慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	確率界面モデルの漸近挙動の研究
Sub Title	Study on asymptotic behavior of stochastic interface models
Author	坂川, 博宣(Sakagawa, Hironobu)
Publisher	
Publication year	2014
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2013.)
JaLC DOI	
Abstract	本研究では相分離界面や細胞膜などの数学的な解析を目指し, 対応するいくつかの格子上の確率モデルを取り上げその漸近挙動に関する研究を行った。具体的には細胞膜の確率モデルの１つであるΔφモデルにおいて２つの種類の自己ポテンシャルを加えた場合における系の自由エネルギーの挙動を調べた。また∇φ界面モデルの時間発展において原点に着目した場合に現れるGauss過程に対し持続確率の漸近挙動に関する評価を行った。 In this research, we considered several stochastic models on lattice and studied its asymptotic behavior for the mathematical analysis of phase separating interface and membrane. We first considered Laplacian phi model as a model of membrane and studied its free energy under the effect of two types of external potentials. We also considered a Gaussian process which appears in the time evolution of gradient phi interface model and obtained estimates on its persistence probability.
Notes	研究種目：若手研究(B) 研究期間：2011～2013 課題番号：23740086 研究分野：数物系科学 科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_23740086seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２６　年　　６　月　１１　日現在

機関番号：　３２６１２
研究種目：　若手研究(B)
研究期間：　2011～2013
課題番号：　２３７４００８６

研究課題名（和文）確率界面モデルの漸近挙動の研究

研究課題名（英文）Study on asymptotic behavior of stochastic interface models

研究代表者
坂川　博宣（Sakagawa, Hironobu）

慶應義塾大学・理工学部・講師

研究者番号：６０３４８８１０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円、（間接経費）　　510,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では相分離界面や細胞膜などの数学的な解析を目指し，対応するいくつかの格子上の確率モデルを取り上げその漸近挙動に関する研究を行った．具体的には細胞膜の確率モデルの１つである$\Delta\phi$モデルにおいて２つの種類の自己ポテンシャルを加えた場合における系の自由エネルギーの挙動を調べた．また$\nabla\phi$界面モデルの時間発展において原点に着目した場合に現れるGauss過程に対し持続確率の漸近挙動に関する評価を行った．

研究成果の概要（英文）：In this research, we considered several stochastic models on lattice and studied its asymptotic behavior for the mathematical analysis of phase separating interface and membrane. We first considered Laplacian phi model as a model of membrane and studied its free energy under the effect of two types of external potentials. We also considered a Gaussian process which appears in the time evolution of gradient phi interface model and obtained estimates on its persistence probability.

研究分野：　数物系科学

科研費の分科・細目：　数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：　確率論　統計力学　相分離界面　Gibbs測度　Gauss過程

１．研究開始当初の背景

統計力学における重要な問題の一つとして，例えば０度における水と氷といったように同一の温度で物質が二つ以上の異なる状態を取り得るという，いわゆる相転移の問題が挙げられる．そこでいま，二つ以上の異なる相が共存している状況を考えることにするとその異なる相を分離する境界面，いわゆる界面が観測される．このような相分離界面の微視的レベルでの確率モデルのひとつとして∇φ界面モデルがある．これはｄ次元格子上の Gibbs 確率場で，界面の高さを表す変数φに対し相互作用が∇φ(∇φは離散 gradient）から定まるものとして与えられる．このモデルは例えば Ising モデルと比べても更に単純化されたものではあるが，一方で系のエネルギーの高さに対する平行移動不変性など期待される物理的特徴を十分に備えており，特に相互作用ポテンシャルが２次関数の場合はｄ次元格子上の零質量Gauss場として与えられる．

このモデルは当初は統計力学における場の理論の研究で現れ１９７０~８０年代に活発に研究がなされていたが，１９９０年代後半から関連した確率論的および解析的な手法の発達に付随してその研究が統計物理に興味を持つ国内外の確率論研究者の間で盛んに行われていた．近年では２次元において＋と－の２つの境界条件をつけた場合に現れる高さ０のレベルの曲線のスケール極限が，パラメーター4 の Schramm-Loewner 方程式(SLE(4))に収束することが示されるなど確率論や統計力学の様々な問題と密接に関係して活発に研究が行われている状況であった．

２．研究の目的

∇φ界面モデルの大きな特徴として場の相関関数の減衰が多項式オーダーであり長距離相関を持つことが挙げられるが，これによって場が独立，もしくは相関関数が指数的減衰を示すような場合とは異なる様々な現象が現れる．本研究では∇φ界面モデルおよび関連した長距離相関を持つｄ次元正方格子上の確率場でΔφモデルと呼ばれるモデルを考える．このモデルでは物理的には系のエネルギーが雑に言って界面の曲率から定まり，細胞膜のモデルに対応することが知られている．これらに対し大数の法則，中心極限定理，大偏差原理といった確率論の極限定理などを通して相分離界面や細胞膜に関する様々な物理現象の本質を数学的に理解することと同時に同時に長距離相関を持つ確率場の解析に対する新たな数学手法と数学理論の開発を行うことを目指した．

本研究で取り扱うモデルは実際の現象を大きく単純化したものではあるが，それ故に数学的に厳密に扱うことが可能であり，相分離界面や細胞膜に現れる様々な現象に対し数学的に厳密な論証に基づいて確固たる裏づけを与えることは極めて重要なことである．また長距離相関を持つ確率場に対しては様々な極限定理が多くの場合非自明であり，確率界面モデルを題材にこれらを示すことは数学的にも価値のあることだと考えられる．

３．研究の方法

∇φ界面モデルは相互作用エネルギーが隣り合った２点間の変数の差から定まるので，格子上の Markov 場となり，大きく分けて確率場の研究のひとつとみなせる．特に相互作用ポテンシャルが２次関数の場合はｄ次元格子上の零質量 Gauss 場として与えられることからこの場合は 1970 年代から場の理論でも研究されており，そこでは自己ポテンシャルを加えた場合におけるランダムウォーク表現や鏡映正値性，各種の相関不等式といった手法が開発されている．これに加えて最近の∇φ界面モデルの解析で種々の確率論的手法が編み出されており，これらの数学および厳密統計力学の両面からの道具を通して解析を行うことが主な研究方法となる．

またΔφモデルでは∇φモデルが持つような単純な Markov 性を備えておらず，∇φモデルで用いられるランダムウォーク表現などの確率論的手法の多くがそのままでは成立せず対応する多くの道具の整備がまだ不十分である．現時点で使えるのはモデルの特性として現れる差分作用素や差分方程式などに対する確率論の道具を用いない解析的な手法であるが，これらでは不十分であり新たな数学的手法の開発が求められる．

４．研究成果

（１）Δφモデルにおいて相互作用ポテンシャルが２次関数で与えられる Gauss 型の場合を考え，そこに２つの種類の自己ポテンシャルを加えた場合における系の自由エネルギーについて調べ，以下の結果を得た．

・δ-ピンニングと呼ばれる場を高さ０のレベルに引き付けるような弱い自己ポテンシャルを加えた状況を考える．１次元においては Caravenna-Deushel(2008)によってピンニングの強さに応じて場の局在/非局在の相転移が起こることが示されていたが，４次元以上ではピンニングの強さによらず常に場が局在化されることを証明した．　特に∇φ界面モデルでは同じ設定を考えたとき任意の次元でピンニングの強さによらず場が局在化することが知られており，高次元ではΔφモデルが∇φモデルと似たような振る舞いをすることがわかる．２，３次元については未解決である．

・Δφモデルに対し場の上下に壁が置かれ揺動が制限された状況での挙動について調べ，壁の高さを無限大とする極限を取った場合の自由エネルギーの漸近挙動に関する評価を得た．特に次元に応じてその挙動は大きく変化する．対応する問題を∇φモデルで考えた場合はその証明において Griffith の不等式が鍵となったが，Δφモデルではこの不等式が成り立つこと自体がまだ証明されていない．そこでここでは Gauss 確率変数に対する相関不等式を応用し自由エネルギーの評価を得た．その結果として評価の成立が系が Gauss 型の場合に限られる結論となった．

２つの問題共に続いて考えられる重要な問題として，∇φモデルの時と同様にこれらの自己ポテンシャルを加えた下では場の相関が長距離相関から指数的減衰に変化することの証明およびその相関長の漸近挙動を調べることが挙げられるが，∇φモデルで成立する様々な道具の多くがΔφモデルでは成立しない，もしくは証明されていない状況でこれらの問題は未解決である．

（２）確率過程に関連した確率論の古典的な問題のひとつとして持続確率(persistence probability)と呼ばれるものがある．これは１次元の確率過程が時刻 T まで一定のレベルを超えないという事象の実現確率のことで，T を無限大に極限を取った時の漸近挙動が問題となる．この問題は生存確率または片側脱出問題などとも呼ばれ例えば１次元ブラウン運動や対称ランダムウォークの場合は T の -1/２乗のオーダーで減衰することがよく知られている．

近年，様々な物理的な問題等に関連していくつかの非マルコフ，非定常な確率過程に対し持続確率の評価の研究がなされている．時に数学的には厳密でないものの，KPZ(Kardar-Parisi-Zhang) 方程式や EW(Edwards-Wilkinson)方程式などの(1+1)-次元界面の時間発展モデルに対し，原点における界面の高さに着目した場合の持続確率の研究が活発であった．そこで高次元における界面モデルのひとつである∇φモデルの時間発展においてポテンシャルが２次関数の時に対応する d 次元正方格子上の無限次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程を考え，原点に着目した場合に現れる Gauss 過程に対する持続確率の数学的に厳密な評価を行った．特にその漸近挙動は次元に応じて大きく異なり，２，３，４次元では上下の評価のオーダーを一致させることは出来なかったが，１次元では多項式オーダーの減衰なのに対し，２次元以上ではそれよりずっと速く減衰し特に５次元以上では指数的に減衰するという評価を得た．

ここで考えた Gauss 過程は非マルコフ，非定常な確率過程でかつ長距離相関を持つものであり，既存の持続確率の研究にはなく，さらには最近 Dembo-Mukherjee(2014)によって証明された持続確率の漸近挙動に関する一般論にも当てはまらない．相関関数の挙動が次元によって大きく変わるため，証明の方法は次元に応じて異なり，特に２次元では最近の離散 Gauss 自由場の研究で開発された修正分枝ランダムウォークの手法を取り入れている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２　件）

① Hironobu Sakagawa,
Persistence probability for a class of Gaussian processes related to random interface models,
Advances in Applied Probability, (2015), 掲載受理，査読有．

② Hironobu Sakagawa,
On the free energy of a Gaussian membrane model with external potentials,
J. Stat. Phys., Vol.147, no.1, pp.18--34 (2012)，査読有．

〔学会発表〕（計　３　件）

① 坂川　博宣,
Persistence probability for a class of Gaussian processes related to random interface models,
Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2013 年 11 月 22 日, University of Tokyo.

② 坂川　博宣,
Persistence probability for a class of Gaussian processes related to random interface models,
無限粒子系と確率場の諸問題 VIII(short communication), 2012 年 10 月 20 日, 奈良女子大学.

③ 坂川　博宣,
On the free energy of a Gaussian membrane model with external potentials,
数理物理と確率解析，2012年3月12日，湘南国際村センター．

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０　件）

○取得状況（計　０　件）

６．研究組織

(1)研究代表者
坂川　博宣（SAKAGAWA　HIRONOBU）
慶應義塾大学・理工学部・講師
研究者番号：60348810

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
該当なし