Title	超ケーラー多様体の幾何学と漸近解析
Sub Title	The geometry and asymptotic analysis of hyper-Kaehler manifolds
Author	服部, 広大(Hattori, Kota)
Publisher	
Publication year	2016
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2015.)
JaLC DOI	
Abstract	(1) トーリック超ケーラー多様体におけるコンパクト特殊ラグランジアン部分多様体の構成法を,ジョイスの非特異化の手法を応用して開発した。特殊ラグランジアン部分多様体とは,面積を最小化する曲面の高次元空間への一般化である。そのような部分多様体を構成するには,一般には偏微分方程式を解かなければならないが, 研究代表者はこの問題が適切な状況下では初歩的な線形代数の議論に帰着できることを証明した。(2) リッチ平坦多様体は,真空中におけるアインシュタイン方程式の解である。研究代表者は,漸近錐が一意に定まらないような4次元リッチ平坦多様体を構成した。 (1) I have developed the new construction of compact special Lagrangian submanifolds embedded in toric Hyper-Kaehler manifolds applying Joyce's desingularization. The special Lagrangian submanifolds are the generalization of area minimizing surfaces to the higher dimension. To construct such submanifolds, we have to solve partial differential equations in general. However, I have shown that we can reduce the problem to the argument of elementary linear algebra under the appropriate circumstances. (2) The Ricci-flat manifolds are the solutions of Einstein's equations in the vacuum. I have constructed the 4 dimensional Ricci-flat manifolds whose asymptotic cones are not unique.
Notes	研究種目 : 研究活動スタート支援 研究期間 : 2014～2015 課題番号 : 26887031 研究分野 : 微分幾何学
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_26887031seika

様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 １９ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2014～2015
課題番号：２６８８７０３１

研究課題名（和文）超ケーラー多様体の幾何学と漸近解析

研究課題名（英文）The geometry and asymptotic analysis of hyper-Kaehler manifolds

研究代表者
服部　広大（Hattori, Kota）

慶應義塾大学・理工学部・講師

研究者番号：３０５８６０８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：(1)トーリック超ケーラー多様体におけるコンパクト特殊ラグランジアン部分多様体の構成法を，ジョイスの非特異化の手法を応用して開発した．特殊ラグランジアン部分多様体とは，面積を最小化する曲面の高次元空間への一般化である．そのような部分多様体を構成するには，一般には偏微分方程式を解かなければならないが，研究代表者はこの問題が適切な状況下では初歩的な線形代数の議論に帰着できることを証明した．
(2)リッチ平坦多様体は，真空中におけるアインシュタイン方程式の解である．研究代表者は，漸近錐が一意に定まらないような4次元リッチ平坦多様体を構成した．

研究成果の概要（英文）：(1) I have developed the new construction of compact special Lagrangian submanifolds embedded in toric Hyper-Kaehler manifolds applying Joyce's desingularization. The special Lagrangian submanifolds are the generalization of area minimizing surfaces to the higher dimension. To construct such submanifolds, we have to solve partial differential equations in general. However, I have shown that we can reduce the problem to the argument of elementary linear algebra under the appropriate circumstances.
(2) The Ricci-flat manifolds are the solutions of Einstein's equations in the vacuum. I have constructed the 4 dimensional Ricci-flat manifolds whose asymptotic cones are not unique.

研究分野：微分幾何学

キーワード：超ケーラー多様体　接錐　特殊ラグランジュ部分多様体　リッチ曲率　距離空間

１．研究開始当初の背景

４次元 ALE 空間は，アインシュタイン方程式の解の局所モデルとして知られる空間であり，その存在が物理学者によって発見されて以来，幾何学，物理学の双方で興味を持たれる研究対象であった．幾何学の側では，1990 年前後にクロンハイマーによって ALE 空間の系統的構成法が確立され，さらに ADE 型のディンキン図形との対応によって完全に分類された．その前後の研究により，AD 型の４次元 ALE 空間に対して，Taub-NUT 変形という超ケーラー多様体の変形が発見された．ALE とは，空間の漸近挙動の性質が４次元ユークリッド空間と近いことを意味する．この変形によって，ALF 空間と呼ばれる ALE とは異なる漸近挙動を持つ超ケーラー多様体が現れた．また，このような変形は高次元のトーリック超ケーラー多様体に対しても拡張されていた．トーリック超ケーラー多様体は，その空間の４分の１次元のトーラス作用の対称性を持つ超ケーラー多様体であり，Taub-NUT 変形を施したのちもトーラス作用が保たれることが知られていた．これらの高次元の超ケーラー多様体の幾何学的な性質については，コホモロジーなどの位相的性質が良く研究されていたが，微分幾何学的なアプローチによる研究は，未知の部分が残されていた．その一つは，特殊ラグランジュ部分多様体と呼ばれる体積最小の部分多様体の存在問題である．研究開始当初，代数幾何学的手法による例は構成されていたが，偏微分方程式の解析を用いた超越的な例の構成に関しては手つかずであった．

また，４次元において ALE や ALF とは異なる漸近挙動を示す超ケーラー多様体の例が豊富に構成されており，それらの漸近挙動について解明されていないことが多く残されていた．

２．研究の目的

ALE 空間は，測地球の体積が，半径の４乗のオーダーで増大する空間であり，ALF 空間は半径の３乗のオーダーで増大する空間である．ちょうどこの中間のオーダーで測地球の体積が増大する超ケーラー多様体の例として，A_∞型超ケーラー多様体が知られていた．また， トーリック超ケーラー多様体は，A 型 ALE 空間の高次元化に相当する空間である．本研究の目的は，これらの超ケーラー多様体の漸近解析と，幾何学的性質を明らかにすることであった．

３．研究の方法

A_∞型超ケーラー多様体は，その漸近挙動が極めて複雑である．その複雑さを逆手にとり，「性質の良い」漸近挙動を持つリッチ平坦多様体が満たすべき性質を満たさない反例を構成することによって，A_∞型超ケーラー多様体の漸近挙動に対する理解を深めようとした．また，トーリック超ケーラー多様体における特殊ラグランジュ部分多様体を構成し，高次元の超ケーラー幾何の，微分幾何学的な研究対象を構築し，その性質を調べた．

４．研究成果

(1)リッチ平坦多様体の漸近錐の非一意性．

一般の点付き非コンパクト距離空間に対し，その点を中心とする縮小の繰り返しによって得られるグロモフ・ハウスドルフ極限を，漸近錐(無限遠点における接錐)と呼ぶ．一般の距離空間に対しては，漸近錐は存在するとは限らず，存在しても一意とは限らない．また，距離空間論の意味での「錐」となる保障もない．しかし，リッチ曲率が非負のリーマン多様体に対しては漸近錐が必ず存在することが知られており，さらにリッチ平坦で，体積増大度がユークリッド的であり，漸近錐の少なくとも１つは滑らかな断面を持つのであれば，一意性が成り立つ．この一意性はコールディングとミニコッチによって証明されたが，一意性が成立するための仮定を弱めることができるかどうかについては，完全な解答が得られていない．ペレルマンは，少なくともリッチ平坦性を仮定しなければ，一意性が成立しない例が存在することを証明した．

研究代表者は，A_∞型超ケーラー多様体と呼ばれる４次元のリッチ平坦多様体の漸近錐を研究した．その結果，このような多様体族の中に，漸近錐の一意性が成立しない例を発見した．その方法は次の通りである．

①A_∞型超ケーラー多様体の漸近錐の構造．

A_∞型超ケーラー多様体は，可算無限個のパラメータをもつリッチ平坦多様体の族である．このパラメータを上手く設定することによって，色々なリッチ平坦多様体を構成できる．また，A_∞型超ケーラー多様体は，円周群の作用による対称性を持つ空間であり，3 次元ユークリッド空間を底空間とする円周ファイブレーションの構造を持つ．その中で，いくつかのファイバーは１点からなる特異ファイバーとなるが，その特異ファイバーを 3 次元ユークリッド空間に射影することによって，3 次元空間内の，可算無限閉部分集合が得られる．以下，特異ファイバーに対応するこれらの点を，モノポールと呼ぶことにする．3 次元ユークリッド空間内におけるモノポールの位置が，最初に述べたパラメータに相当する．すなわち，モノポールを動かすことによって，リーマン計量をリッチ平坦性を保ったまま連続的に変形することができるのである．

本研究ではまず，A_∞型超ケーラー多様体は，縮小を繰り返すことによって，円周ファ

イバーが潰れていくことを証明した．一方，ファイブレーションから誘導される 3 次元ユークリッド空間への写像をリーマン沈め込みとするような，3 次元ユークリッド空間上の非自明な距離構造が入ることが知られていたが，縮小の繰り返しによって，A_∞型超ケーラー多様体は 3 次元の距離空間にグロモフ・ハウスドルフ位相の意味で収束することを証明した．その距離構造は，縮小前のモノポールの配置によって決まることがわかった．

②漸近錐の一意性が成立しない例の構成．
まず，漸近錐の一意性が成り立つような 2 種類の A_∞型超ケーラー多様体を構成した．それぞれの漸近錐の構造は，モノポールの配置によって，性質が良くわかる．次に，ここで与えた 2 種類のモノポール配置を上手く混合することにより，新しいモノポール配置を作り，そこから構成される A_∞型超ケーラー多様体の漸近錐として，元々与えられていた 2 種類の漸近錐がそれぞれ現れることを証明した．一方の漸近錐は，2 次元球面の錐という単純な空間だが，もう一方の漸近錐は，極めて特異な空間であり，基点から発する測地線の性質を詳しく調べることによって距離空間論の意味での「錐」ではないことが証明できた．

(2) トーリック超ケーラー多様体におけるコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体の新しい例．

超ケーラー多様体において，正則ラグランジュ部分多様体から構成し得ないコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体の存在を，以下の手順で証明することができた．

トーリック超ケーラー多様体は，通常のトーリック多様体の定義には当てはまらないが，超ケーラー幾何におけるトーリック多様体の類似物と言えるものである．トーリック超ケーラー多様体では，正則ラグランジュ部分多様体と呼ばれる，特別な複素部分多様体の例を豊富に構成することができる．それは，超ケーラー運動量写像の 3 つの成分のうちの 2 つに関するレベルセットを取ることで実現できる．レベルセットを上手く取れば，コンパクトな正則ラグランジュ部分多様体も構成できる．また，このようにして得られるコンパクトな正則ラグランジュ部分多様体は，自然なトーラス作用に関して，通常の意味でのトーリック多様体とみなすことができる．超ケーラー運動量写像の成分の選び方は，超ケーラー多様体における四元数構造から誘導される複素構造の選び方に対応している．従って，異なる複素構造を選んで，対応する超ケーラー運動量写像の成分に対してレベルセットを取れば，その新たな複素構造に関する正則ラグランジュ部分多様体となる．ここで，複素構造を上手く選ぶと，自然に特殊ラグランジュ部分多様体となることが既に知られている．このようなものを，正則ラグランジュ部分多様体から誘導される特殊ラグランジュ部分多様体と呼ぶことにすると，超ケーラー多様体に埋め込まれた既知のコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体は，全て正則ラグランジュ部分多様体から誘導されており，そうでない超越的な例が存在するのかどうかは知られていなかった．

本研究では，トーリック超ケーラー多様体において，いくつかの複素構造を固定し，それらに関するコンパクト正則ラグランジュ部分多様体を 1 つずつ構成し，ジョイスが確立した貼り合わせの手法によってこれらの部分多様体を貼り合わせ，正則ラグランジュ部分多様体から誘導されないコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体を構成する，という手法をとった．ジョイスの貼り合わせ法を適用するためには，コンパクト正則ラグランジュ部分多様体の組を，いくつかの条件を満たすように上手く構成しなければならない．その条件は組み合わせ論的な条件に帰着できることを証明し，さらにその組み合わせ論的な条件が満たされる具体例を構成した．

本研究で得られたコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体は，多様体としては，次のように得られるもののいずれかと微分同相である．まず，各頂点にプラスかマイナスのいずれか符号を付けられた有限グラフを用意する．このとき，辺で結ばれた 2 つの頂点が異符号になっているとする，その各頂点に，コンパクトなトーリック多様体を対応させ，辺で結ばれているトーリック多様体同士を連結和で結ぶ．連結和を取る時には，各トーリック多様体上に向きを入れる必要があるが，それは複素構造から定まる向きか，その反対向きを，頂点に与えられた符号に従って入れるものとする．このようにして得られた多様体は，コホモロジーの次元を計算できる．そのうち，コンパクト特殊ラグランジュ部分多様体の第 1 ベッチ数は，特殊ラグランジュ部分多様体の変形の次元に対応しており，本研究の文脈では特に重要な不変量である．本研究の結果により，任意の自然数 N に対して，ある実 8 次元のトーリック超ケーラー多様体において，第 1 ベッチ数が N となるようなコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体を構成できることもわかった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）
(1)． K. Hattori，“ The holomorphic symplectic structures on hyper-Kähler manifolds of type A_∞ ”，Advances in Geometry，Volume 14，Issue 4，(2014) 613-630，査読有り．

(2). A. Futaki, K. Hattori, H. Yamamoto, " Self-similar solutions to the mean curvature flows on Riemannian cone manifolds and special Lagrangians on toric Calabi-Yau cones ", Osaka Journal of Mathematics, Volume 51, Number 4, (2014), 1053-1081, 査読有り.

〔学会発表〕(計 14 件)

(1). K. Hattori, " The nonuniqueness of the tangent cone at infinity of Ricci-flat manifolds ", Riemannian Convergence Theory, New York (USA), 2015.11.11.

(2). K. Hattori, " New examples of compact special Lagrangian submanifolds embedded in hyper-Kähler manifolds " The 21th Symposium on Complex Geometry, 金沢大学サテライトプラザ(石川県・金沢市), 2015.10.28.

(3). K. Hattori, " リッチ平坦多様体の無限遠における接錐の非一意性について ", 日本数学会秋季総合分科会, 京都産業大学(京都府・京都市), 2015.9.16.

(4). K. Hattori, " The nonuniqueness of tangent cone at infinity of Ricci-flat manifolds ", Conference on analysis and geometry, 合肥(中華人民共和国), 2015.8.5.

(5). K. Hattori, " 超ケーラー多様体に埋め込まれたコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体 ", 日本数学会年会, 明治大学(東京都・千代田区), 2015.3.23.

(6). K. Hattori, " New examples of compact special Lagrangian submanifolds embedded in hyper-Kähler manifolds ", Princeton-Tokyo workshop on Geometric Analysis, 東京大学(東京都・目黒区), 2015.3.16.

(7). K. Hattori, " New examples of compact special Lagrangian submanifolds embedded in hyper-Kähler manifolds ", 部分多様体論・湯沢 2014, 湯沢グランドホテル(新潟県・湯沢町), 2014.11.21.

(8). K. Hattori, " Compact special Lagrangian submanifolds embedded in toric hyper-Kähler manifolds ", REAL and COMPLEX DIFFERENTIAL GEOMETRY, Bucharest, (Romania), 2014.9.12.

(9). K. Hattori, " トーリック超ケーラー多様体に埋め込まれたコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体 ", 部分多様体幾何とリー群作用 2014, 東京理科大学森戸記念館(東京都・新宿区), 2014.9.5.

(10). K. Hattori, " トーリック超ケーラー多様体に埋め込まれたコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体 ", 第 61 回幾何学シンポジウム, 名城大学(愛知県・名古屋市), 2014.8.24.

(11). K. Hattori, " The geometry on hyper-Kähler manifolds of type A_∞ ", ICM 2014 Satellite Conference on Real and Complex Submanifolds, 大田(韓国), 2014.8.11.

(12). K. Hattori, " A generalization of Taub-NUT deformations ", 9th Pacific Rim Conference on Complex Geometry 群山(韓国), 2014.7.29.

(13). K. Hattori, " A generalization of Taub-NUT deformations ", HAYAMA Symposium on Complex Analysis in Several Variables XVII, 湘南国際村センター(神奈川県・葉山町), 2014.7.19.

(14). K. Hattori, " トーリック超ケーラー多様体に埋め込まれたコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体 ", 写像の特異点論及び関連する科学の諸問題, 都城工業高等専門学校(宮崎県・都城市), 2014.6.6.

6．研究組織

(1)研究代表者
慶應義塾大学理工学部
専任講師　服部　広大　(HATTORI, Kota)

研究者番号：30586087