンツェンによる算術の解釈がもつ内容的側面と形式的側面)

**4.1 Introduction to Chapter 4**

(第四章への序)

**4.2 Contentual and Formal Correctness Proofs**

(内容的健全性証明と形式的健全性証明)

**4.3 Finite Notations for Infinitary Derivations**

(無限的証明に対する有限的記法)

**4.4 Contentual and Formal Aspects of Gentzen's 1936 Proof**

(ゲンツェンの1936年証明がもつ内容的側面と形式的側面)

**4.5 No-counterexample Interpretation**

(無反例解釈)

## 4.6 Conclusion of Chapter 4 (第四章の結論)

### Concluding Remarks (結語)

#### 各章の概要

第一章では、本論文の背景・動機・目的が説明されている。第一節では、数学の基礎付けを目的としてヒルベルトが提案した算術の無矛盾性（健全性）証明の課題（ヒルベルト・プログラム）が解説される。第二節では、ヒルベルト学派のゲンツェンがこの課題の解決のために採用した算術命題（論理式）の「有限主義的解釈」が概観される。ゲンツェンは算術体系に対して三つの異なる無矛盾性証明（1935年、1936年、1938年）を提出したが、第1証明と第2証明でこの有限主義的解釈が用いられたことが述べられる。第三節では、本論文の各章ごとの構成と内容が概観される。

第二章では、ゲンツェンによる算術的論理式の有限主義的解釈が詳しく検討されている。第一節の序論のあと、第二節では、無矛盾性証明の意義を巡る有限主義派ヒルベルトと直観主義派ブラウワーの論争が分析される。特に、ヒルベルトの無矛盾性証明プログラムには意義がないとするブラウワーの有限主義批判が考察される。第三節では、1935年第1証明におけるゲンツェンの算術的論理式の有限主義的解釈が考察され、この解釈がブラウワーの有限主義批判に耐えうるものであることが主張される。第四節では、域（spread）という直観主義数学の概念を用いてゲンツェンによる算術的論理式の有限主義的解釈が定式化される。第五節では、直観主義的バー帰納法原理により第1無矛盾性証明が整理される。そのうえで第1証明が直観主義学派にも受け入れられる証明であることが指摘される。

第三章では、論理的「含意」結合子の解釈の問題が考察されている。第一節の序論のあと、第二節では、論理的「含意」結合子の解釈に循環が含まれるというゲンツェンの指摘が検討される。第三節では、ゲンツェンの有限主義的解釈が「含意」を含めて再定式化される。第四節では、この有限主義的「含意」解釈を用いれば無矛盾性（健全性）の議論において循環が回避できることが論じられる。

第四章では、ゲンツェンの有限主義的解釈及び無矛盾性証明の「内容的」側面と「形式的」側面について考察されている。第一節の序論のあと、第二節では、ジークによる先行研究を参照しながら、ゲンツェンの未発表原稿に現れる「内容的」無矛盾性証明と「形式的」無矛盾性証明の区別が哲学的に重要であることが指摘される。ゲンツェンの第1証明は「内容的」であり、第3証明は「形式的」であることが確認される。第2証明がどちらに分類されるかという問題が提起される。第三節では、第2証明を分析する手法として、無限的証明図に対する有限的記法が提案さ

れる。第四節ではまず、この手法を用いて、第2証明の主要補題が再構成される。次に、「内容的」無矛盾性証明である第1証明の主要補題と「形式的」無矛盾性証明である第3証明の主要補題の両者が第2証明の主要補題から直接導出されることが指摘される。このことから、第2証明が「内容的」側面と「形式的」側面の両側面を持つことが主張される。第五節では、本章の成果の応用として、クライゼルによる無反例解釈 (no-counterexample interpretation) の別証明が与えられている。

結語では、第二章・第三章・第四章のそれぞれの結果と主張がまとめられている。

## 審査要旨

数学諸体系の無矛盾性（整合性）を証明するという課題は、19世紀の集合論や論理体系に対するパラドクスの発見（ラッセル 1902 年）、「公理的方法」の導入（ヒルベルト、1899 年－1900 年）などを背景に、数学の基礎付けのための中心的研究課題の一つとなっていた。ヒルベルト学派ゲンツェンによる算術体系の無矛盾性証明はこの分野の重要な成果であり、その後のこの分野の研究に決定的な影響を与えることとなった。一方で、不完全性定理の出現（ゲーデル 1931 年）はゲンツェンの成果の哲学的・論理的意義について論争点を残すこととなった。ゲンツェンは三つの無矛盾性証明を与えた。よく知られているのは第3証明(1938年)であるが、他の二つの証明(1935年、1936年)も含めた三つの証明全体についてはこれまで厳密に議論されることが少なかった。このような状況のもとで、高橋君は、ゲンツェンの三つの無矛盾性証明の論理的・哲学的意義の問題、および三つの証明間の論理的・哲学的関係の問題に正面から取り組み大きな成果を上げたと言える。

第一章では無矛盾性証明課題の背景やゲンツェンの算術体系に対する無矛盾性（健全性）証明の基本的な考え方が簡潔にまとめられているがそのまとめ方にオリジナリティが認められる。

第二章では、ゲンツェンの第1無矛盾性（健全性）証明における「有限主義解釈」のもつ重要な役割が適切に指摘されている。「有限主義解釈」を「域 (spread)」と呼ばれる直観主義数学概念により明確化すること、第1無矛盾性証明を直観主義的帰納法原理により明確化することに成功している。このように捉えられた第1証明が直観主義学派にも許容可能な無矛盾性証明であることが主張されているが、これはゲンツェンの第1証明に新たな哲学意義を与えたものと言える。これに似た捉え方は（テイトなどの）先行研究にもみられるとはいえ、高橋君の論理的・哲学的議論の進め方には独創性が認められる。

第三章では、論理的「含意」結合子解釈と無矛盾性証明の意義について新しい分析が与えられており、評価できる。ゲンツェンは、「含意」の素朴な構成的解釈による無矛盾性（健全性）の議論には循環が含まれることを指摘した後に、循環問題が有限主義解釈により回避されることを古典論理の「否定」結合子を経由して示し

ている。これに対して高橋君は、有限主義「含意」解釈を直接用いて無矛盾性証明を構成すれば循環回避がより直接的に示し得るという独自の考え方を提案し、そのような証明の構成を通じてこれを確認している。このことはゲンツェンの無矛盾性証明の哲学的意義を理解する上で重要な指摘であり、評価できる。

第四章では、ゲンツェンの初期草稿に現れる「内容的」無矛盾性（健全性）証明と「形式的」無矛盾性（健全性）証明との区別について、ジークの先行研究を踏まえながら、独自の哲学的議論が展開されており高く評価できる。ヒルベルトの考えがゲンツェンの無矛盾性証明に与えた影響についての議論は説得力がある。（構成的）無限証明表現と直観主義証明原理を通じて第2証明の構造が見通しのよい形に再構成されている。これは本分野における大きな貢献である。また、このことを通じて第2証明が「内容的」側面と「形式的」側面の両側面を持つ証明であることが示されているが、「内容」対「形式」というこれまでの無矛盾性証明の見方に対して新しい視点を与えるものである。また、第2証明が「内容的」第1証明と「形式的」第3証明の両者と密接な関係を持つことも示され三つの証明に対する統合的な理解が可能になったと言え評価できる。また、成果の応用として、クライゼルによる無反例解釈（no-counterexample interpretation）の新証明が与えられているが、このことも第2証明の定式化の有効性を示すものと言える。

一方で残された課題として次のことが挙げられる。直観主義的手法の導入がゲンツェンの「有限主義解釈」及び無矛盾性証明の理解に有効であることが明らかにされたが、ここで使われた直観主義的手法がゲンツェン自身の有限主義的証明手法の枠内にあるとみなせるのか、または両者にどのような違いがあるのかという点は議論の余地がある。また、構成的無限証明（及び正規化木）の表現を用いて第2証明の構造が見通しのよい形で定式化されたが、ゲンツェン自身の第2証明との関係の明確化については補足的議論が必要となるであろう。

このような研究課題を残してはいるものの、この論文の成果は論理的・哲学的に高い学術的価値を有していることは明らかである。審査委員会は本論文が慶應義塾大学大学院文学研究科博士学位授与に十分に値するものであると判定する。

平成29年10月3日

審査委員会一同