慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	相分離界面に関連した長距離相関を持つ確率場の研究
Sub Title	Study on random fields with long range correlations related to phase separating interfaces
Author	坂川, 博宣(Sakagawa, Hironobu)
Publisher	
Publication year	2017
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2016.)
JaLC DOI	
Abstract	本研究では相分離界面や細胞膜などの数学的な解析を目指し, 関連した長距離相関を持つ確率場の研究を行った。特に確率界面モデルの一つであるΔφモデルに対し以下の結果を得た。(1) 3次元以下の場合に場が常に正となる確率の評価を与え, その挙動が高次元の場合や他の界面モデルと比べて大きく変わることを示した。(2) 2次元以上の場合に場にピンニング効果を加えるとその強さによらず対応する自由エネルギーが常に正となり場が常に局在化することを示した。 In this research, we studied several random fields with long range correlations for mathematical analysis of phase separating interfaces and membranes. In particular, we considered the Δφ interface model and obtained the following results : (1) We give an estimate on the probability that the field stays positive in low dimensions and its behaviors differ greatly from those of the higher dimensional case or other random interface models. (2) We show that in the case of two or more dimensions, once we impose weak pinning potentials the field is always localized in the sense that the corresponding free energy is always positive.
Notes	研究種目 : 基盤研究(C)(一般) 研究期間 : 2014 ~ 2016 課題番号 : 26400147 研究分野 : 確率論
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_26400147seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２９　年　　５　月　２４　日現在

機関番号：　３２６１２
研究種目：　基盤研究(C)（一般）
研究期間：　2014～2016
課題番号：　２６４００１４７

研究課題名（和文）相分離界面に関連した長距離相関を持つ確率場の研究

研究課題名（英文）Study on random fields with long range correlations related to phase separating interfaces

研究代表者

坂川　博宣（SAKAGAWA, Hironobu）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・准教授

研究者番号：６０３４８８１０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では相分離界面や細胞膜などの数学的な解析を目指し，関連した長距離相関を持つ確率場の研究を行った．特に確率界面モデルの一つである$\Delta\phi$モデルに対し以下の結果を得た．
(1) 3次元以下の場合に場が常に正となる確率の評価を与え，その挙動が高次元の場合や他の界面モデルと比べて大きく変わることを示した．(2) 2次元以上の場合に場にピンニング効果を加えるとその強さによらず対応する自由エネルギーが常に正となり場が常に局在化することを示した．

研究成果の概要（英文）：In this research, we studied several random fields with long range correlations for mathematical analysis of phase separating interfaces and membranes. In particular, we considered the $\Delta\phi$ interface model and obtained the following results:
(1) We give an estimate on the probability that the field stays positive in low dimensions and its behaviors differ greatly from those of the higher dimensional case or other random interface models.
(2) We show that in the case of two or more dimensions, once we impose weak pinning potentials the field is always localized in the sense that the corresponding free energy is always positive.

研究分野：　確率論

キーワード：　界面モデル　相転移　Gauss場　Gibbs測度　自由エネルギー

１．研究開始当初の背景

統計物理に興味を持つ国内外の確率論研究者の間で近年盛んに研究が行われている相分離の確率モデルとして∇φモデル，Δφモデルが挙げられる．これらは実効的界面モデルと呼ばれ，界面の高さを表す変数φに対し相互作用が∇φ，Δφから定まるようなｄ次元格子上のGibbs確率場として定式化される(∇φ，Δφはそれぞれ離散 gradient, 離散 Laplacian を表す)．∇φモデルでは２点間の高さの差からエネルギーが定まり，物理的にはこれは相分離界面のモデルに対応する．またΔφモデルでは雑に言って系のエネルギーが界面の曲率から定まり，これは膜のモデルと考えられる．これらのモデルは例えば Ising モデルと比べても更に単純化されたものではあるが，一方で系のエネルギーの高さに対する平行移動不変性など期待される物理的特徴を十分に備えており，特に∇φモデルでは相互作用ポテンシャルが２次関数の場合はｄ次元格子上の零質量Gauss確率場となる．このことから∇φモデルは当初は統計力学における場の理論の研究で現れ，１９７０~８０年代に研究がなされていた．その後 Gauss 確率場やランダムウォークの研究の発展にも関連して１９９０年代後半から確率論的および解析学的ないろいろな解析手法が開発されその研究が活発となった．近年では２次元において＋と－の２つの境界条件をつけた場合に現れる高さ０のレベルの曲線のスケール極限が，パラメーター4 の Schramm-Loewner 方程式(SLE(4))に収束することが示されるなど確率論や統計力学の様々な問題と密接に関係して非常に活発に研究が行われている状況であった．

２．研究の目的

∇φモデルやΔφモデルの大きな特徴として場の相関関数の減衰が多項式オーダーであり長距離相関を持つことが挙げられるが，これによって場が独立，もしくは相関関数が指数的減衰を示すような場合とは異なる様々な現象が現れる．本研究ではこれらの確率場に対し，大数の法則，中心極限定理，大偏差原理といった確率論の極限定理などを通して相分離界面や細胞膜に関する様々な物理現象の本質を数学的に理解することと同時に長距離相関を持つ確率場の解析に対する新たな数学手法と数学理論の開発を行うことを目指した．

本研究で取り扱うモデルは実際の現象を大きく単純化したものではあるが，それ故に数学的に厳密に扱うことが可能であり，相分離界面や細胞膜に現れる様々な現象に対し数学的に厳密な論証に基づいて確固たる裏づけを与えることは極めて重要なことである．また長距離相関を持つ確率場に対しては様々な極限定理が多くの場合非自明であり，確率界面モデルを題材にこれらを示すことは数学的にも価値のあることだと考えられる．

３．研究の方法

∇φモデルやΔφモデルといった長距離相関を持つ確率場に対し，様々な外場を加えた時の場の漸近挙動を調べることが主要な研究内容であった．

まず∇φ界面モデルは相互作用エネルギーが隣り合った２点間の変数の差から定まるので，格子上の Markov 場となり，大きく分けて確率場の研究のひとつとみなせる．特に相互作用ポテンシャルが２次関数の場合はｄ次元格子上の零質量Gauss場として与えられることからこの場合は 1970 年代から場の理論でも研究されており，そこでは自己ポテンシャルを加えた場合における相関関数のランダムウォーク表現や鏡映正値性，各種の相関不等式といった手法が開発されている．これに加えて最近の∇φ界面モデルの解析で種々の確率論的手法が編み出されており，これらの数学および厳密統計力学の両面からの道具を通して解析を行うことが主な研究方法となる．

一方でΔφモデルでは∇φモデルのような単純な最近接相互作用ではなく，３つ以上の変数から相互作用ポテンシャルが定まるため，単純な Markov 性は成立せず，距離２以上の幅をもって条件付けた時のみ場の Markov 性が成立する．更に大きな特徴として相互作用が強磁性的ではないため，FKG 不等式や Griffith 不等式などの相関不等式や相関関数のランダムウォーク表現といった∇φ界面モデルにおける主要な解析的道具の多くがそのままでは成立せず対応する手法の整備がまだ不十分である．ただポテンシャルが２次関数の場合はｄ次元格子上のある種の特別な相関関数を持つ Gauss 場にはなるので，Gauss 場に対する不等式などの確率論的手法はある程度利用可能であるがこれらだけでは全く不十分であり新たな数学的手法の開発が求められる．

４．研究成果

これまでの研究では十分に分かっていなかった低次元におけるΔφ界面モデルの挙動に関して大きく分けて２つの成果を得た．具体的には以下のとおりである．

（１）Δφ界面モデルに対し場を正に条件付けた下での場の挙動に関する問題を考える．この問題はエントロピー的反発と呼ばれる現象に関連しておりこれまでに∇φ界面モデルに対しは様々な研究がなされている．Δ

φモデルに対しては研究代表者坂川が以前に与えた高次元の場合の部分的な結果(2003)に続いて，Kurt(2008，2009)によって4次元以上の場合は完全に解決され，更にはCipriani(2013)によって対応する4次元格子上のGauss場の最大値の精密な評価がなされていたが，3次元以下の場合は未解決であった．これに対し，系がGauss的な3次元以下のΔφモデルでは，境界から離れた領域において場が常に正となる事象が考えている系のサイズに依らずに一様に正の確率で起こるということを証明した．∇φモデルでは対応する確率が系のサイズを無限大とする極限を取った時に0に収束することが知られているが，それと比べて大きく異なる現象である．これは低次元でのΔφモデルでは場のｓ相関と揺動が非常に大きいということを反映している．特にΔφ界面モデルに対し場を正に条件付けた時，4次元以上では場が大きく上方に押し上げられるエントロピー的反発と呼ばれる現象が起こることがこれまでに証明されていたが，得られた評価は3次元以下ではエントロピー的反発は起こらないことを示している．証明の鍵となる手法としてΔφモデルに関連した別のGauss場に対する最近の研究で用いられた離散フーリエ解析の方法を援用した．

また，系がGauss的ではなく一般の相互作用ポテンシャルを持つ場合についても考え，1次元の場合はHryniv-Velenik(2009)によって証明されたΔφモデルに対する関数型中心極限定理を応用することで対応する確率が一様に正となることを証明した．

（2）Δφ界面モデルにおいて場を正に条件付けるのとは逆に場を高さ0のレベルに引き付けるような自己ポテンシャル（ピンニング効果）を加えた場合の挙動について考える．この問題に関しては1次元の場合はCaravenna-Deuschel(2008，2009)によってピンニングの強さに応じて場の局在/非局在が変わる相転移が起こることが証明され，4次元以上ではピンニングの強さに関わらず場が常に局在化することを以前(2012)に研究代表者坂川が証明していたが，2，3次元の場合は未解決であった．これに対し，Δφモデルにおいてピンニング効果を加えた場合は2次元以上ではピンニングの強さに関わらず常に場が局在化することをピンニング効果を加えた場合の場の自由エネルギーが常に正となるということを示すことで証明できた．対応する∇φモデルの問題では任意の次元でピンニングの強さによらない局在化が起こることが証明されており，3次元以上の場合はΔφモデルと∇φモデルの比較から類推される結果であるがこれまでは多くの技術的な問題によって厳密な証明がなされていなかった．また，2次元で常に局在化されることは全く非自明な結果である．更には，ピンニング効果と同時に場を正の方に押しやる反発的なポテンシャルを加えた場合についても考え，この場合は5次元以上では常にピンニング効果が勝って場が局在化することを証明した．これらの結果は論文にまとめ現在投稿中である．

続いて考えられる重要な問題として，ピンニング効果を加えた下で局在化が起こることを自由エネルギーだけでなく場の性質を示すことで表現することが考えられる．具体的には分散の一様評価や場の相関が長距離相関から指数的減衰に変化することの証明が期待されるが，現在のところごく最近Bolthausen-Cipriani-Kurt(2017)によって5次元以上で場の相関の指数的減衰の評価が与えられているのみである．4次元以下の場合にこれらの証明を与えることは今後の大きな課題のひとつである．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）

① Hironobu Sakagawa,
On the probability that Laplacian interface models stay positive in subcritical dimensions,
RIMS Kokyuroku Bessatsu B59，p.273–288 (2016)，査読有．

〔学会発表〕（計　2　件）

① 坂川　博宣,
Localization of a Gaussian membrane model with weak pinning potentials,
無限粒子系、確率場の諸問題XII，2017年 1月21日，奈良女子大学（奈良県・奈良市）

② 坂川　博宣,
On the probability that Laplacian interface models stay positive in subcritical dimensions,
14th International symposium: Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems，2015年10月29日，京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）．

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
無し

６．研究組織

(1)研究代表者

坂川　博宣（SAKAGAWA, Hironobu）
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：60348810

(2)研究分担者

該当なし

(3)連携研究者

該当なし

(4)研究協力者

該当なし