

Title	有限空間上のC*環の分類理論
Sub Title	Classification theory of C*-algebras over finite spaces
Author	勝良, 健史(Katsura, Takeshi)
Publisher	
Publication year	2017
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書(2016.)
JaLC DOI	
Abstract	本研究では、当初の計画通り有限空間上のC*環に対する様々な結果を得ただけではなく、研究開始当初では想像もしていなかったC*環の分類理論に関する幅広い結果を得ることにも成功した。有限空間上のC*環に対する結果として、Cuntz-Krieger環のK理論的不变量に関する結果と、その応用としての「グラフ環の特徴づけ予想」の部分的解決や、単純でないグラフ環に対するK理論的不变量の実現問題の完全解決と、単純でないグラフ環としてどのAF環が現れるかの決定に関する結果を得た。C*環の分類理論に関する幅広い結果として、可分でないC*環の分類理論に関する結果や離散群から作られるC*環に関する結果を得た。 In this research, we got not only various results on C*-algebras over finite spaces as expected, but also wide results on classification theory of C*-algebras. The results on C*-algebras over finite spaces include the one on K-theoretical invariants of Cuntz-Krieger algebras with the application to the conjecture of characterization of graph algebras, the complete solution to realization problem of K-theoretical invariants of non-simple graph algebras, and the result of determining which AF-algebras arise as non-simple graph algebras. The results on classification theory of C*-algebras include the ones on non-separable C*-algebras and on C*-algebras associated with discrete groups.
Notes	研究種目：若手研究(B) 研究期間：2012～2016 課題番号：24740109 研究分野：作用素環
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_24740109seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：32612

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2016

課題番号：24740109

研究課題名（和文）有限空間上のC*環の分類理論

研究課題名（英文）Classification theory of C^* -algebras over finite spaces

研究代表者

勝良 健史 (KATSURA, Takeshi)

慶應義塾大学・理工学部(矢上)・准教授

研究者番号：50513298

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、当初の計画通り有限空間上のC*環に対する様々な結果を得ただけではなく、研究開始当初では想像もしていなかったC*環の分類理論に関する幅広い結果を得ることにも成功した。有限空間上のC*環に対する結果として、Cuntz-Krieger環のK理論的不变量に関する結果と、その応用としての「グラフ環の特徴づけ予想」の部分的解決や、単純でないグラフ環に対するK理論的不变量の実現問題の完全解決と、単純でないグラフ環としてどのAF環が現れるかの決定に関する結果を得た。C*環の分類理論に関する幅広い結果として、可分でないC*環の分類理論に関する結果や離散群から作られるC*環に関する結果を得た。

研究成果の概要（英文）：In this research, we got not only various results on C^* -algebras over finite spaces as expected, but also wide results on classification theory of C^* -algebras. The results on C^* -algebras over finite spaces include the one on K-theoretical invariants of Cuntz-Krieger algebras with the application to the conjecture of characterization of graph algebras, the complete solution to realization problem of K-theoretical invariants of non-simple graph algebras, and the result of determining which AF-algebras arise as non-simple graph algebras. The results on classification theory of C^* -algebras include the ones on non-separable C^* -algebras and on C^* -algebras associated with discrete groups.

研究分野：作用素環

キーワード：数学 関数解析 作用素環 分類

1. 研究開始当初の背景

C^* 環とは作用素環と呼ばれているものの一
種であり,量子力学や位相力学系をはじめとする多くの物理的,数学的対象から自然と表
れる.このように,多くの異なった対象から
異なった手段で表れた C^* 環がいつ同じにな
るかということを問う分類理論は,作用素環
論において常に中心的な問題の一つである.
作用素環には C^* 環の他に von Neumann 環があ
り,分類理論という視点では von Neumann 環
論の方が C^* 環論に比べて発展している.von
Neumann 環の分類で鍵となる事実は,因子環
と呼ばれる von Neumann 環を理解すれば一般
の von Neumann 環は直積分解により理解で
きるという事実である. C^* 環論で因子環に対
応するのは単純 C^* 環である.単純 C^* 環の分
類理論はここ 30 年で大きく発展した.ところが,
von Neumann 環論とは異なり C^* 環論では
単純 C^* 環の分類が発展しても,それを単純
でない C^* 環の分類に応用しようとしたとき,
K 理論的,ホモロジー代数的,位相的困難に起
因する新たな問題が多く起きる.

単純 C^* 環の分類理論の発展において,「良
い性質を満たす C^* 環は K 理論的不变量で分類可
能である」というスローガンが重要であった.
単純 C^* 環に対して分類が完了している多く
のクラス(TAF 環,純無限 C^* 環など)では,
K 理論的不变量は単に K_0 群(順序群として)
と K_1 群の組であった.これらの単純 C^* 環の
クラスに対してはどのような不变量が表
れるかを決定する実現問題も解決している.

単純でない C^* 環に対しては,この組だけでは
不十分である.最も自然な K 理論的不变量の
候補は,イデアル,商などの K 群及びそれ
の間の自然な写像全てを集めた対象である.
この対象は K-web と呼ばれている.ある限
られた状況では,この K-web が完全不变量とな
っていることが知られている一方,少し複雑
な状況では完全不变量ではないということ
も知られているという状況であった.

2. 研究の目的

本研究が目指す究極的な目標は,「単純とは
限らない C^* 環の分類理論」を完成させること
である.上記のような研究開始当初の背景を
受け,まずは,単純とは限らない C^* 環のクラ
スに条件を課して限定することにより,K 理
論的,ホモロジー代数的,位相的困難に起因
する数々の困難に一つ一つ取組み乗り越え
ていくことで,究極的な目標に向かっていく.
また,K-web に代わる完全不变量となる K 理
論的不变量の探索や,それらの不变量に対す
る実現問題の解決も本研究の目的の一つで
ある.

本研究で,主な対象とする単純とは限らない
 C^* 環のクラスは,有限空間上の C^* 環とよばれ
るクラスである.これらの C^* 環に対して,いく
つかの条件下で分類理論を押し進めるこ
とを目標とする.具体的には,各状況下での
適切な K 理論的不变量の発見,グラフ環など
の具体例を用いた不变量の実現,この不变量
を用いた有限空間上の純無限 C^* 環の分類など
を目的とする.これら本研究の目的は次の
3つにまとめることができる.

(1) 良い有限空間 X に対して,K-web を拡張
した X 上の C^* 環の不变量を提案し,それが純
無限などの良い性質を満たす C^* 環のクラス
に対して完全不变量となっていることを示
す.

(2) (1)で挙げた X に対して,実次元 0 な
どの条件下で(1)で提案した不变量をより
簡単な不变量に置き換えることができるこ
とを示し,その不变量に対する実現問題を解
決する.

(3) 実次元 0 グラフ環に対して半群を用い
た不变量を定義し,これが完全不变量である
ことを示す.

ここで,(3)に表れたグラフ環とは,いつ実
次元 0 になるか,いつ有限空間上の緊密な C^*
環になるかが比較的簡単に判断できる C^* 環
のクラスである.このクラスに関しては
K-web などの K 理論的不变量を具体的に計算
する方法があり,K-web を用いた「グラフ環
の特徴づけ予想」と呼ばれる予想があるが,
(2)の研究の帰結として,良い有限空間 X に
対してこの予想を肯定的に解決することも
目的の一つである.

3. 研究の方法

まずは,K-web に関する普遍係数定理が成り
立つことが知られているアコードィオン空
間に對して,実次元 0 等の条件を課せば K-web
をより扱いやすい不变量に置き換えること
ができるということを示し,それを用いてグラ
フ環の特徴づけ予想を肯定的に解決する.
その後,より一般的な有限空間に對して,K-web
を拡張した不变量の導入,それに関する普遍
係数定理の証明,ある条件下での扱いやすい
不变量への還元,グラフ環を用いた実現問題
の解決を行い,グラフ環の特徴づけ予想を肯
定的に解決する.これらの研究と同時進行で,
グラフ環に對して半群を用いた不变量を導
入し,これが完全不变量であることを証明す
るという研究も行う.また計画をスムーズに
進めるため,この 2 つの研究を研究期間を通
して比較し,研究協力者と絶えず連絡を取り
合う.得られた成果は雑誌に投稿するだけで
なく,国内外の研究集会で発表する.さらに,
研究集会の参加者との研究連絡を行い,最新
の研究動向についての情報交換などを行う.

4. 研究成果

本研究では、当初の計画通り有限空間上の C^* 環に対する様々な結果を得ただけではなく、研究を開始したときには想像もしていなかった多くの結果を得ることにも成功した。得られた成果を以下の 3 項目に分けて説明する。

・ Cuntz-Krieger 環の K 理論に関する結果
Arklint 氏と Bentmann 氏と共に、グラフ環の特別なものである Cuntz-Krieger 環の K 理論の研究を行った。その結果は、論文¹と論文²という 2 編の論文にまとめ、査読つきの雑誌で出版された。また、アメリカと東京で行われた国際研究集会および大阪で行われた国内の研究集会でこの結果に関する講演を行った（学会発表³, ⁴, ⁵）。論文¹では、「研究の目的」内に書かれている(1)と(2)の目的に対し、3 種類ほどの有限空間 X のクラスに対してほぼ満足のいく結果を得ることができた。その応用として論文²では「研究の目的」内で説明されている「グラフ環の特徴づけ予想」をある種の有限空間のクラスに対して解くことに成功した。結果を論文として発表した上記の有限空間のクラス以外にも、ある特別な有限空間に対しては、同様の結果が得られることが分かった。しかも同様の手法を適用できる有限空間のクラスの限界に関するある種の予想を立てることができた。さらにこの限界を超えた有限空間の中でも特別なものに対しては、2 次コホモロジーのある元を不变量に加えると分類できるかもしれないという着想を得た。

・ 単純でないグラフ環に関する結果

Eilers 氏、Tomforde 氏、West 氏と共に、グラフ環の K 理論的不变量としてどのようなものが出てくるかを完全に決定し、査読つきの雑誌で出版した（論文⁶）。グラフ環は有限空間上の C^* 環の興味深い例を数多く提供している重要な C^* 環のクラスである。グラフ環のイデアル構造や K 理論的不变量は、全てグラフの言葉で記述することができ、グラフ環が一つ有限空間上の緊密な C^* 環になるのかということ、グラフの言葉で記述することができる。しかし、どのような K 理論的不变量がグラフ環の K 理論的不变量として得られるかという問題については、部分的な必要条件が知られているだけであった。本研究の研究代表者は Eilers 氏、Tomforde 氏、West 氏と協力し、グラフ環の K 理論的不变量として得られるための必要条件を列挙し、それらが実は十分条件であることを、与えられた K 理論的不变量からグラフを構成することを示した。この構成において、代数的な問題を順序構造を考慮に入れながら解かなくてはいけないが、本研究の研究代表者はこれまでの関連する研究での経験をもとにその問題を解くことに成功した。この共同論文の結果

は、本研究の大きな目的の 1 つである「グラフ環と呼ばれる C^* 環のクラスを、K-web を用いた K 理論的不变量で分類する」ことに繋がる非常に有用な成果である。

また、Eilers 氏、Ruiz 氏、Tomforde 氏と共に、与えられた A F 環がいつグラフ環になるかという問題に関する研究を行い、満足のいく結果を得ることができた。その成果は、査読つきの雑誌で出版されている（論文⁷）。特に A F 環が小さな有限空間上の頗密な C^* 環であったときは、この結果は完全な解答を与えている。

これらの研究は、デンマークやカナダでの研究交流を通して遂行した 上記 2 つの結果は、有限空間上のグラフ環の分類をする上で有意義な結果である。

・ C^* 環の分類理論に関する幅広い結果

査読つきの雑誌で出版された残り 3 本の論文（論文⁸, 論文⁹, 論文¹⁰）では、研究開始当初では思いつかなかった C^* 環およびその分類に関する結果をそれぞれ得ている。これらの結果は本研究が目指す究極的な目標である「単純とは限らない C^* 環の分類理論の完成」に対して少なからぬ示唆をもたらしてくれるものと思われる。

論文⁸では、Farah 氏と共に、可分ではない UHF 環の分類に関する結果を得た。可分である UHF 環の場合は超自然数が完全不变量であることが古くから知られているが、我々の研究で可分ではない UHF 環に対しては超自然数が同じでも同形でないものが多く存在することが分かった。そのような最初の例はグラフから作られたが、その構成方法を工夫することにより、濃度の観点で可能な限り多くの互いに同形でない可分ではない UHF 環の分類を構成することができた。この結果は、よい不变量で分類を行うときに可分であるという性質が非常に重要な役割を果たすことを証明したという点において、非常に意義深い成果であると言える。

論文⁹は、離散群から作られる C^* 環と群の近似性質との関連についての Ogontbayar 氏との共同研究がまとめられている。離散群からいくつかの自然な C^* 環（や von Neumann 環）を定義することができるが、その中で一様 Roe 環と呼ばれる C^* 環と群 von Neumann 環との共通部分として得られる C^* 環が、 C^* 環として最も自然に表れる被約群 C^* 環と一致するかどうかという問題があり、Ogontbayar 氏との共同研究では、群の近似性質を用いてこの問題に挑戦した。この問題の完全解決を得ることはできなかったが、2 種類の C^* 環が一致するかどうかという問い合わせ係数付きにしたもののが、離散群の近似性質の特徴づけとなっていることを証明した。この結果を用いて、未解決だったある一つの疑問に完全な解答を与えた。また、2 種類の C^* 環が一致するの

ではないかと思われる状況証拠をいくつか示した。これらの成果をまとめた論文が査読付きの雑誌に掲載されることが決定した。この研究成果だけでなく、それを得る過程で獲得した技術は本研究の目的達成への大きな足掛かりとなる。

論文では、Ara 氏と Exel 氏と共同で、ある種の力学系に不隨する C^* -環の研究を行った。この研究においては半群が重要な役割を演じ、ここで得られた結果や知見は、「研究の目的」内に書かれている(3)の目的に対して大いに役に立つと思われる。これら出版した結果の他にも、 C^* -環の分類理論に関する幅広い結果を得て、国内外での研究集会で発表を行った(学会発表、、、、)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

Soren Eilers, Takeshi Katsura, Mark Tomforde and James West, The Ranges of K-theoretic Invariants for Nonsimple Graph Algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 査読有, 368 (2016), no. 6, 3811-3847.

Ilijas Farah, Takeshi Katsura, Nonseparable UHF algebras II: Classification, *Math. Scand.*, 査読有, 117 (2015), no. 1, 105-125.

Takeshi Katsura, Otgonbayar Uuye, On the invariant uniform Roe algebra, *J. Operator Theory*, 査読有, 72 (2014), no. 2, 549-556.

Soren Eilers, Takeshi Katsura, Efren Ruiz and Mark Tomforde, Identifying AF-algebras that are graph C^* -algebras, *J. Funct. Anal.*, 査読有, 266 (2014), no. 6, 3968-3996.

Sara Arklint, Rasmus Bentmann and Takeshi Katsura, The K-theoretical range of Cuntz-Krieger algebras, *J. Funct. Anal.*, 査読有, 266 (2014), no. 8, 5448-5466.

Sara Arklint, Rasmus Bentmann and Takeshi Katsura, Reduction of filtered K-theory and a characterization of Cuntz-Krieger algebras, *J. K-Theory*, 査読有, 14 (2014), no. 3, 570-613.

Pere Ara, Ruy Exel and Takeshi Katsura, Dynamical systems of type (m,n) and their C^* -algebras, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 査読有, 33 (2013), no. 5, 1291-1325.

[学会発表](計6件)

Takeshi Katsura, On magic square C^* -algebras, Kyoto Operator Algebra Seminar, 2017年3月8日, 京都大学(京都府・京都市)

Takeshi Katsura, Warped crossed products and their applications, 作用素環論の最近の進展, 2016年9月12日, 数理解析研究所(京都府・京都市)

Takeshi Katsura, Classification of C^* -algebras with finitely many ideals, Workshop on Operator Algebras, 2013年5月12日, 東京大学(東京都・目黒区)

Takeshi Katsura, Characterization of Cuntz-Krieger algebras, 作用素論・作用素環論研究集会, 2012年11月24日, 大阪教育大学(大阪府・大阪市)

Takeshi Katsura, Problems on non-simple semiprojective C^* -algebras, Workshop on Semiprojective C^* -Algebras, 2012年9月4日, コペンハーゲン(デンマーク)

Takeshi Katsura, Classification of purely infinite C^* -algebras with finitely many ideals, GPOTS 2012, 2012年5月30日, ヒューストン(アメリカ合衆国)

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.keio.ac.jp/~katsura/papers/index.html>

6. 研究組織

(1)研究代表者

勝良 健史 (KATSURA Takeshi)
慶應義塾大学, 理工学部, 准教授
研究者番号: 50513298

(2)研究分担者

無し

(3)連携研究者

無し

(4)研究協力者

無し