Title	シンプレクティック構造の変形とそのユニタリー表現論への応用
Sub Title	A deformation of symplectic structures and its application for unitary representations
Author	池田, 薫(Ikeda, Kaoru)
Publisher	
Publication year	2019
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2018.)
JaLC DOI	
Abstract	簡約Lie群の既約ユニタリー表現の一般的な構成法の確立に向けて研究を行った. Gを簡約Lie群PをGの放物型部分群とし旗多様体X=G/Pを考える. XはWeyl群Wでパラメトライズされた開被覆で覆われる. さてBをPに含まれるBorel部分群とする. bをBのLie環とする. Λをshift operaterとする. GのLie環gのaffaine部分空間LaxをΛ+bで定義する. Xの元umodPに対してLaxの元をコンパニオン埋め込みにより定義したtarget空間によるσモデルを考えた。 We study the geometrical quantization to construct irreducible unitary representations of reductive Lie groups. Let G be a reductive Lie group and B be its Borel subgroup. We consider the parabolic subgroup P which includes B. We study the flag variety X=G/P. The flag variety X is constructed by gluing |W| affine spaces, where W is Weyl group. Each affine space is isomorphic to Heisenberg group.
Notes	研究種目 : 基盤研究(C)(一般) 研究期間 : 2013～2018 課題番号 : 25400073 研究分野 : 可積分系
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_25400073seika

2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：３２６１２

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2013～2018

課題番号：２５４０００７３

研究課題名（和文）シンプレクティック構造の変形とそのユニタリー表現論への応用

研究課題名（英文）A deformation of symplectic structures and its application for unitary representations

研究代表者

池田　薫（IKEDA, Kaoru）

慶應義塾大学・経済学部（日吉）・教授

研究者番号：４０２３２１７８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：簡約Lie群の既約ユニタリー表現の一般的な構成法の確立に向けて研究を行った．Gを簡約Lie群PをGの放物型部分群とし旗多様体X=G/Pを考える．XはWeyl群Wでパラメトライズされた開被覆で覆われる．さてBをPに含まれるBorel部分群とする．bをBのLie環とする．Λをshift operaterとする．GのLie環gのaffaine部分空間LaxをΛ+bで定義する．Xの元umodPに対してLaxの元をコンパニオン埋め込みにより定義したtarget空間によるσモデルを考えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
べき零Lie群や可解Lie群の既約ユニタリー表現の構成には余随伴軌道法が重要な役割を果たした。さらにKostantによりデンキン図形により分類される一般型戸田格子の可積分性も余随伴軌道を用いて証明された。余随伴軌道法の一般化である幾何学的量子化を用いれば可積分系とりわけ戸田格子を用いて半単純Lie群や簡約Lie群の既約ユニタリー表現の構成が得られることは十分期待できる。それは近年超原理論に関連するσ模型やミラー対称性の理論などとユニタリー表現の新しいつながりを期待させる。

研究成果の概要（英文）：We study the geometrical quantization to construct irreducible unitary representations of reductive Lie groups. Let G be a reductive Lie group and B be its Borel subgroup. We consider the parabolic subgroup P which includes B. We study the flag variety X=G/P. The flag variety X is constructed by gluing |W| affine spaces, where W is Weyl group. Each affine space is isomorphic to Heisenberg group.

研究分野：可積分系

キーワード：ユニタリー表現　戸田格子　旗多様体　シンプレクティック多様体　等エネルギー面

1.　研究開始当初の背景

$G=GL_n(R)$の既約ユニタリー表現の構成を目的とし研究を開始した。コンパクト群の既　約ユニタリー表現は Peter Weyl の定理により完全に求まり, Borel Weil 理論により幾何学的構成法が得られた。さらに余随伴軌道法によりべき零 Lie 群や指数型可解 Lie 群の既約ユニタリー表現も完全に得られた。しかし簡約 Lie 群そして半単純 Lie 群に関しては全ての既約ユニタリー表現を求める問題は未解決である。簡約 Lie 群の代表的な例である $GL_n(R)$についてこの問題を研究しようという試みは有意義なのではないかと考えた。先に述べたべき零 Lie 群や可解 Lie 群の既約ユニタリー表現は余随伴軌道と１対１の対応を持つことがわかっていた。非コンパクトな単純 Lie 群については $SL_2(R)$については Bargmann が $SL_2(C)$については Gelfand-Naimark が分類し一般の $SL_n(K)$, ただし K=R or C or H, については Vogan により分類された. さらに余随伴軌道法を発展させた形の幾何学的量子化を用いて既約ユニタリー表現の一般的な構成法が確立されるのではないかと考えた。ユニタリー表現論への幾何学的アプローチはこのほかに Atiya と Schmid による非コンパクト多様体の指数定理を用いた半単純群の離散系列表現の構成の研究が行われていた。

２．研究の目的

私は可積分系の研究に興味を持っている。可積分系の理論は戸田格子を始め Lie 群の表現論と密接な関係を有する。非周期の有限戸田格子は $GL_n(R)$の対称性を持っている。つまり $GL_n(R)$の座標環に自然に入る Poisson 構造における Hamiltonian system として戸田格子を定義できる。私がこの研究を始めた頃量子群が盛んに研究されていた。量子群は Poison-Lie 群の量子化の研究が端緒となった。私の当初の目的は戸田格子の量子化であった。戸田格子の究極的な抽象化である余随伴軌道法はユニタリー表現と緊密な関係を有し、べき零 Lie 群及び I 型可解 Lie 群では余随伴軌道法により既約ユニタリー表現の分類がなされていた。余随伴軌道法の一般化である幾何学的量子化により他の簡約 Lie 群や半単純 Lie 群の既約ユニタリー表現の分類は可能であろうか？という問題に興味が移っていった。本研究の目的は旗多様体 $GL_n(R)/P$ を Heisenberg 群と同相な n!枚の開被覆で覆い各開被覆上で $GL_n(R)$のユニタリー表現を構成しそれらを張り合わせ $GL_n(R)$の $GL_n(R)/P$ 上での既約ユニタリー表現を構成しようというものであった。

３．研究の方法

旗多様体 $X:=GL_n(R)/P$ を Heisenberg 群と同相なアファイン開被覆で覆うとはどのようなことだろうか? $g\in GL_n(R)$が $g=up, u\in U, p\in P$ と分解できるとき g は U-P 分解を持つという。この U-P 分解を持つ $GL_n(R)$の部分集合を G_ϕとすると $X_\phi=G_\phi/P$ は X の稠密な開集合となる。今 σ を n 次対称群の元とすると σg が U-P 分解を持つ $GL_n(R)$の部分集合 G_σ が定義でき $X_\sigma=G_\sigma/P$ も X の稠密な開集合となるつまり S_n を n 次対称群とすると$\{X_\sigma\}, \sigma\in S_n$ は X の開被覆となることがわかる. もちろんこれら開被覆間の変換関数は代数関係式で決まる。そこで X_ϕを U と同一視し商空間 X_ϕ/R を考える。ここで R は U の中心である。R の指標を考えて X_ϕ/R 上の複素直線束を考える。そしてその上の接続を次のように定義する。X_ϕ上には戸田格子 Lax 行列の等位集合による葉層構造が入るその(n,1)成分と X_ϕ/R のファイバー方向の接ベクトルの分布を同一視 X_ϕ/R の複素直線束に接続を定義する。これで X_ϕ/R に接続付き複素直線束と偏極が定義でき幾何学的量子化の一般論が展開できる。戸田格子の等位集合によるによる一つの開被覆 X_ϕの上の葉層構造は実は旗多様体 X 全体に拡張できる。これは従来 companion 埋め込みと呼ばれていたものだが companion 埋め込みが X 全体に拡張できることを示したのはこの研究が最初だと考えている。

４．研究成果

上記の方向での研究はまだ途上である。しかし次の２つの方向で新しい成果が得られた。一つ目は A 型とは限らない一般の Lie 群上で定義された戸田格子の特異点に関する研究である。連結な Lie 群を G としよう。$B\subset G$ を上三角 Borel 群とした時旗多様体 $X=G/B$ は$|W|$枚の開被覆で覆われる。ここで W は Caltan 代数を固定した時の Weyl 群である。戸田格子は Bruhat 分解における一番大きな cell X の上で通常定義される。その軌道が X_ϕ上にある時は特異点を持たないが他の小さい cell に移る時極を有する。X の小さい cell は X_ϕ上の特異因子として実現できる従って戸田格子の軌道がこの特異因子を通過する時極が発生すると考えられる。$N\subset B$ をべき零部分群とし X 上の主 H 束 G/N を考える。G/B 上の特異性を G/N 上に持ち上げその特異性を Weyl 群の Weyl 領域の中での特異性に書き換えることができた。すなわち特異因子に軌道がぶつかる

ということはWeyl領域上では軌道がWeyl領域の壁にぶつかり他のWeyl領域へ移動するというプロセスに言い換えることが可能である。この特異因子のWeyl領域での書き換えは代数幾何学で使われるモノイダル変換のアナロジーと見ることが可能でき戸田格子の特異点解消の便利な道具である。実はこの問題の動機は幾何学的量子化に根差している。本来の目的は実簡約Lie群GL_n(R)に幾何学的量子化を応用しその既約ユニタリー表現を分類・構成しようというものであった。その際旗多様体Xをよく知られた等質空間G/Bではなく幾つかのアファイン空間を張り合わせた通常の多様体としての記述が必要となる。G=GL_n(R)の場合は線形代数の議論で解ける。より一般に代数群の場合もJantzenにより解かれている。この問題を一般の連結Lie群について考えた。もう一つの成果はHeisenberg群のユニタリー表現に関するものである。幾何学的量子化は既約ユニタリー表現の構成に関する手段と考えられるがユニタリー表現が与えられた時それを既約分解するには別の手法が必要と考えられる。この問題に関してべき零群の特別な場合であるHeisenberg群に関して若干の進展が見られた。UをHeisenbreg群としRをその中心とする商空間X:=U/RをUでその(n,1)成分が0である部分集合と同一視する。可積分系で重要な概念であるLax行列のなす空間はPoisson多様体である。Lax行列の空間をtarget spaceとしたX上のPoissonσmodelを考えた。Lax行列の空間内では戸田格子の軌道たちが定義されるがそれらをX上に射影することでXには葉層構造が定義される。
これらの成果は"The resolution of the singular loci of the Toda lattice on the split and connected reductive Lie groups"と"An application of the Poisson sigma model for the irreducible decomposition of the unitary representation of Heisenberg group"の２本の論文にして現在投稿中である.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　３ 件）

① Kaoru Ikeda, Split で連結で簡約 Lie 群上の戸田格子の特異点解消について, 京都大学数理解析研究所講究録「Representation theory and related Area 表現論とその周辺分野の広がり, 2077(2018)pp 70-78 (査読なし)
② Kaoru Ikeda, A generalization of the invariant formulas of the k-chop integrals, Kumamoto Journal of Mathematics　27(2014) pp1-4(査読あり)
③ Kaoru Ikeda, 旗多様体の底空間のシンプレクティック構造の変形とその表現論への応用, 京都大学数理解析研究所「表現論と非可換調和解析の展望」1825(2013)pp166-184(査読なし)

〔学会発表〕（計　２　件）

①池田薫,「戸田格子の作用−角変数と射影的旗多様体の偏極」幾何学小研究集会「新しい幾何学に向かって２」東京理科大学森戸記念館, 2016

②池田薫, “Symplectic structure of projective flag manifold and the unitary representations” ハーバード大学数理物理セミナー, 2014 ハーバード大学数学教室

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：

国内外の別：

○取得状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に