慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	EMHDとそれに関連する自由境界問題の数学解析
Sub Title	Mathematical analysis of free boundary problems in EMHD and related topics
Author	谷, 温之(Tani, Atsushi) 井口, 達雄(Iguchi, Tatsuo) 野寺, 隆(Nodera, Takashi) 伊藤, 茂治(Ito, Shigeharu) 田中, 尚人(Tanaka, Naoto) 伊藤, 弘道(Ito, Hiromichi) 梅原, 守道(Umehara, Morimichi)
Publisher	
Publication year	2017
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2016.)
JaLC DOI	
Abstract	EMHDとその関連分野における非線形問題, 自由境界問題の適切性を数学解析面から研究した。具体的研究成果の一部を記す。(1) 圧縮性Navier- Stokes方程式に対する古典的MHD2相自由境界問題の時間局所古典解の一意存在を考察した。(2) ガス放電現象に対するDegon-Lucquin-Desreux- Morrowモデル方程式の時間局所一意強可解性を証明した。(3) Hele-Shaw問題に関して, 表面張力効果なし2相問題の時間局所古典解存在を放物型正則化問題経由で証明した。(4)大気/海洋2相primitive方程式系の自由境界問題に対する時間局所一意強可解性を証明した。 Well-posedness of various nonlinear and free boundary problems in EMHD and its related fields was established mathematically. Some of the research results are as follows. (1) Free boundary problem for two-phase classical MHD for viscous and compressible fluids has been studied and proved to admit a unique local-in-time classical solution. (2) In the phenomenon of gas discharge the model system of PDEs due to Degon, Lucquin, Desreux and Morrow are investigated mathematically and established its unique solvability locally in time. (3) The fingering pattern of radially growing interface in a Hele-Shaw cell was shown in the framework of Hoelder spaces under surface tension effect on the interface between the displacing and displaced fluids taken into account through the parabolic regularization method. (4) Free boundary problem for two-phase, atmosphere and ocean, primitive equations has discussed and shown the existence of a unique strong solution locally in time.
Notes	研究種目 : 基盤研究(C)(一般) 研究期間 : 2014 ~ 2016 課題番号 : 26400176 研究分野 : 非線型解析学, 数理物理学
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_26400176seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２９　年　　６　月　　１　日現在

機関番号：　３２６１２
研究種目：　基盤研究(C)（一般）
研究期間：　2014～2016
課題番号：　２６４００１７６

研究課題名（和文）EMHDとそれに関連する自由境界問題の数学解析

研究課題名（英文）Mathematical Analysis of Free Boundary Problems in EMHD and Related Topics

研究代表者
谷　温之（Tani, Atusi）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・名誉教授

研究者番号：９０１１８９６９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：EMHDとその関連分野における非線形問題，自由境界問題の適切性を数学解析面から研究した．具体的研究成果の一部を記す．
(1)圧縮性Navier-Stokes方程式に対する古典的MHD2相自由境界問題の時間局所古典解の一意存在を考察した．(2)ガス放電現象に対するDegon-Lucquin-Desreux-Morrowモデル方程式の時間局所一意強可解性を証明した．(3) Hele-Shaw問題に関して，表面張力効果なし2相問題の時間局所古典解存在を放物型正則化問題経由で証明した．(4)大気/海洋2相primitive方程式系の自由境界問題に対する時間局所一意強可解性を証明した．

研究成果の概要（英文）：Well-posedness of various nonlinear and free boundary problems in EMHD and its related fields was established mathematically. Some of the research results are as follows. (1) Free boundary problem for two-phase classical MHD for viscous and compressible fluids has been studied and proved to admit a unique local-in-time classical solution. (2) In the phenomenon of gas discharge the model system of PDEs due to Degon, Lucquin, Desreux and Morrow are investigated mathematically and established its unique solvability locally in time. (3) The fingering pattern of radially growing interface in a Hele-Shaw cell was shown in the framework of Hoelder spaces under surface tension effect on the interface between the displacing and displaced fluids taken into account through the parabolic regularization method. (4) Free boundary problem for two-phase, atmosphere and ocean, primitive equations has discussed and shown the existence of a unique strong solution locally in time.

研究分野：　非線型解析学，数理物理学

キーワード：　free boundary problem　Navier-Stokes equations　Hele-Shaw problem　EMHD　primitive equations　film approximation　drift wave turbulence　gas discharge

１．研究開始当初の背景

自然界における諸現象は，多くの場合観測，実験等を通して，その数学モデルを構築し，その数学解析を通して解明される．本研究の目的は，現象の根源に位置する最も一般的かつ厳密な数理物理学理論に基づく数理モデルを数学解析することにある．自然現象を連続体近似した媒質の運動は，その媒質が，気相，液相，固相に関わらず，すべて３つの保存則(質量，運動量，エネルギー)により記述される．気・液相と固相とでは記述するのに用いる物理量が異なるだけである．帯電連続体媒質の電磁場中の運動 (宇宙物理学，プラズマ物理学等においてはそれが常態である) を記述する最も一般的モデル方程式系は，electro-magneto-hydrodynamics(EMHD)とよばれ，Eringen-Maugin，Dulikravich 等により導出された．それには，熱力学場と電磁場に consistent な一般構成方程式が含まれていて，その一般性の度合により非線形度が決定される．すなわち，よく知られている magneto-hydrodynamics(MHD)，electro-hydrodynamics(EHD)のモデル方程式系は，EMHD のモデル方程式のスペシャルケースと考えられる．しかし，現在流布している MHD，EHD のモデル方程式系はそうなっていない．本研究では，従来の MHD，EHD 方程式に対して議論するとともにより根源的な EMHD 方程式および EMHD のスペシャルケースとしての MHD，EHD 方程式に対して数学解析的に研究する．

(1) 電磁場の作用のない連続体基礎方程式系に対する自由境界問題．古典的 Stefan 問題，渦なし水の波の運動，渦を伴う水の波の運動，連続体基礎方程式系に対するに対する自由境界問題，流体現象を伴う Stefan 問題等．

(2) 電磁場の作用下での連続体基礎方程式系の自由境界問題．

２．研究の目的

本研究は，気体の基礎方程式系である Euler 方程式，液体の基礎方程式系である Navier-Stokes 方程式，固体の基礎方程式系である (粘)弾性方程式を統合した連続体基礎方程式系及びそれらから派生する方程式，例えば，気象学の基礎方程式系である primitive equations，遅い流れのモデル方程式である Hele-Shaw 流方程式，非線型音響学における基礎方程式等々を対象として，これら非線形偏微分方程式(系)に対する電磁場作用のある場合と共に，作用のない場合をも含めた数学解析を行うことを目的とする．これらに関連する研究は物理学，数値解析分野では数多くなされているが，数学解析的研究は国内外ともにまだ少ない．流体の自由境界問題，流れを伴う Stefan 問題，相転移問題の各分野で研究成果をあげているのは，代表者の周辺以外に未だないのが現状である．「自由境界問題と多相問題」をキーワードに，次に述べる具体的項目を研究対象とする．

(1) EMHD 自由境界問題 ((非)圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対して数学解析)，
(2) 従来の MHD，EHD 自由境界問題 ((非)圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対して数学解析)，
(3) Tokamak 内の resistive wave turbulence に対する自由境界問題，
(4) 気体放電現象におけるモデル方程式の数学解析，
(5) 固相/固相自由境界問題 ((粘)弾性方程式の亀裂伸展問題 (亀裂伸展を自由境界と解釈する)の解析)，
(6) 気相/液相自由境界問題 (蒸発現象を考慮した大気・海洋 primitive 方程式の解析)，
(7) 液相/固相自由境界問題 (generalized or modified Stefan 問題の解析)，
(8) Hele-Shaw 流に対する解析，
(9) 非線形音響学における基礎方程式の数学解析とそのモデル化の数学的正当性，
(10) 薄膜近似方程式の数学解析とその近似の数学的正当性，
(11) その他の非線形問題の解析．

上記各項目は相互関連性が深いため，統合的横断的に研究することを目的とする．

３．研究の方法

自然現象は相互に関連して起こっている．個別の問題を個別に議論することの重要性は当然であるが，より興味ある研究課題は「それらの相互関係を確立する」ことである．それら重要な非線形問題は諸方面から種々の方法を用いて解明されなければならないが，最終的には exact な数学解析がなされることが望ましい．本研究課題に対する研究方法は，そのような方針に基づき，数学解析理論（偏微分方程式論），物理学理論，rational mechanics theory，数値解析等を有機的に統合して問題の解決に当たる．そのため，研究代表者の研究経歴と各分担者の研究実績を踏まえ，研究計画を立案した．併せて，世界的に著名な研究者 5 名 (V.A. Solonnikov (Steklov 数学研究所，St. Petersburg, Russia)，V.V. Pukhnachev，A.M. Khludnev (Lavrentiev 流体研究所，Novosibirsk, Russia)，M.M. Lavrentiev Jr. (Novosibirsk 大学，Novosibirsk，Russia)，K.R. Rajagopal (Texas A&M 大学，USA)) を海外研究協力者として加えた．彼らとの研究活動の連携は本研究課題の遂行，進展だけではなく，将来この分野を担う若手研究者の育成にも期待できる．

４．研究成果

(1) EMHD 自由境界問題 ((非)圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対して数学解析)：
圧縮性粘性電磁気流体に対する自由境界問題のヘルダー解の時間局所一意存在証明がほゞ完了し，現在論文執筆準備中である．我々の結果は，この問題についての世界最初の結果であり，注目に値する．

(2) 従来の MHD, EHD 自由境界問題 ((非)圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対して数学解析):
圧縮性粘性磁気流体に対する自由境界問題のヘルダー解の時間局所一意存在結果を現在執筆中である．既に国際会議でこの結果は報告済みで，その当時から高評価を得ていて，論文公刊が待たれている．
(3) Tokamak 内の resistive wave turbulence に対する自由境界問題:
抵抗性ドリフト波乱流の 2 粒子モデル方程式である Hasegawa-Wakatani 方程式に対する初期-境界値問題の適切性を，解空間がステパノフの意味での概周期関数である場合に証明した．この結果は世界最初の結果である．同方程式に対する自由境界問題，トーラスでない一般領域 (角のある領域を含む) および Hasegawa-Wakatani 方程式より高位のモデル方程式に対する研究を進めている．
(4) 気体放電現象におけるモデル方程式の数学解析:
Degond, Lucquin, Desreux, Morrow により提案された気体放電現象におけるモデル方程式に対する初期–境界値問題の時間局所強解の一意存在を証明した．さらに，外部電圧をパラメターとして，定常解の安定性，不安定性を証明した．現在，解の分岐に関して研究続行中である．この現象に関する数学解析は世界最初の結果である．
(5) 固相/固相自由境界問題 ((粘)弾性方程式の亀裂伸展問題 (亀裂伸展を自由境界と解釈する)の解析):
非貫通条件下での非線形弾性体の小ストレイン極限に関する結果，および 2 次元斉次等方的線形弾性体内部の特異性を調べた．両結果とも高評価を得ている．3 次元，(粘)弾性方程式の exact 境界条件下での 2 相問題，亀裂進展問題の解析が進行中である．それらの空間 2 次元問題の解析方法と Hele-Shaw セル中の流れに対する方法とは共通点を持っているので，非ニュートン流体に対する Hele-Shaw 問題，ベキ則(粘)弾性体に対する亀裂問題について考察中である．
(6) 気相/液相自由境界問題 (蒸発現象を考慮にいれた大気・海洋 primitive 方程式の解析):
数値気象予報の基礎方程式である大気，海洋の各モデル方程式，primitive equation，の自由境界問題に対する適切性の証明とそれらの解成分のうち，温度，湿度，塩分濃度の最良有界評価を求めた．さらに，大気/海洋 2 相モデル方程式の自由境界問題の時間局所適切性に関する結果の一部は公刊済で，現在フルパーパーが公刊待である．Primitive equation の自由境界問題の数学解析は世界初の結果である．現在時間大域解に関する論文を執筆中である．さらに，この基礎方程式導出の正当性について考察している．
(7) 液相/固相自由境界問題 (generalized or modified Stefan 問題の解析):
generalized or modified Stefan 問題，あるいは相転移現象モデル方程式の定式化，特に境界条件，が物理学的に正しくない形でなされ，その数学議論が展開されている．流体運動を伴う generalized or modified Stefan 問題が物理学的に consistent な境界条件の下でヘルダー連続な一意解を持つ結果に関する論文を現在執筆している．
(8) Hele-Shaw 流に対する解析:
Hele-Shaw セル中の fingering 現象に対して，ニュートン流体運動に境界濡れ効果を取入れた自由境界問題の弱非線形解析を行った．この問題の simple case に対する非線形数学解析を，準定常近似法を用いて行った．Hele-Shaw 問題の複素関数論を用いた結果は多数あるが，偏微分方程式論に基づく結果は少ない．1, 2 相問題を表面張力効果の有無の場合を含め順次論文を執筆中である．ヘルダー解空間での exact な結果は少なく，我々の結果は特筆に値し，世界中から注目されている．さらに，境界濡れ効果，normal stress effect を取入れた自由境界問題の非線形数学解析が現在進行中である．
(9) 非線形音響学における基礎方程式の数学解析とそのモデル化の数学的正当性:
圧縮性粘性流体方程式を小 Mach 数と小音響 Reynolds 数の仮定の下で近似して導かれた非線形音響学における基礎方程式を，近似方程式の数学的正当性を確立する立場から，修正し，音響学的圧縮性粘性流体方程式と非線形音響学修正基礎方程式の時間大域一意解の存在と近似の数学的正当性を証明した．この結果は世界初の結果である．
(10) 薄膜近似方程式の数学解析とその近似の数学的正当性:
斜面を下る非圧縮性粘性流体の薄膜近似の正当化を念頭に置き，無次元化した基礎方程式系の解のフィルムパラメーターに関する一様評価を，２次元流，液膜表面上での表面張力作用の仮定の下で，導出した．ただし，Reynolds 数，斜面の傾斜角，初期値が十分小さいと仮定した．さらに，斜面を下る非圧縮性粘性流体の薄膜近似としての Burgers 方程式，４階の消散項，3 階の分散項をともなった Burgers 方程式の数学的正当化を与えた．ただし，ここでも上と同様，２次元流を考え，Reynolds 数，斜面の傾斜角，初期値は全て十分小さいとしている．この幾何学的設定の下での薄幕近似に対する結果は初めての結果である．
(11) その他の非線形問題の解析:
Synchronization のモデル方程式である Kuramoto-Sakaguchi 方程式に対する初期-境界値問題の解の存在性，一意性，解析性について，振動数分布関数のサポートが非有界であるときに調べた (論文刊行済)．振動数分布関数のサポートが非有界の場合は，Boltzmann 方程式の場合と同様，一般に難しい．Kuramoto-Sakaguchi 方程式に対しては

最初の結果である．さらに，この方程式に関する定常解，dynamical system としての結果を得ている．現在 Synchronization における基礎方程式(Kuramoto- Sakaguchi 方程式以外の)導出について考察中である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 26 件）

① H. Honda, A. Tani, Mathematical analysis of synchronization from the perspective of network science. 査読有, Mathematical Analysis on Continuum Mechanics and Industrial Applications, Proc. Intern. Conf. CoMFoS15 (Eds. H. Itou, M. Kimura, V. Chalupecky, K. Ohtsuka, D. Tagami and A. Takada). Mathematics for Industry, 26 (2017), 219--228. Springer.

② A. Tani, H. Tani, Classical solvability of the two-phase radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell. 査読有, In: Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future, (Eds. Y. Shibata and Y. Suzuki). Springer Proc. Math. Stat. 183 (2016), 317--348.

③ S. Kondo, A. Tani, Initial boundary value problem for model equations of resistive drift wave turbulence with Stepanov-almost-periodic initial data, 査読有, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., 16 (2016), 291--333.

④ H. Ueno, T. Iguchi, A mathematical justification of a thin film approximation for the flow down an inclined plane, 査読有, J. Math. Anal. Appl., 444 (2016), 804--824.

⑤ H. Ueno, A. Shiraishi, T. Iguchi, Uniform estimates for the flow of a viscous incompressible fluid down an inclined plane in the thin film regime. 査読有, J. Math. Anal. Appl., 436 (2016), 248-287.

⑥ D. Togashi, T. Nodera, GKB-GCV Method for Solving Generic Tikhonov Regularization Problems, 査読有, GSTF JMSR, 3 (2016), 53-58.

⑦ Y. Hashimoto, T. Nodera, Inexact shift-invert Arnoldi method for evolution equations, 査読有, ANZIAM J., 57 (2016), E1-E27.

⑧ N. P. Lazarev, H. Itou, N. V. Neustroeva, Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle, 査読有, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 33 (2016), 63-80.

⑨ H. Itou, A. M. Khludnev, On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies, 査読有, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 39 (2016), 4980-4993.

⑩ M. Umehara, Global existence of the spherically symmetric flow of a self-gravitating viscous gas, In: Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, 査読有, Eds.: S. Ei, S. Kawashima, M. Kimura and T. Mizumachi, 515-522, Adv. Stud. Pure Math., 64, Math. Soc. Japan, 2015.

⑪ H. Honda, A. Tani, Some boundedness of solutions for the primitive equations of the atmosphere and the ocean, 査読有, ZAMM 95 (2015), 38-48.

⑫ M.M. Lavrentiev Jr., R. Spigler, A. Tani, Existence, uniqueness, and regularity for the Kuramoto--Sakaguchi equation with unboundedly supported frequency distribution, 査読有, Diff. Integr. Eq. 27 (2014), 879-892.

〔学会発表〕（計 67 件）

① 谷温之, Nonlinear Acoustics I, II, 現象解析特別セミナー第 11 回, 2017 年 3 月 15, 17 日, 茨城大学 (茨城県, 水戸市)

② H. Itou, On Reconstruction of a Cavity In a Three Dimensional Linearized Visco-elasticity from Transient Boundary Data, 2nd East Asia Section of IPIA-Young Scholars Symposium, November 5, 2016, The National Center for Theoretical Sciences (NCTS) (Taipei, Taiwan).

③ T. Iguchi, A mathematical justification of the thin film approximation for the flow down an inclined plane, Workshop on Mathematical Sciences, Wayamba Univrsity, August 21, 2016 (Wayamba, Sri Lanka).

④ T. Iguchi, Variational methods and the Isobe-Kakinuma model for water waves, Journees Jeunes EDPistes francais 2016, Institut de Mathematiques de Bordeaux, March 22, 2016 (Bordeaux, France).

⑤ A. Tani, Classical solvability of the two-phase radial viscous fingering

problem in a Hele-Shaw cell, VIII International Conference "Lavrentyev Readings on Mathematics, Mechanics and Physics", September 11, 2015, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics (Nobosivirsk, Russia).

⑥ A. Tani, Classical solvability of radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell with surface tension, International Conference "Differential Equations and Mathematical Modelling", June 24, 2015, East-Siberian State University of Technology and Management (Ulan-Ude, Russia).

⑦ H. Itou, On reconstruction of a welding area by means of the enclosure method using a single measurement, May 28, 2015, Applied Inverse Problems (AIP2015), Helsinki University Helsinki, Finland).

⑧ T. Iguchi, Solvability of a model system for water wave to a model system for water waves, Oberwolfach Workshop: Mathematical Theory of Water Waves, April 17, 2015, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, (Oberwolfach, Germany).

⑨ M. Umehara, On a one dimensional motion of a viscous heat-conducting and self-gravitating gas, Recent development of mathematical fluid dynamics and hyperbolic conservation laws, March 26, 2015, Nation. Inst. Math. Sci. (Daejeon, Korea).

⑩ U. Yokota, T. Nodera, "Practical use of nonlinear GMRES for solving unconstrained optimization, CTAC 2014, December 1, 2014, Australian National University (Canbera, Australia)

⑪ A. Tani, H. Tani, Classical solvability of the two-phase radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell. International Conference on Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future, November 11, 2014, Waseda University (Tokyo, Japan).

⑫ A. Tani, Classical solvability of the radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell, Classical Problems and New Trends in Mathematical Fluid Dynamics, October 2, 2014, University of Ferrara (Ferrara, Italy).

⑬ A. Tani, Small-time solvability of primitive equations of the coupled atmosphere and ocean, 7th International Conference on Mathematical Modelling, June 30, 2014, North-Eastern Federal University (Yakutsk, Russia).

⑭ A. Tani, Small-time solvability of primitive equations of the coupled atmosphere and ocean, Progress in Nonlinear Partial Differential Equations, May 29, 2014, University of Lisbon (Lisbon, Portugal).

〔図書〕（計 1 件）
H. Itou 他, Springer Singapore, Mathematical Analysis of Continuum Mechanics and Industrial Applications -Proceedings of the International Conference CoMFoS15-, 2017, 213.
〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
谷 温之 （TANI Atusi）
慶應義塾大学・理工学部・名誉教授
研究者番号：90118969

(2)研究分担者
井口 達雄 （IGUCHI Tatsuo）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号： 20294879

野寺 隆 （NDERA Takashi）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号： 50156212

(3)連携研究者
伊藤 茂治 （ITOH Sigeharu）

弘前大学・教育学部・教授
研究者番号：40193487

田中 尚人　(TANAKA Naoto)
福岡大学・理学部・教授
研究者番号：00247222

伊藤 弘道　(ITOU Hiromichi)
東京理科大学・理学部第二部・専任講師
研究者番号：30400790

梅原 守道　(UMEHARA Morimichi)
宮崎大学・工学部・准教授
研究者番号：40532164