

Title	凸解析・情報幾何に基づくスパース信号処理とその応用
Sub Title	Sparse signal processing based on convex analysis and information geometry and its applications
Author	湯川, 正裕(Yukawa, Masahiro)
Publisher	
Publication year	2016
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2015. )
JaLC DOI	
Abstract	<p>Lp準ノルム(<math>0 &lt; p &lt; 1</math>)に基づく2つの最小2乗問題(Lp正則化最小2乗問題とLp制約付き最小2乗問題)の構造を研究した。まず、過剰決定系の場合を考察し、2つの問題の本質的な相違点を明らかにするとともに、スパース最適化に対する貪欲アルゴリズムとの関係を明らかにした。次に、圧縮センシングなどで注目されている劣決定系の場合を考察し、ある仮定の下、原点とスパース解(多数のゼロ成分を持つ解)を結ぶ連続な臨界点パスの存在性を理論的に証明した。最後に、得られた知見をスパース適応フィルタと再生核適応フィルタに応用し、その有効性を示した。</p> <p>The structures of two least square problems (Lp-regularized least squares and Lp-constrained least squares for <math>0 &lt; p &lt; 1</math>) have been elucidated. First, for the over-determined linear system, the essential difference between the two problems has been clarified, and the relation between the least squares based on the Lp quasi-norm and the greedy algorithm for sparse optimization has been established. Second, for the under-determined system, the existence of a continuous path that connects the origin and the sparsest least square solution has been proven mathematically under a certain condition. Third, the obtained results have been applied to the sparse/kernel adaptive filters.</p>
Notes	研究種目：若手研究(B) 研究期間：2012～2015 課題番号：24760292 研究分野：信号処理
Genre	Research Paper
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_24760292seika">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_24760292seika</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 4 月 13 日現在

機関番号：32612

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24760292

研究課題名(和文)凸解析・情報幾何に基づくスパース信号処理とその応用

研究課題名(英文) Sparse signal processing based on convex analysis and information geometry and its applications

研究代表者

湯川 正裕 (Yukawa, Masahiro)

慶應義塾大学・理工学部・准教授

研究者番号：60462743

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：Lp準ノルム( $0 < p < 1$ )に基づく2つの最小2乗問題(Lp正則化最小2乗問題とLp制約付き最小2乗問題)の構造を研究した。まず、過剰決定系の場合を考察し、2つの問題の本質的な相違点を明らかにするとともに、スパース最適化に対する貪欲アルゴリズムとの関係を明らかにした。次に、圧縮センシングなどで注目されている劣決定系の場合を考察し、ある仮定の下、原点とスパース解(多数のゼロ成分を持つ解)を結ぶ連続な臨界点パスの存在性を理論的に証明した。最後に、得られた知見をスパース適応フィルタと再生核適応フィルタに応用し、その有効性を示した。

研究成果の概要(英文)：The structures of two least square problems (Lp-regularized least squares and Lp-constrained least squares for  $0 < p < 1$ ) have been elucidated. First, for the over-determined linear system, the essential difference between the two problems has been clarified, and the relation between the least squares based on the Lp quasi-norm and the greedy algorithm for sparse optimization has been established. Second, for the under-determined system, the existence of a continuous path that connects the origin and the sparsest least square solution has been proven mathematically under a certain condition. Third, the obtained results have been applied to the sparse/kernel adaptive filters.

研究分野：信号処理

キーワード：スパース最適化 Lp準ノルム LARS法 ホモトピー法

### 1. 研究開始当初の背景

スパース最適化問題の最も基本的な定式化は、「線形等式制約の下で、変数ベクトルの非零成分の数 ( $L_0$  ノルム) を最小化せよ」という問題である。この問題は、圧縮センシングを含む様々な応用がある一方、変数の個数の増加に伴って計算コストが組み合せ的に増加し、NP 困難であることが知られている。 $L_0$  ノルムを  $L_1$  ノルムで置き換える緩和解法が広く研究され、この緩和解法の性質が明らかにされてきた。例えば、ある条件の下で  $L_1$  ノルム最小化問題 (以下、 $L_1$  問題と呼ぶ) の解が  $L_0$  問題の解と完全に一致する。 $L_p$  準ノルム (ベクトルの各成分の絶対値の  $p$  乗和の  $p$  乗根:  $0 < p < 1$ ) を用いた緩和解法も研究され、 $L_1$  ノルムに基づく解法に対する優位性は報告されているにも関わらず、問題の非凸性に起因した困難性が伴うため、その素性は解明されていなかった。

### 2. 研究の目的

本研究では、凸解析と情報幾何の手法に基づく新しいスパース最適化パラダイムを構築する。第一に、情報幾何を用いて、 $L_p$  正則化二乗誤差関数で決まる空間の幾何構造を明らかにする。第二に、LARS法 ( $L_1$  問題の解の軌道を生成する手法) を  $L_p$  準ノルム ( $p < 1$ ) の場合に拡張し、 $L_p$  問題の解軌道の持つ性質を明らかにする。第三に、 $L_p$  問題を効率的に解くアルゴリズムを導出し、新しいスパース最適化パラダイムを構築する。第四に、第三ステップで構築したアルゴリズムを信号処理の実問題に応用し、アルゴリズムの有効性を数値シミュレーションによって実証する。

### 3. 研究の方法

- (1)  $L_p$  正則化二乗誤差関数の幾何構造を解析し、空間の特徴を解明した。
- (2) 「 $L_p$  制約問題」と「 $L_p$  正則化問題」の違いを解明した。
- (3)  $L_1$  問題との本質的な相違点 ( $L_p$  ノルムの非凸性に起因) を解明した。
- (4) LARS 法を  $L_p$  制約問題へ拡張した。
- (5)  $L_p$  制約問題の解軌道の持つ性質を解明した。

(6)  $L_p$  制約付き最小二乗法とOMP法の関係を解明した。

(7) 原点とスパース解を結ぶ連続な臨界点パスの存在性を証明した。

(8) 本研究で得られた知見を実問題へ応用し、シミュレーションで有効性を実証した。

### 4. 研究成果

(1)  $L_p$  準ノルムに基づく2種類の問題を検討し、その本質的な違いを明らかにした。(i)  $L_p$  制約問題 (以下、問題 (P1) と呼ぶ):  $L_p$  準ノルムが与えられた定数以下になるという条件の下で二乗誤差を最小化する問題、(ii)  $L_p$  正則化問題 (以下、問題 (P2) と呼ぶ): 「二乗誤差」+ 「 $L_p$  準ノルムの定数倍」で定義されるコスト関数を最小化する問題。まず、(P1) において制約を緩めていったときの大域的な最小解軌道が原点において連続であること、また一方で、(P2) において正則化の強さを緩めていったときの大域的な最小解軌道が原点において不連続であることを示し、これら2つの問題の間に本質的な違いが存在することを明らかにした。次に、2つの問題の局所最適性に関する必要十分条件を与え、問題 (P1) では、問題 (P2) より弱い条件で局所最適性が満たされることを明らかにし、その具体例を与えた。さらに、原点から最小二乗解への連続な軌道を得るために問題 (P1)、(P2) の臨界点を考えた場合、臨界点全体の集合が (P1) と (P2) で一致することを示し、そのパスが連続で区分的に滑らかな曲線で与えられることを示した。また、一般化ミンコフスキー勾配を定義し、臨界点軌道との関係を明らかにした (学術雑誌論文[1])。

(2) 劣決定系における最もスパースな最小二乗解を考え、(ある条件の下で) この解と原点を連続につなぐ臨界点パスが必ず存在することを証明した。初めに、優決定系の (一意的に定まる) 最小二乗解に対して、(ある条件の下で) この解と原点をつなぐ連続な臨界点パスの存在性を証明した。次に、劣決定系

の場合、各最小二乗解に対して、そのサポートに対応した観測行列の部分行列の列ベクトル集合が一次独立であれば、連続パスが存在することを示した。最後に、劣決定系における最もスパースな最小二乗解が、対応する部分行列の一次独立性に関する条件を満足することを示し、劣決定系における連続パスの存在を証明した( 学術雑誌論文[4] )。

(3) スパース適応信号処理問題への応用として、正則化パラメータ設計問題に取り組んだ。「解くべき問題の解を使って表現される平均 2 乗誤差 ( 利用不可能 ) 」と平均が一致する推定量を Stein の補題から算出し、この推定量を各反復で最小化する「統計的に最適な」正則化パラメータを導出することに成功し、その有効性を数値例で実証した( 学会発表論文[4] )。

(4) 非線形適応信号処理への応用として、再生核適応フィルタの新しいアルゴリズムを提案し、その有効性を実証した。提案法は、部分空間に沿った射影、フィルタ係数の選択的更新、並列射影の 3 つのアイデアに基づいて構築されている。また、適応射影劣勾配法に基づいて、提案法の収束解析を与えることに成功した。提案法は、Chen らによって提案された Quantized kernel least mean square (QKLMS) 法と Dodd らによって提案された Sparse sequential (SS) 法を特別な場合として含む一般的な手法となっている。計算機シミュレーションにより、再生核適応フィルタの最新の手法に対する提案法の利点を明らかにした( 学術雑誌論文[3] )。

## 5 . 主な発表論文等

( 研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線 )

[ 雑誌論文 ] ( 計 6 件 : 全て査読有 )

Masahiro Yukawa and Shun-ichi Amari, "Lp-regularized least squares ( $0 < p < 1$ ) and critical path", IEEE Trans. Information Theory, vol.62, no.1, pp.488--502, January 2016.  
Masahiro Yukawa, "Adaptive learning in

Cartesian product of reproducing kernel Hilbert spaces", IEEE Trans. Signal Processing, vol.63, no.22, pp.6037--6048, November 2015.

Masaaki Takizawa and Masahiro Yukawa, "Adaptive nonlinear estimation based on parallel projection along affine subspaces in reproducing kernel Hilbert space", IEEE Trans. Signal Processing, vol.63, no.16, pp.4257--4269, August 2015.

Kwangjin Jeong, Masahiro Yukawa, and Shun-ichi Amari, "Can Critical-Point Paths Under Lp-regularization ( $0 < p < 1$ ) Reach the Sparsest Least Squares Solutions?", IEEE Trans. Information Theory, vol.69, no.5, pp.2960--2968, May 2014.

Masahiro Yukawa, Youngchul Sung, and Gilwon Lee, "Dual-domain adaptive beamformer under linearly and quadratically constrained minimum variance", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 61, no. 11, pp.2874--2886, June 1, 2013.

[ 学会発表 ] ( 計 16 件 )

Masahiro Yukawa, "Online learning based on iterative projections in sum space of linear and Gaussian reproducing kernel Hilbert spaces," in Proceedings of 40th IEEE ICASSP, pp.3362--3366, Brisbane (Australia), April 19-24, 2015.

Osamu Toda and Masahiro Yukawa, "An efficient kernel normalized least mean square algorithm with compactly supported kernel," in Proceedings of 40th IEEE ICASSP, pp.3367--3371, Brisbane (Australia), April 19-24, 2015.

Masaaki Takizawa, Masahiro Yukawa, and Cedric Richard, "A stochastic behavior analysis of stochastic restricted-gradient descent algorithm in reproducing kernel Hilbert spaces," in Proceedings of 40th IEEE ICASSP, pp.2001--2005, Brisbane (Australia), April 19-24, 2015.

Masao Yamagishi, Masahiro Yukawa, and Isao Yamada, "Shrinkage tuning based on an unbiased MSE estimate for sparsity-aware adaptive filtering," in Proceedings of 39th IEEE ICASSP, pp.5514--5518, Florence (Italy), May 4-9, 2014.

Masahiro Yukawa and Yuki Saito, "Widely Linear LQCMV Beamformer and Augmented Dual-Domain Adaptive Algorithm," in Proceedings of

International Conference on Information, Communications and Signal Processing (ICICS), pp.1--5, Tainan (Taiwan), December 10-13, 2013 (INVITED paper).

Masahiro Yukawa, Yuta Tawara, Shigenobu Sasaki, and Isao Yamada, "A sparsity-based design of regularization parameter for adaptive proximal forward-backward splitting algorithm," in Proceedings of International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS), Ilmenau (Germany), pp.190--193, August 27-30, 2013.

Yu Morikawa and Masahiro Yukawa, "A sparse optimization approach to supervised NMF based on convex analytic method," in Proceedings of 38th IEEE ICASSP, pp.6078--6082, Vancouver (Canada), May 26-31, 2013.

Masahiro Yukawa and Shun-ichi Amari, "Lp-constrained least squares ( $0 < p < 1$ ) and its critical path", in Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), pp.2231--2235, Cambridge (USA), July 1-6, 2012.

Masahiro Yukawa, Yuta Tawara, Masao Yamagishi, and Isao Yamada, "Sparsity-aware adaptive filters based on Lp-norm inspired soft-thresholding technique", in Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), : Special Session on Adaptive Filtering and Their Applications, pp.2749--2752, Seoul (Korea), May 20-23, 2012 (INVITED paper).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :

国内外の別 :

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://www.ykw.elec.keio.ac.jp/yukawa/pub.html>

6 . 研究組織

(1)研究代表  
湯川 正裕 (YUKAWA MASAHIRO)  
慶應義塾大学・理工学部・准教授  
研究者番号 : 60462743

(2)研究分担者  
( )

研究者番号 :

(3)連携研究者  
( )

研究者番号 :