慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	4次元多様体上の安定写像とそれを用いた4次元多様体の図示法の研究
Sub Title	Topology of stable mappings and diagrams of four-manifolds
Author	早野, 健太(Hayano, Kenta)
Publisher	
Publication year	2018
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2017.)
JaLC DOI	
Abstract	期間中に得られた成果は主に以下の2つである。 切断を持つトーラス上のトーラス束の全空間が種数3のレフシェッツペンシルを持つことがわかっていたが, その消滅サイクルは知られていなかった。本研究では4次元トーラス上の正則なレフシェッツペンシルの消滅サイクルを決定し, さらにそれを用いてトーラス上のトーラス束と同相な多様体上のレフシェッツペンシルを構成した。 近年trisectionと呼ばれる, 4次元多様体の新たな図示法が提案され, さらにその特別なクラスとして単純なtrisectionが定義された。本研究では単純なtrisectionの図式と写像類群との関係を明らかにし, またその図式の例を得る方法も与えた。 The results obtained in the project are followings. It is known that total spaces of torus bundles over the torus with sections admit genus-3 Lefschetz pencils. In this project we first determine vanishing cycles of holomorphic pencils on the four-torus. We further construct Lefschetz pencils on manifolds homeomorphic to total spaces of torus bundles over the torus. Recently, Gay and Kirby defined a trisection, which gives rise to a diagram describing a four-manifold. Trisections are related to stable mappings from four-manifolds to the plane. In analyzing stable mappings, Baykur and Saeki introduced a notion of simplified trisections and gave several examples of them. Relying on the theory of mapping class groups of surfaces, we give an algorithm to obtain diagrams associated with simplified trisections.
Notes	研究種目：若手研究(B) 研究期間：2014～2017 課題番号：26800027 研究分野：低次元トポロジー
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_26800027seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６８０００２７

研究課題名（和文）４次元多様体上の安定写像とそれを用いた４次元多様体の図示法の研究

研究課題名（英文）Topology of stable mappings and diagrams of four-manifolds

研究代表者
早野　健太（Hayano, Kenta）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・講師

研究者番号：２０７２２６０６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：期間中に得られた成果は主に以下の２つである。
切断を持つトーラス上のトーラス束の全空間が種数３のレフシェッツペンシルを持つことがわかっていたが、その消滅サイクルは知られていなかった。本研究では４次元トーラス上の正則なレフシェッツペンシルの消滅サイクルを決定し、さらにそれを用いてトーラス上のトーラス束と同相な多様体上のレフシェッツペンシルを構成した。
近年trisectionと呼ばれる、４次元多様体の新たな図示法が提案され、さらにその特別なクラスとして単純なtrisectionが定義された。本研究では単純なtrisectionの図式と写像類群との関係を明らかにし、またその図式の例を得る方法も与えた。

研究成果の概要（英文）：The results obtained in the project are followings.
It is known that total spaces of torus bundles over the torus with sections admit genus-3 Lefschetz pencils. In this project we first determine vanishing cycles of holomorphic pencils on the four-torus. We further construct Lefschetz pencils on manifolds homeomorphic to total spaces of torus bundles over the torus.
Recently, Gay and Kirby defined a trisection, which gives rise to a diagram describing a four-manifold. Trisections are related to stable mappings from four-manifolds to the plane. In analyzing stable mappings, Baykur and Saeki introduced a notion of simplified trisections and gave several examples of them. Relying on the theory of mapping class groups of surfaces, we give an algorithm to obtain diagrams associated with simplified trisections.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：安定写像　写像類群　消滅サイクル　trisection

１．研究開始当初の背景

(1) 4 次元多様体の研究はゲージ理論の出現により飛躍的な発展を遂げたが，一つの 4 次元位相多様体が持ち得る微分構造の分類問題 (植物学問題) を初めとする，4 次元多様体の全体像に関わる問題はほとんど解決されていない．近年曲面への安定写像の消滅サイクルと呼ばれる，写像の特異点集合の様子を反映する一般ファイバー内の単純閉曲線を用いて，4 次元多様体を表す図式がいくつか導入された．本研究代表者はこれらの図式が 4 次元多様体を統一的に扱う手法を与え得ると考え，写像のホモトピーにより消滅サイクルに起こる変化を調べそれを曲面の写像類群の言葉で記述した．さらにその応用として近年導入された 4 次元多様体の図式の新たな具体例を構成した．この結果は曲面への安定写像と曲面の写像類群との関係を明らかにする一方，消滅サイクルの解析には写像類群に由来する困難が伴うことを示唆している．

(2) 4 次元多様体から曲面への可微分写像，およびその消滅サイクル自体も興味深い対象である．例えば単純特異レフシェッツ束はレフシェッツ束の一般化として導入された near-symplectic 構造に適合する可微分写像であるが，レフシェッツ束と同様消滅サイクルを介して組み合わせ的に扱うことができる．本研究代表者はこの事実を用いてファイバーの種数が高々1 となる単純特異レフシェッツ束を許容する 4 次元多様体の分類問題を解決した．4 次元多様体から曲面への安定写像は他にも様々なものがあり，例えば引用文献①では全空間が単連結，モノドロミーが自明でファイバーが連結となる $\mathbb{R}^2$ への安定写像の全空間が分類されている．

２．研究の目的

(1) 4 次元多様体から $\mathbb{R}^3$ への安定写像を平面上のラベル付きグラフで記述する方法を与え，それを用いて 4 次元多様体の新たな図示法を確立する．さらに新たに導入する図式 2 つが同じ 4 次元多様体を表すとき，それらの図式がどのような変形で関係づけられるかを決定し，4 次元多様体を扱う新たな手法を与えることを目的とする．これまでの研究では 4 次元多様体を表すために，枠付き絡み目からなる Kirby 図式が用いられてきた．この図式は 4 次元多様体の構成には適しているが，枠付き絡み目自身が著しく複雑になり得るうえ，Kirby 図式から符号数などの位相不変量の決定が容易ではないため，植物学問題などの，位相不変量を見ながら 4 次元多様体を統一的に扱う必要のある問題には適していない．近年導入された曲面への安定写像に由来する図式も，写像類群に由来する複雑さを伴ってしまう．4 次元多様体の全体像を理解するという目的に対し，既存のものより適した図示法の確立を目指す．

(2) 研究代表者の単純特異レフシェッツ束などの研究における手法を駆使し，ファイバーの種数が高々1 となる，4 次元多様体から曲面への安定写像の分類問題にも取り組む．

３．研究の方法

(1) まず 4 次元多様体から $\mathbb{R}^3$ への安定写像の臨界値集合を平面上の図式で表す方法を与える．4 次元多様体から $\mathbb{R}^3$ への安定写像 (下の図式の f) に現れる特異点の，$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^2$ への生成的な射影 (下の図式の π) による像を平面上に描くことによりグラフを得る．このグラフ，および頂点や辺の上にある特異点の種類に関する情報から臨界値集合が復元できるということを示す．

$$\begin{tikzcd} X^4 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R} \\ & \mathbb{R}^2 & \end{tikzcd}$$

図式を得るために用いる写像

さらに臨界値集合を表すラベル付きグラフに f' のモノドロミーなどの情報を加えれば，$\mathbb{R}^3$ への写像 f を復元できることを確かめる．以上の議論で得られるであろう図式は f の定義域の 4 次元多様体を表しているとみなすことができる．この図式を単純にして扱いやすくするために，燕の尾の消去，カスプ特異点集合の変形などを施す．得られた図式から 4 次元多様体の位相不変量を決定するためには，4 次元多様体の符号数と $\mathbb{R}^3$ への安定写像の III^8 型の特異ファイバーの個数との関係についての結果などを用いる．

(2) まずファイバーの種数が高々1 で連結，モノドロミーが非自明である曲面への安定写像を分類すべく，①の手法と同様に臨界値集合を単純化する．次にチャート表示，組み合わせ群論の手法を用いてモノドロミー表現が満たすべき条件を見つける．この結果を用いて現れ得る全空間を全て決定する．モノドロミーが非自明なものが分類できればファイバーが非連結なものも考える．この際安定写像に対し，Stein factorization と呼ばれるファイバーの連結成分を 1 点に潰して得られる商空間を用いて，ファイバーが連結な場合に帰着させる．

４．研究成果

(1) まずこれまでの項目にも記載した，研究期間開始当初に予定していた研究について述べる．4 次元多様体から $\mathbb{R}^3$ への安定写像を考えることにより曲面の写

像類群に由来する困難は回避することができるが，その代わり逆像が円周になることによる困難が生じることが研究初期の段階で判明した．具体的には，臨界値集合の補空間の 2 次ホモトピー群が非自明な場合，その非自明な元の代表元による引き戻しとして現れる円周束は非自明になり得るが，全空間のトポロジーを決定するためには臨界値集合や一般ファイバーの情報に加え，この円周束の情報も見る必要がある．また一般の $\mathbb{R}^3$ への安定写像は (図式で表すことにより扱うには) 非常に複雑になり得るので，引用文献②，③のように安定写像自身を単純にしてから図式を得ることも考える必要があるが，研究期間内に $\mathbb{R}^3$ への安定写像を単純にするよい方法を提案することができなかった．

4 次元多様体から $\mathbb{R}^2$ への，ファイバーが連結でその種数が高々1 の安定写像の全空間を分類するためにそのモノドロミーの解析を試みたが，(制限された状況であるにも関わらず) そのモノドロミー表現は十分複雑になり得るため，これまでの手法だけでは分類は困難であることが判明した．また研究期間内に新たな手法を提案することもできなかった．

以上の理由から研究計画を当初のものから大幅に変更した．具体的には以下の研究を行い成果を得た (「研究の方法」の項目では以下の研究の方法には触れていないので，得られた成果とともにそれらを得た方法についても以下で簡単に触れる)．

(2) この項にある研究は浜田法行氏との共同研究である．引用文献④において，切断を持つトーラス上のトーラス束の全空間が種数 3 のレフシェッツペンシルを持つことが，代数幾何的な方法により示されている．この結果によりレフシェッツペンシルの存在は確認できるが，その (微分) 位相幾何学的な情報を特徴づける消滅サイクルは決定できていなかった．本研究ではまず 4 次元トーラス上の正則なレフシェッツペンシルの消滅サイクルを，その分岐被覆による構成を詳しく調べることにより決定した．またその組み合わせ的な性質も調べることにより，トーラス上のトーラス束の全空間と同相な多様体上の種数 3 のレフシェッツペンシルの族も構成した．さらに正則レフシェッツペンシルのモジュライ空間を調べることにより，4 次元トーラス上の正則レフシェッツペンシルの同型類が，その種数と可約度のみから決まることも示した．以上の結果は主な発表論文〔雑誌論文〕①にまとめられている．

(3) 引用文献②において，4 次元多様体を図示する新たな方法として trisection が導入された．これは 4 次元多様体から $\mathbb{R}^2$ への安定写像を用いて得られる図式で，Heegaard 図式とも関係があることから 3 次元トポロジーの観点からも注目されている概念である．また引用文献⑤では trisection を与える安定写像の中の特別なクラスとして，単純な trisection 写像が導入された．引用文献⑤では単純な trisection 写像を構成するアルゴリズムが与えられたが，その写像に対応する図式を得るには至っていなかった．そこで本研究では研究代表者がこれまでに得ていた，安定写像のホモトピーと曲面の写像類群との関係に関する結果を援用し，引用文献⑤で与えられたアルゴリズムにより得られる trisection の図式を得る方法を与えた．また図式により与えられた trisection が単純な trisection 写像から得られるための必要十分条件も与えた．この結果はプレプリント (引用文献⑥) にまとめられている．

＜引用文献＞

① Mahito Kobayashi, Osamu Saeki, Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint, Transaction of the American Mathematical Society, 348, no. 7, 1996, 2607–2636

② David T. Gay, Robion Kirby, Trisecting 4–manifolds, Geometry & Topology, 20, 2016, 3097–3132

③ Jonathan D. Williams, Uniqueness of surface diagrams of smooth 4–manifolds, preprint

④ Ivan Smith, Torus fibrations on symplectic four-manifolds, Turkish Journal of Mathematics, 25, no. 1, 2001, 69–95

⑤ Refik I. Baykur, Osamu Saeki, Simplified broken Lefschetz fibrations and trisections of 4–manifolds, preprint

⑥ Kenta Hayano, On diagrams of simplified trisections and mapping class groups, preprint

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Noriyuki Hamada, Kenta Hayano, Topology of holomorphic Lefschetz fibrations on the four-torus, Algebraic & Geometric Topology, 査読有，18, 2018, 1515–1572,
DOI：10.2140/agt.2018.18.1515

② Stefan Behrens, Kenta Hayano, Elimination of cusps in dimension 4 and its applications, Proceedings of the London Mathematical Society, 査読有, (3), 113, no. 5, 2016, 674–724,
DOI：10.1112/plms/pdw042

③ Refik İnanç Baykur, Kenta Hayano, Multisections of Lefschetz fibrations and topology of symplectic 4-manifolds, Geometry & Topology, 査読有, 20, no. 4, 2016, 2335–2395,
DOI：10.2140/gt.2016.20.2335

④ Ryushi Goto, Kenta Hayano, C^∞-logarithmic transformations and generalized complex structures, Journal of Symplectic Geometry, 査読有, 14, no. 2, 2016, 341–357,
DOI：10.4310/JSG.2016.v14.n2.a1

⑤ Kenta Hayano, Noboru Ito, A new aspect of the Arnold invariant J^+ from a global viewpoint, Indiana University Mathematics Journal, 査読有, 64, issue 5, 2015, 1343–1357,
http://www.iumj.indiana.edu/IUMJ/fulltext.php?artid=5641&year=2015&volume=64

〔学会発表〕（計１９件）

① 早野健太、On diagrams of simplified trisections and mapping class groups、Local and global study of singularity theory of differentiable maps、2017

② 早野健太、New counterexamples to Stipsicz's conjecture on fiber-sum indecomposable Lefschetz fibrations、Four Dimensional Topology、2017

③ Kenta Hayano、Construction of Lefschetz fibrations and pencils via mapping class groups、Boston University/Keio University workshop、2017

④ 早野健太、Topology of holomorphic Lefschetz pencils on the four-torus、Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2017、2017

⑤ 早野健太、Hurwitz equivalence for Lefschetz fibrations with multisections、Hurwitz action 6、2016

⑥ 早野健太、Topology of Lefschetz pencils on symplectic Calabi-Yau 4-manifolds with positive b_1、リーマン面に関連する位相幾何学、2016

⑦ Kenta Hayano、Topology of holomorphic Lefschetz pencils on the four torus、The 4th Workshop "Complex Geometry and Lie Groups"、2016

⑧ 早野健太、Uniqueness of holomorphic Lefschetz pencils on the four torus、Differential Topology 16、2016

⑨ 浜田法行、早野健太、Topology of holomorphic Lefschetz pencils on abelian surfaces、日本数学会 2016 年度会、2016

⑩ 早野健太、On monodromies of holomorphic Lefschetz pencils on the four torus、接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺、2016

⑪ 早野健太、Topology of holomorphic Lefschetz pencils on abelian surfaces、Hurwitz action 5、2016

⑫ Kenta Hayano、Lefschetz fibrations and mapping class groups、Japanese Australian workshop on Real and Complex Singularities 6th、2015

⑬ 浜田法行、早野健太、On monodromies of genus-3 Lefschetz pencils on the four torus、日本数学会 2015 年度秋季総合分科会、2015

⑭ 早野健太、Hurwitz equivalence for fibration structures on 4-manifolds、Extended KOOK seminar 2015、2015

⑮ Refik İnanç Baykur、早野健太、Multisections of Lefschetz fibrations and topology of symplectic 4-manifolds、日本数学会 2015 年度会、2015

⑯ Kenta Hayano、Multisections of Lefschetz fibrations and topology of symplectic 4-manifolds、The tenth east asian school of knots and related topics、2015

⑰ 早野健太、Multisections of Lefschetz fibrations and topology of symplectic 4-manifolds、Four Dimensional Topology、2014

⑱ Kenta Hayano、Multisections of Lefschetz fibrations and mapping class groups of surfaces、The 2nd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities、2014

⑲ Kenta Hayano、Multisections of Lefschetz fibrations and mapping class groups of surfaces、13th International Workshop on Real and Complex Singularities、2014

〔その他〕ホームページ
http://www.math.keio.ac.jp/~k-hayano/index_jp.html

６．研究組織

(1) 研究代表者

早野　健太（HAYANO, Kenta）
慶應義塾大学・理工学部・講師
研究者番号：２０７２２６０６