

Title	起伏のある水底上の水の波の漸近解析
Sub Title	Asymptotic analysis of water waves over a periodically oscillating bottom
Author	井口, 達雄(Iguchi, Tatsuo) 谷, 温之(Tani, Atsushi) 高山, 正宏(Takayama, Masahiro) 隠居, 良行(Kagei, Yoshiyuki)
Publisher	
Publication year	2015
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2014. )
JaLC DOI	
Abstract	<p>水底に凹凸がある場合の浅水波近似と長波長近似, 特に, 水底の凹凸の水平方向の空間スケール<math>\varepsilon</math>が水面のそれよりも非常に小さく, かつ周期的に変化している場合を考察した。浅水波方程式の解の均質化極限(<math>\varepsilon \rightarrow 0</math>)を多重尺度法により解析し, その挙動を具体的に表示した。また, Boussinesq型方程式の解の均質化極限と長波長近似を同時に行う極限を解析した。さらに, 水の波の変分構造を利用して得られる近似モデルの構造を明らかにした。</p> <p>We considered the shallow water and long wave approximations for water waves over a periodically oscillating bottom, whose horizontally spatial scale is <math>\varepsilon</math>. We analyzed the homogenized limit (<math>\varepsilon \rightarrow 0</math>) of the solution to the shallow water equations by the method of multiple scales and determined explicitly the behavior of the solution. We also analyzed the homogenized limit and the long wave limit at the same time to a Boussinesq type equation. Moreover, we clarified the structure of a model for water waves which is obtained by the use of the variational structure.</p>
Notes	研究種目: 基盤研究(B) 研究期間: 2012 ~ 2014 課題番号: 24340030 研究分野: 数物系科学
Genre	Research Paper
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_24340030seika">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_24340030seika</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 28 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24340030

研究課題名(和文)起伏のある水底上の水の波の漸近解析

研究課題名(英文)Asymptotic analysis of water waves over a periodically oscillating bottom

研究代表者

井口 達雄 (Iguchi, Tatsuo)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：20294879

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,200,000円

研究成果の概要(和文)：水底に凹凸がある場合の浅水波近似と長波長近似，特に，水底の凹凸の水平方向の空間スケールが水面のそれよりも非常に小さく，かつ周期的に変化している場合を考察した．浅水波方程式の解の均質化極限(0)を多重尺度法により解析し，その挙動を具体的に表示した．また，Boussinesq型方程式の解の均質化極限と長波長近似を同時に行う極限を解析した．さらに，水の波の変分構造を利用して得られる近似モデルの構造を明らかにした．

研究成果の概要(英文)：We considered the shallow water and long wave approximations for water waves over a periodically oscillating bottom, whose horizontally spatial scale is . We analyzed the homogenized limit (0) of the solution to the shallow water equations by the method of multiple scales and determined explicitly the behavior of the solution. We also analyzed the homogenized limit and the long wave limit at the same time to a Boussinesq type equation. Moreover, we clarified the structure of a model for water waves which is obtained by the use of the variational structure.

研究分野：数物系科学

キーワード：水の波 水面波 浅水波 浅水波近似 長波長近似

### 1. 研究開始当初の背景

河川を流れる水や大海原を満たしている海水と大気が接する水面の運動は水の波と呼ばれ、古くから研究の対象となってきた。その水の波は、重力場の下での非圧縮かつ非粘性流体の渦なし流に対する自由境界問題として偏微分方程式系によって数学的に定式化されるが、その解析は易しくなく、今日でもなお研究者の興味を引いてやまない。その解析の困難な点として、方程式の非線形性、境界の形状が未知であること、粘性によるエネルギー散逸の構造をもたないことが挙げられる。この困難さを回避するために、物理学者および工学者は水の波の基礎方程式系を適当な方法で近似し、その近似方程式の解の挙動を調べることによって水の波の挙動を理解してきた。

その代表的な近似として浅水波近似および長波長近似がある。浅水波方程式は津波伝播のシミュレーションモデルとして使われており、また長波長近似により得られる KdV 方程式はソリトンを記述する方程式として有名である。近年の水の波の基礎方程式系に対する数学解析の進歩により、基礎方程式系の解と近似モデルとの解との誤差評価を理論的に行うことが可能となり、浅水波近似や長波長近似の数学的に厳密な正当化が与えられるようになった。

しかしこれらの結果では、水底が平らな場合、あるいは水底に凹凸があってもその凹凸が非常に緩やかな場合しか調べられていない。浅水波近似や長波長近似では、水深に比較して波長が非常に長い波を対象としているので、そのスケールでは水底の凹凸は激しく変化していると見なす方がより現実的である。水底が水平方向に関して非常に短い周期で周期的に変化する場合の KdV 近似については、Rosales, Papanicolaou (1983) による先駆的な研究があり、解の存在を暗黙のうちに仮定している形式的な議論ではあるが、水底の凹凸により波の伝播速度が遅くなるという結果を出している。さらに、そこでは、水底の凹凸がランダムな場合も考察されている。

この結果を数学的に厳密に正当化しようとする試みが Craig et al. (2005, 2008, 2009) で行われている。そこでは、水の波の基礎方程式系がハミルトンの正準方程式として書けることに注目し、ハミルトニアンの近似という立場で正当化している。これは方程式系の近似を正当化したことに対応しており、水の波の解が近似方程式の解で近似されるかどうかについては何も答えていない。さらには、意味のある時間区間における水の波の解の存在も保証してはいなかった。また Craig et al. (2012) では、同様な水底上での水の波の浅水波近似を考察し、高次の近似方程式を導出しているが、やはり形式的な議論で終わっており、解の近似という意味での正当性は証明されていなかった。

### 2. 研究の目的

「研究開始当初の背景」欄において記したように、水底に凹凸がある場合の水の波の浅水波近似および長波長近似の数学的に厳密な正当性を与えることを目的とした。特に、水底の凹凸の水平方向の空間スケールが水面のそれよりも非常に小さく、周期的に変化している場合を主要な研究対象とした。このとき、適当な無次元変数で水底を表わすと  $z = b(x/\epsilon)$  というグラフ状の曲面になる。ここで、 $\epsilon$  は無次元パラメータであり関数  $b(\cdot)$  は周期関数である。本研究では、水の波の浅水波極限や長波長極限と同時に  $\epsilon \rightarrow 0$  とする極限を調べ、その極限の数学的に厳密な正当性を与えることを目的とした。

さらに、必要に応じて新たな近似モデル方程式を提唱することも目的とした。

### 3. 研究の方法

(1) 関連する文献を精読することにより水の波の基礎方程式系の特性をよく理解し、問題の本質を見極めると同時に、問題点を克服するための新しい計算手法や新たな視点を見出すことに努めた。

(2) 文献の内容が完全に理解できなかつたり、文章中には陽に書かれていない隠れたアイデアが掴めないような場合、その著者を招聘するか研究代表者が当該研究機関を訪問して知識の提供を求め、問題のより良い理解に努めた。

(3) 関連する研究者が多数参加する研究集会に参加したり、研究代表者が主催している慶應義塾大学理工学部での『非線形解析セミナー』に関連研究者を招聘し、講演をして頂いた。それらを通して最新の研究成果に触れたり、研究討論を行って新たな視点を模索した。

(4) 新しい計算手法や新たな視点を基にして、研究代表者、研究分担者、連携研究者が独立に計算を行った。その計算は紙面上での手計算が中心であった。そして、お互いに密に研究連絡を取り合うことによってアイデアを共有したり研究の進展状況を把握したりして研究の進展に努めた。

### 4. 研究成果

(1) 均質化過程を詳しく調べるために、先に浅水波極限を行いそれから均質化  $\epsilon \rightarrow 0$  を行うことを調べた。具体的には、先行結果で浅水波極限に対する厳密な証明が与えられているので、2次元空間の場合の浅水波方程式の解に対して  $\epsilon \rightarrow 0$  の時の挙動を調べ、Riemann 不変量を最大限に利用して、 $\epsilon \rightarrow 0$  の時の解が水底が平らな場合の解に収束することを示した。さらに、多重尺度法による漸近解析を行い、解のオーダー  $\epsilon^2$  の項を関数

bを用いて具体的に書き下し, 短い空間スケール  $x/\ell$  および早い時間スケール  $t/\tau$  に関する解の挙動を詳しく解析した.

(2) 均質化と長波長近似を同時に行うことを調べるために, 2次元空間の場合の高次浅水波近似方程式系である Green-Naghdi 方程式を更に長波長近似した Boussinesq 型の近似方程式を研究対象とした. この方程式には高階の分散項が含まれるため Riemann 不変量の方法は適用できないが, エネルギー法を最大限に利用して,  $t=0$  の時の解の漸近挙動を調べた. その結果, Boussinesq 型方程式の解が effective KdV 方程式の解に収束することが示された. さらに,  $\epsilon$  という小さなオーダーではあるが, 水底の凹凸により波の伝播速度が遅くなることが示された.

(3) 水底に凹凸がある場合の水の波の浅水波近似の高次近似モデルの解析を行った. 特に, 水の波の基礎方程式系が有する変分構造を利用した近似方程式の初期値問題を考察した. その変分構造は Luke (1967) によって見出されていることはよく知られている. その Luke のラグランジュ関数における速度ポテンシャルを適当な関数系を用いて近似し, 近似ラグランジュ関数に対するオイラー・ラグランジュ方程式が近似方程式であり, 海岸工学の分野で提唱されていた. その近似方程式に対しては, 時刻  $t=0$  が時空間における特性曲面になっており, その初期値問題は一般には可解でない. 本研究では, その初期値問題が可解になるための必要十分条件を与えた. さらに, 自明解の周りでの線形化方程式系は浅水波近似と見なせることができ, しかも, 高次近似方程式として知られている Green-Naghdi 方程式よりも, さらに高次の近似になっていることを証明した. しかし, 本来の非線形方程式に対する正当化は今後の課題として残された.

(4) 粘性および表面張力が浅水波近似に与える影響を考察した. この場合, 浅水波近似は薄膜近似とも呼ばれる. 斜面を下る液膜の薄膜近似の正当性を与えることを念頭に置き, Reynolds 数, 斜面の傾斜角は小さいという技術的な制限がつくものの, 無次元化した基礎方程式系の解に対して, 液膜の厚みと代表波長の比である無次元数に関する解の一樣評価を導出した.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計10件)

Yuuta Murakami, Tatsuo Iguchi, Solvability of the initial value problem to a model system for water waves, Kodai Math. J., 査読有, Vol. 38,

2015, 470-491.

Hiroyasu Fujiwara, Tatsuo Iguchi, A shallow water approximation for water waves over a moving bottom, Adv. Stud. Pure Math., 査読有, Vol. 64, 2015, 77-88.

Hirotsada Honda, Atusi Tani, Some boundedness of solutions for the primitive equations of the atmosphere and the ocean, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 査読有, Vol. 95, 2015, 38-48. DOI:10.1002/zamm.201200216

Masashi Aiki, Tatsuo Iguchi, Motion of a vortex filament with axial flow in the half space, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 査読有, Vol. 31, 2014, 1311-1335. DOI:10.1016/j.anihpc.2013.09.004

Tatsuo Iguchi, Initial value problem for water waves and shallow water and long wave approximations, Emerging Topics on Differential Equations and Their Applications, Nankai Ser. Pure Appl. Math. Theoret. Phys., 査読有, Vol. 10, 2013, 24-40. DOI:10.1142/97898144449755\_0003

Morimichi Umehara, Atusi Tani, Free-boundary problem of the one-dimensional equations for a viscous and heat-conductive gaseous flow under the self-gravitation, Math. Models Methods Appl. Sci., 査読有, Vol. 23, 2013, 1377-1419. DOI:10.1142/S0218202513500127

Masashi Aiki, Tatsuo Iguchi, Solvability of an initial-boundary value problem for a second order parabolic system with a third order dispersion term, SIAM J. Math. Anal., 査読有, Vol. 44, 2012, 3388-3411. DOI:10.1137/120861163

Masashi Aiki, Tatsuo Iguchi, Motion of a vortex filament in the half-space, Nonlinear Analysis, TMA, 査読有, Vol. 75, 2012, 5180-5185. DOI:10.1016/j.na.2012.04.034

Atusi Tani, Global solution to the conserved phase field equations of Penrose-Fife type, Commun. Appl. Anal., 査読有, Vol. 16, 2012, 703-726.

Hirotsuda Honda, Atusi Tani, Small-time existence of a strong solution of primitive equations for the ocean, Tokyo J. Math., 査読有, Vol. 35, 2012, 97-138.

[学会発表](計 37 件)

上野 大樹, 井口 達雄, A mathematical justification of the thin film approximation for the flow down an inclined plane, 日本数学会年会, 2015年3月24日, 明治大学(東京都・千代田区)

上野 大樹, 井口 達雄, A mathematical justification of the thin film approximation for the flow down an inclined plane, 現象解析特別セミナー 第7回, 2015年3月17日, 茨城大学教育学部(茨城県・水戸市)

井口 達雄, Solvability of a model system for water wave to a model system for water waves, The 7th Nagoya Workshop on Differential Equations, 2015年3月5日, 名古屋大学(愛知県・名古屋市)

井口 達雄, Solvability of a model system for water wave to a model system for water waves, Mathematical Analysis on Fluid Dynamics and Conservation Laws, 2015年1月23日, 東京工業大学(東京都・目黒区)

井口 達雄, Solvability of a model system for water wave to a model system for water waves, Linear and Nonlinear Waves, No.12, 2014年11月13日, ピアザ淡海 滋賀県立県民交流センター(滋賀県・大津市)

相木 雅史, 井口 達雄, Motion of a vortex filament in an external flow, 日本数学会秋季総合分科会, 2014年9月27日, 広島大学(広島県・東広島市)

上野 大樹, 井口 達雄, On the thin film approximation for the flow of a viscous incompressible fluid down an inclined plane, 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014年7月9日, Universidad Autonoma de Madrid, Madrid (Spain)

上野 大樹, 井口 達雄, On the thin film approximation for the flow of a viscous incompressible fluid down an inclined plane, RIMS 研究集会

「Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics」, 2014年7月3日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

相木 雅史, 井口 達雄, Motion of a vortex filament in an external flow, RIMS 共同研究「線形および非線形分散型方程式に関する最近の進展」, 2014年5月21日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

相木 雅史, 井口 達雄, Motion of a vortex filament in an external flow, IMS Workshop on Nonlinear PDEs from Fluids and Related Topics, 2014年3月24日, The Chinese University of Hong Kong, Shatin (Hong Kong)

上野 大樹, 井口 達雄, On the thin film approximation for the flow of a viscous incompressible fluid down an inclined plane, 日本数学会年会, 2014年3月18日, 学習院大学(東京都・豊島区)

相木 雅史, 井口 達雄, Motion of a vortex filament in an external flow, RIMS 研究集会「非圧縮性粘性流体の数理解析」, 2013年11月26日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

井口 達雄, On the thin film approximation for the flow of a viscous incompressible fluid down an inclined plane, International Conference: Mathematical Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations, 2013年11月13日, Kyushu University Nishijin Plaza(福岡県・福岡市)

井口 達雄, Solvability of the initial value problem to a model system for water waves, RIMS 研究集会「Kinetic Modeling and Related Equations: Conference in Memory of Seiji Ukai」, 2013年10月30日, 京都大学楽友会館(京都府・京都市)

相木 雅史, 井口 達雄, Motion of a vortex filament in an external flow, Linear and Nonlinear Waves, No.11, 2013年10月30日, ピアザ淡海 滋賀県立県民交流センター(滋賀県・大津市)

井口 達雄, Solvability of the initial value problem to a model system for water waves, The Second Pacific Rim Mathematical Association (PRIMA) Congress, 2013年6月27日,

Shanghai Jiao Tong University,  
Shanghai (China)

井口 達雄, Solvability of the initial value problem to a model system for water waves, JSPS-DFG Japanese-German Graduate Externship, The 8th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2013年6月17日, 早稲田大学(東京都・新宿区)

相木 雅史, 井口 達雄, Motion of a vortex filament with axial flow in the half space, Workshop on Nonlinear Dispersive PDEs, 2012年8月30日, 東北大学(宮城県・仙台市)

相木 雅史, 井口 達雄, Motion of a vortex filament with axial flow in the half space, RIMS 研究集会「流体と気体の数学解析」, 2012年7月6日, 京都大学(京都府・京都市)

相木 雅史, 井口 達雄, Motion of a vortex filament with axial flow in the half space, Keio-Yonsei Workshop, 2012年5月24日, 慶應義塾大学(神奈川県・横浜市)

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.keio.ac.jp/~iguchi/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

井口 達雄 (IGUCHI, Tatsuo)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号: 20294879

### (2) 研究分担者

谷 温之 (TANI, Atusi)

慶應義塾大学・理工学部・名誉教授

研究者番号: 90118969

高山 正宏 (TAKAYAMA, Masahiro)

慶應義塾大学・理工学部・助教

研究者番号: 90338252

### (3) 連携研究者

隠居 良行 (KAGEI, Yoshiyuki)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号: 80243913