慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	岩澤理論の発展と展開
Sub Title	Development of Iwasawsa theory
Author	栗原, 将人(Kurihara, Masato) 松野, 一夫(Matsuno, Kazuo) 八森, 祥隆(Hachimori, Yoshitaka) 田中, 孝明(Tanaka, Takaaki) 小林, 真一(Kobayashi, Shin'ichi) 藤井, 俊(Fujii, Satoshi)
Publisher	
Publication year	2019
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2018.)
JaLC DOI	
Abstract	Stark予想の精密化、一般化についての新しい理論を構築した。Rubin-Stark元の整性(integrality)に関して、そこに登場するイデアルの数論的意味を明らかにし、さらには同変玉河数予想が述べるゼータ元との間の関係を明らかにした。Stark元をゼータ関数のs=0での値だけでなく、任意の整数での値に対して定義し、精密化Stark予想をこれらの対象に対しても一般化した。また、一般化Stark元たちがp進族をなすことを発見した。古典的岩澤加群のFittingイデアルを完全に決定した。Brumer Stark予想と関連した岩澤加群のFittingイデアルの問題に完全な解答を得た。 We constructed a new theory on refinement and generalization of Stark conjecture. We discovered the arithmetic meaning of the ideal which appears in Rubin-Stark conjecture, and the relation between Rubin-Stark elements and zeta elements in equivariant Tamagawa number conjecture. We defined Stark elements to arbitrary integer points of zeta functions, and generalized the refined Stark conjecture to these generalized Stark elements. We found that these generalized elements form p-adic families. We determined the Fitting ideal of (non-modified) classical Iwasawa modules, and gave a complete answer to the problem on the Fitting ideal related to the Iwasawa theoretic version of Brumer Stark conjecture.
Notes	研究種目：基盤研究(A)(一般) 研究期間：2013～2017 課題番号：25247002 研究分野：整数論
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_25247002seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(A)（一般）
研究期間：2013～2017
課題番号：２５２４７００２

研究課題名（和文）岩澤理論の発展と展開

研究課題名（英文）Development of Iwasawsa theory

研究代表者
栗原　将人（Kurihara, Masato）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・教授

研究者番号：４０２１１２２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　29,700,000円

研究成果の概要（和文）：　Stark予想の精密化、一般化についての新しい理論を構築した。Rubin-Stark元の整性(integrality)に関して、そこに登場するイデアルの数論的意味を明らかにし、さらには同変玉河数予想が述べるゼータ元との間の関係を明らかにした。Stark元をゼータ関数のs=0での値だけでなく、任意の整数での値に対して定義し、精密化Stark予想をこれらの対象に対しても一般化した。また、一般化Stark元たちがp進族をなすことを発見した。
　古典的岩澤加群のFittingイデアルを完全に決定した。Brumer Stark予想と関連した岩澤加群のFittingイデアルの問題に完全な解答を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
ゼータ関数と数論的対象物との間の関係を調べることは、19世紀のDirichletによる類数公式にまでさかのぼる整数論における最重要問題のひとつである。有名なStark予想はこの典型であるが、本研究によってStark元に関して統一的な視点が得られ、それが一般化され、今までStark予想とは別個のものとして、個別に考えられてきたさまざまな定理や予想を、ゼータ元と一般化Stark元とその関係として統合的にとらえることができるようになった。これは大変大きな進歩である。古典的岩澤加群の新しい性質も明らかになった。

研究成果の概要（英文）：We constructed a new theory on refinement and generalization of Stark conjecture. We discovered the arithmetic meaning of the ideal which appears in Rubin-Stark conjecture, and the relation between Rubin-Stark elements and zeta elements in equivariant Tamagawa number conjecture. We defined Stark elements to arbitrary integer points of zeta functions, and generalized the refined Stark conjecture to these generalized Stark elements. We found that these generalized elements form p-adic families.
We determined the Fitting ideal of (non-modified) classical Iwasawa modules, and gave a complete answer to the problem on the Fitting ideal related to the Iwasawa theoretic version of Brumer Stark conjecture.

研究分野：整数論

キーワード：整数論　岩澤理論　Stark予想　同変岩澤主予想　同変玉河数予想

１．研究開始当初の背景

岩澤理論は 20 世紀の後半に創始された理論であるが、現在でも最も活発に研究され発展している整数論の分野、理論の一つである。たとえば、Wiles による Fermat 予想解決の最後の鍵の部分に岩澤理論が使われたことはよく知られている。岩澤理論の中核をなすのは、いわゆる岩澤主予想と呼ばれる関係である。この関係を簡潔に述べると、イデアル類群などの数論的に重要な群への Galois 群の作用から決まる特性多項式が、p 進 L 関数という p 進解析的なゼータ関数と一致する、というものである。この予想は、上記のイデアル類群の場合には、Mazur と Wiles により 1980 年代に最終的に解決された。その後、岩澤理論ではイデアル類群以外の重要な対象、たとえば楕円曲線の Selmer 群やモチーフに伴う p 進表現のコホモロジーに岩澤理論を一般化しようという研究がなされてきたが、そのときの指導原理は常にこの岩澤主予想であった。

岩澤主予想はさまざまな Galois 表現に一般化され、たとえば楕円曲線の岩澤主予想は(ほぼ)Skinner と Urban によってこの研究開始前に証明されていた。この研究では、我々は一般化という方向ではなく、岩澤主予想を精密化し、その背後にあるさまざまな数論的事象を岩澤理論の観点から明らかにしていこうという研究計画を作成した。もう少し具体的に述べると、イデアル類群や楕円曲線の Selmer 群などの数論的対象物を Galois 群の作用をこめた加群とみなし、その構造を岩澤主予想(特性多項式)よりも詳しい精密な形で、ゼータ関数もしくは p 進ゼータ関数から取り出す研究計画である。またひとつの背景として、この研究開始前に、Loeffler らによって新しい Euler 系が構成され、Euler 系を用いて、数論的対象物と解析的対象物の間の岩澤主予想より詳しい関係を研究することが期待される状態であった。

２．研究の目的

世界における最近の岩澤理論の発展はめざましいものがある。この研究の目的は、岩澤理論のこのような新しい発展をふまえて、岩澤理論に関するさまざまな観点から、新しい理論を構築することにある。具体的には、岩澤主予想を精密化した新しい定式化による岩澤理論の発展、通常還元でない素数に対する新しい定式化による岩澤理論とその新しい展開がこの研究の中心課題である。岩澤理論の視点から出発して、新しい観点の理論を構築して、整数論を発展させることが目的である。

岩澤理論に関しては、世界でさまざまな国際研究集会が開かれている。特に、岩澤理論の大規模国際研究集会である、Iwasawa 2010 がカナダの Fields 研究所で、Iwasawa 2012 がドイツの Heidelberg 大学で開催されており、このシリーズの大規模国際会議を初めて日本で開催することも本研究課題の目的であり、2017 年度の開催した。

３．研究の方法

研究では、岩澤理論・Stark 予想に関する Tate, Rubin, Mazur などの多くのアイディア・Tate sequence を始めとする類体論や双対性についての多くのアイディア、などさまざまな手法を用いる。研究成果の項で詳しく説明する。

４．研究成果

(1) <u>Stark 予想に関する新しい観点と研究成果</u>

Stark 予想の一般化、精密化についての新しい理論を構築することができた。多くの研究者によって今まで考えられてきた Stark 予想に関連するさまざまな予想を、新しい観点から統一的に扱うことができるようになった。これは、King’s College London の Burns 教授、大阪市大の佐野教授との共同研究である。Stark 元は Artin L 関数の s=0 での先頭項の値と関連することが予想されている代数的な元である(存在が予想されている元)。古典的には類体の構成問題などで重要な役割を果たすが、Euler 系などを扱う現代の観点から見ると、Stark 元の整性(integrality)を知ることはきわめて重要なことである。1990 年代にこの整性を予想の形で初めて定式化したのは Rubin で、その後の研究に大きな影響を与えた。Rubin によれば、Stark 元自体は、単数群の外積の中には入らず分母がある(整性を持たない)が、Stark 元からできるあるイデアルが整イデアルとなり整性を持つというのである。われわれはまず、同変玉河数予想が予想するゼータ元と Stark 元の間に簡明な形の関係があることを証明し、そのことを用いて、Rubin が考えたイデアルが、非常に重要な数論的な対象(あるコホモロジー群)の Fitting イデアルとなるという予想を定式化することに成功した。そして、同変玉河数予想からこの予想が導かれることを証明した。これは、Stark 元の整性に関する非常に大きな成果であると考えている。というのは、今まで何十年も多くの研究者によって研究されてきた Stark 元の持つ重要な数論的性質が初めて明らかになったのであり、またこのことによりイデアル類群やその類似の群の数論的性質(たとえば群環上の加群として見たときの零化域など)が明らかになるからである。これまで同変玉河数予想が述べる元は抽象的すぎて具体的な問題の応用には遠かったが、具体的な Stark 元との関係が明らかになり、数論的な諸問題への応用が可能になってきた。たとえば、Greither と Popescu が得ていた結果を、統一的な視点から見直し、一般化することができる。さらに、Stark 元の間の合同式を正確に定式化した Mazur Rubin Sano 予想が同変玉河数予想から導かれることを示し、このことを用いてさまざまな結果を得たが、特に Gross による Conjecture for tori を基礎体が有理数体の場合に証明することができた。

また、Stark 元に対する岩澤理論的研究を行った。任意の代数体上の Zp 拡大に対して、Rubin-Stark 元の存在を仮定して、岩澤主予想を定式化することに成功した。また、同変玉河数予想を証明する方針を提起した。この方針を用いて、CM 体の乗法群に関する同変玉河数予想のマイナス成分を、p 進 L 関数の自明な零点は１つ以下という仮定のもとに証明した。p 進 L 関数が自明な零点を持つ場合に、同変玉河数予想が証明されたのはこれが初めてである。このことを用いて、Brumer Stark 予想についての肯定的結果も得た。

Rubin Stark 元はゼータ関数の s=0 での値に対応する数論的な元であるが、われわれは Rubin Stark 元を任意の整数点での値に一般化した。すなわち、任意の整数 k に対して、ゼータ関数の s=k の値に対応する Galois コホモロジーの元の存在を述べる正確な予想を定式化し、その元が持つ数論的性質を記述した。さらに興味深いのは、異なる k, k’ に対して定義される一般化 Stark 元の間に成り立つ合同式を正確に定式化したことである。この合同式は Kummer の合同式の膨大な一般化であると考えられる。また、この合同式は今まで得られているさまざまな定理や予想(たとえば Coleman Ihara の定理、p 進 Beilinson 予想の特別な場合など)を含んでいる。その意味で、これらの予想・定理の間に統一的な観点を与えたことになる。さらに、一般化 Stark 元をこれからは p 進族として調べていくことが可能となり、大きな発展が期待できる。

(2) <u>古典的岩澤加群の同変岩澤主予想について</u>

上の(1)で述べた研究では、Stark 元という数論的な元からできるあるイデアルが、コホモロジー群の Fitting イデアルを与えることがわかった。このことによって Stark 元の性質はよくわかるが、古典的な数論的対象物、たとえばイデアル類群や古典的岩澤加群はここに登場するコホモロジー群とずれるので、古典的な対象物を使った同変理論を作ることも大変重要な問題となる。ミュンヘン防衛大の Greither 教授とこの問題についての研究を行った。まず、奇素数 p と総実代数体の有限次 Abel p 拡大 K/k に対して、K の円分 Zp 拡大を L として、L の S の外不分岐な最大の Abel pro-p 拡大の Galois 群でできる岩澤加群を L/k の完備群環上で考えて、その Fitting イデアルを決定した。Fitting イデアルは、p 進 L 関数に L/k の Galois 群の構造だけで決まるあるイデアル I をかけたものになることを証明した。このイデアル I は、K/k の Galois 群の p 階数が大きくなると、augmentation イデアルよりはるかに小さくなっていく。われわれがこの研究を始める前には、p 進 L 関数に augmentation イデアルをかけたものが、岩澤加群の Fitting イデアルに入るか、という未解決問題があった(Brumer Stark 予想と関連して、この問題は重要であった)のだが、われわれの理論は、この問題に完全な決着をつけたことになる。すなわち、一般にはこの問題の答は否定的である。そして、どのような場合には肯定的になるかを完全に答えることができる。たとえば、K/k が巡回拡大のときには、この問題の答は Yes である。さらに、上に現れた重要なイデアル I を L/k の Galois 群の構造から決まる明示的な量で完全に書き切ることにも成功した。

次に、p の外不分岐な岩澤加群についても同様の研究を行った。この場合の結果は、CM 体のイデアル類群のマイナス成分と直結しており、応用上も重要である。すなわち、今までほとんど調べられていない 1 の p 冪根を含む CM 体のイデアル類群(の Teichmuller 指標成分)の Fitting イデアルを調べることができる。このときも、岩澤加群の Fitting イデアルは、K/k の Galois 群の p 階数が大きくなると、p 進 L 関数に augmentation イデアルをかけたものより小さくなることがわかった。そして、このことから基礎体を有理数体としたときにさえ、上記の問題の答が否定的であることがわかった。特に、円分体のイデアル類群の Pontryagin 双対の Fitting イデアルを考えると、それは Sinnott の Stickelberger イデアルより小さくなることがわかった。双対を取らないイデアル類群自身の Fitting イデアルは Stickelberger イデアルと一致することが我々の以前の研究で証明されていたことを考えると、このことは大変興味深い。また、p の外不分岐な岩澤加群については、上記以外にもさまざまな手法を用いて研究を行った。

(3) <u>国際研究集会 Iwasawa2017 の開催</u>

われわれの研究成果の発表のため、また世界の最新の研究成果を取り入れて研究を推進するために、2017 年 7 月 19 日から 7 月 28 日まで東京大学において国際研究集会 Iwasawa 2017 を開催した。この集会は総参加者が 230 名を超え、海外からは 15 ヶ国から 98 名が参加するという大規模な国際研究集会となった。講演についても、新しい Euler 系の構成や Gross Stark 予想の証明など最新の成果が発表され、会場では大変な熱気の中で議論が行われ、他に例がないほどの盛況な研究集会となった。

(4) その他の成果の主なものとしては、Chan-Ho Kim との共同研究で、楕円曲線が超特異還元を持つ場合の円分 Zp 拡大の部分拡大の Selmer 群に対して、モジュラー元に関する Mazur Tate の弱予想を証明し、また代表者による予想をある種の条件の下に証明した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　14　件）

① David Burns, <u>Masato Kurihara</u>, and Takamichi Sano, On Iwasawa theory, zeta elements for G_m, and the equivariant Tamagawa number conjecture, Algebra and Number Theory 11

(2017), 1527 – 1571, 査読有, DOI:10.2140/ant.2017.11.1527
② Cornelius Greither and Masato Kurihara, Fitting ideals of Iwasawa modules and of the dual of class groups, Tokyo Journal of Mathematics 39 (2017), 619 – 642, 査読有, DOI:10.3836/tjm/1475723094
③ David Burns, Masato Kurihara, and Takamichi Sano, On zeta elements for G_m, Documenta Mathematica 21, (2016) 555-626, 査読有,
https://www.math.uni-bielefeld.de/documenta/vol-21/vol-21-eng.html
④ Cornelius Greither and Masato Kurihara, Tate sequences and Fitting ideals of Iwasawa modules, St. Petersburg Math. Journal 27 (2016), 941 – 965, 査読有,
DOI: 10.1090/spmj/1428
⑤ Masato Kurihara, Rubin-Stark elements and ideal class groups, RIMS Kokyuroku Bessatsu B53 (2015), 343-363, 査読有
⑥ Masato Kurihara, The structure of Selmer groups of elliptic curves and modular symbols, *Iwasawa theory 2012*, Contributions in Mathematical and Computational Sciences 7 (2014), 317-356, 査読有
⑦ Masato Kurihara, Refined Iwasawa theory for p-adic representations and the structure of Selmer groups, Muenster Journal of Mathematics 7 (2014), 149-223, 査読有,
https://www.uni-muenster.de/FB10/mjm/vol7.html
⑧ Shinichi Kobayashi, The p-adic Gross-Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes, Inventiones mathematicae 191 (2013), 527-629, 査読有,
DOI: 10.1007/s00222-012-0400-9

〔学会発表〕（計 32 件）
① Masato Kurihara, Generalized Stark elements of arbitrary weights for Gm, Iwasawa 2017, 東京大学, 2017 年 7 月
② Shinichi Kobayashi, Local Iwasawa theory of modular forms for the anti-cyclotomic Z_p-extension, Iwasawa 2017, 東京大学, 2017 年 7 月
③ Masato Kurihara, Generalization and refinement of Rubin-Stark conjecture, Pan Asia Number Theory Conference 2016, 台湾国立大学, 2016 年 07 月
④ Masato Kurihara, Iwasawa theory and Rubin-Stark elements, New Directions in Iwasawa Theory, Banff International Research Station, Canada, 2016 年 06 月
⑤ Masato Kurihara, Tate sequences and Iwasawa theory, Pan Asia Number Theory Conference 2015, Sanya International Mathematics Forum, 中国, 2015 年 07 月
⑥ Masato Kurihara, Zeta elements and Iwasawa theory, Local Arithmetic Geometry, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia, 2015 年 05 月
⑦ Masato Kurihara, Arithmetic of zeta elements and Rubin-Stark elements, p-adic Variations in Number Theory, Boston University, USA, 2014 年 06 月

〔図書〕（計 0 件）
なし
〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）
なし

○取得状況（計 0 件）
なし

６．研究組織
(1)研究分担者
研究分担者氏名：松野 一夫
ローマ字氏名：Kazuo Matsuno
所属研究機関名：津田塾大学
部局名：学芸学部
職名：教授
研究者番号（8 桁）：40332936

研究分担者氏名：八森祥隆
ローマ字氏名：Yoshitaka Hachimori
所属研究機関名：東京理科大学
部局名：理工学部数学科

職名：准教授
研究者番号（8 桁）：50433743

研究分担者氏名：田中孝明
ローマ字氏名：Takaaki Tanaka
所属研究機関名：慶應義塾大学
部局名：理工学部
職名：准教授
研究者番号（8 桁）：60306850

研究分担者氏名：小林真一
ローマ字氏名：Shinichi Kobayashi
所属研究機関名：九州大学
部局名：数理学研究院
職名：教授
研究者番号（8 桁）：80362226

研究分担者氏名：藤井俊
ローマ字氏名：Satoshi Fujii
所属研究機関名：金沢工業大学
部局名：基礎教育部
職名：講師
研究者番号（8 桁）：20386618

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。