

Title	非ニュートン流体の運動の数学解析
Sub Title	Mathematical analysis of the non-Newtonian fluids flow
Author	谷, 温之(Tani, Atusi) 井口, 達雄(Iguchi, Tatsuo) 高山, 正宏(Takayama, Masahiro) 野寺, 隆(Nodera, Takashi) 伊藤, 茂治(Ito, Shigeharu) 田中, 尚人(Tanaka, Naoto) 伊藤, 弘道(Ito, Hiromichi) 梅原, 守道(Umehara, Morimichi)
Publisher	
Publication year	2015
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2014. )
JaLC DOI	
Abstract	<p>非ニュートン流体運動として記述される自然諸現象のモデル方程式に対する非線形問題の適切性を数学解析面から研究した。 具体的研究成果の一部を記す。</p> <p>(1) 非ニュートン流体, 特に流れ学的構成則がジャヌマン共回転微分を持つ非圧縮粘弾性マックスウエル媒質中の2次元流が, 滑らかな初期値に対しても, 不連続性が生じ得ることを示し, その衝撃波の安定性について考察した。(2) 2次元斉次等方的弾性体内部に剛体線状亀裂があるとき, 層間剥離の生起, 不生起両場合に対し, その先端部分での漸近挙動を調べた。(3) 境界濡れ効果下でのヘレ-ショウセル中のフィンガリング現象に対して弱非線形解析を行った。</p> <p>Well-posedness of nonlinear problems for various natural phenomena, especially of those described as non-Newtonian fluids flow was established mathematically. Some of research results are as follows.</p> <p>(1) For a non-Newtonian fluid flow, especially for the 2-dimensional flow of incompressible viscoelastic Maxwell media with a Jaumann corotational derivative in the rheological constitutive law we proved that the discontinuity can develop even from smooth initial data, and the stability of shocks in it without retardation. (2) An equilibrium problem for 2-dimensional homogeneous isotropic linearized elasticity with a rigid line inclusion was studied in both not delaminated and laminated cases, and investigated an asymptotic behavior of a solution near a tip of a rigid line inclusion. (3) The fingering pattern of radially growing interface in a Hele-Shaw cell was shown in the framework of weakly nonlinear analysis under the wetting layer effect of the displacing fluid taken into account.</p>
Notes	研究種目: 挑戦的萌芽研究 研究期間: 2011 ~ 2014 課題番号: 23654055 研究分野: 非線形解析, 数理物理
Genre	Research Paper
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_23654055seika">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_23654055seika</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 1 日現在

機関番号：32612

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2014

課題番号：23654055

研究課題名(和文)非ニュートン流体の運動の数学解析

研究課題名(英文)Mathematical analysis of the non-Newtonian fluids flow

研究代表者

谷 温之(Tani, Atusi)

慶應義塾大学・理工学部・名誉教授

研究者番号：90118969

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：非ニュートン流体運動として記述される自然諸現象のモデル方程式に対する非線形問題の適切性を数学解析面から研究した。具体的研究成果の一部を記す。

(1) 非ニュートン流体。特に流れ学的構成則がジャヌマン共回転微分を持つ非圧縮粘弾性マクスウェル媒質中の2次元流が、滑らかな初期値に対しても、不連続性が生じ得ることを示し、その衝撃波の安定性について考察した。(2) 2次元斉次等方的弾性体内部に剛体線状亀裂があるとき、層間剥離の生起、不生起両場合に対し、その先端部分での漸近挙動を調べた。(3) 境界濡れ効果下でのヘレ-ショウセル中のフィンガリング現象に対して弱非線形解析を行った。

研究成果の概要(英文)：Well-posedness of nonlinear problems for various natural phenomena, especially of those described as non-Newtonian fluids flow was established mathematically. Some of research results are as follows.

(1) For a non-Newtonian fluid flow, especially for the 2-dimensional flow of incompressible viscoelastic Maxwell media with a Jaumann corotational derivative in the rheological constitutive law we proved that the discontinuity can develop even from smooth initial data, and the stability of shocks in it without retardation. (2) An equilibrium problem for 2-dimensional homogeneous isotropic linearized elasticity with a rigid line inclusion was studied in both not delaminated and laminated cases, and investigated an asymptotic behavior of a solution near a tip of a rigid line inclusion. (3) The fingering pattern of radially growing interface in a Hele-Shaw cell was shown in the framework of weakly nonlinear analysis under the wetting layer effect of the displacing fluid taken into account.

研究分野：非線形解析, 数理物理

キーワード：非ニュートン流体流 Maxwell fluid Navier's slip condition Hele-Shaw flow elastic body primitive equation water wave Hasegawa-Wakatani 方程式

### 1. 研究開始当初の背景

自然界における諸現象は、多くの場合観測、実験等を通して、その数学モデルを構築し、数学解析を行うことにより解明される。しかし、全ての現象がモデル化され、数学的議論の対象になるわけではない。そこで、本研究では Rational Mechanics の立場からモデル化された非線形問題、特に非ニュートン流体（ニュートン流体を含む）の運動を記述する基礎方程式系に対する非線形諸問題の数学解析を試みる。殆ど全ての現象は非ニュートン流体と考えられる。実際、現実的には純粋な固体も、純粋な液体もなく、固体的なもの、液体的なものがあるだけである。履歴的性質を示す物体はすべて、これら両性質を持つもの、すなわち非ニュートン流体と考えられる。

(1) 非ニュートン流体として扱わなければならない現象としては、液化化現象、土石流、火砕流、雪崩等が挙げられる。これらはまさしく Damage Mechanics の主要課題でもあり、数学上の問題であるだけでなく、社会的にも解決しなければならない問題である。併せて数学的な解明が必要とされている問題である。

(2) 津波、台風、ハリケーン等は流体的な破壊現象であり、金属疲労、金属腐食、高層ビルの老朽化等は固体的な破壊現象である。それぞれの現象において適切なストレステンソル選び、それにより記述された非ニュートン流体の運動として数理解析することが重要である。

### 2. 研究の目的

自然界における諸現象の数理解析モデルを構築し、それらを数学解析することを目的とする。全ての現象がモデル化出来、数学的議論の対象になるわけではないので、Rational Mechanics の立場からモデル化出来る非線形問題、特に非ニュートン流体（ニュートン流体を含む）の運動を記述する基礎方程式系に対する非線形諸問題の数学解析を研究対象とする。殆ど全ての現象は広い意味で非ニュートン流体運動と考えられるので、それに関連する次の 10 個の具体的項目を研究対象とする。

(1) 津波のモデル方程式の解析 (海底地震との関連を考慮に入れた流体運動)

(2) Hurricane のモデル方程式の解析 (Emanuel による新モデルの解析を含む)

(3) 地球内部の熱対流問題の解析 (通常の熱対流現象におけるものとは異なる Boussinesq 近似 (Pukhnachev, Rajagopal モデルを含む))

(4) (粘)弾性方程式の 2 相問題、亀裂伝播問題の解析

(5) セカンドグレード、サードグレード非ニュートン流体方程式の滑る境界値問題の解析

(6) 非ニュートン流体に対する 2 相問題、自由境界問題の解析

(7) 粉流体方程式の解析

(8) 血液流体に対する初期境界値問題の解析 (脈動流, 有限長管, 曲管, 可変管内流れの解析)

(9) マントル流の解析

(10) 非線形力学における問題の解析 (薄殻の運動, flutter, 空間的周期性を有する構造物に生じる非線形波動の解析)

10 項目は全てにおいて相互関連性が深いいため、統合的横断的研究を目的とする。

### 3. 研究の方法

自然現象は相互に関連して起こっている。個別の問題を個別に議論することも重要であるが、それらをより高位の研究課題である、「相互関係の確立を見据えた研究」の一環として研究することが重要である。それら重要な非線形問題は諸方面から種々の方法を駆使して解明されなければならないが、最終的には、本質的に数学解析されることが望ましい。本研究課題に対する研究方法は、そのような方針に基づき、数学解析理論 (偏微分方程式論), 物理学理論, rational mechanics theory, 数値解析等を有機的に統合して問題の解決に当たる。そのため、研究代表者の研究経歴と各分担者の研究実績を踏まえ、研究計画を立案した。併せて、世界的に著名な研究者 5 名 (V.A. Solonnikov (Steklov 数学研究所, St. Petersburg, Russia), V.V. Pukhnachev, A.M. Khludnev (Lavrentiev 流体研究所, Novosibirsk, Russia), M.M. Lavrentiev (Novosibirsk 大学, Novosibirsk, Russia), K.R. Rajagopal (Texas A&M 大学, USA)) を海外研究協力者として加えた。彼らとの研究活動の連携は本研究課題の遂行、進展だけではなく、将来この分野を担う若手研究者の育成にも期待できる。

### 4. 研究成果

(1) 非ニュートン流体 (ニュートン流体を含む) に対する 2 相問題、自由境界問題の解析:

1 非ニュートン流体の物質定数の推定装置の一つである Rheometer 中の単純運動に対して、粘性係数が圧力に依存する場合の数学解析を行った。この研究は工学上重要な結果である。セカンドグレード、サードグレード等非ニュートン流体流に対する同様の問題に対する考察が進展中である。

2 重力、表面張力の影響下で、斜面を下る粘性流体 (ニュートン流体) の運動に対して、薄幕近似を行い、そのスケールパラメータを含む非線形初期値問題の解がパラメータに関して一様有界性を持つことを示した。この幾何学的設定の下での薄幕近似に対する結果は初めての結果である。

3 Hele-Shaw セル中の fingering 現象に対して、ニュートン流体運動に境界濡れ効

果を取入れた自由境界問題の弱非線形解析を行った。この問題の simple case に対する非線形数学解析を、準定常近似法を用いて行った。Hele-Shaw 問題の複素関数論を用いた結果は多数あるが、偏微分方程式論に基づく結果は少ない。2相問題、表面張力効果、境界濡れ効果を取入れた自由境界問題の非線形数学解析は現在進行中である。

4 数値気象予報の基礎方程式である大気、海洋の各モデル方程式、primitive equation、の自由境界問題に対する適切性の証明とそれらの解成分のうち、温度、湿度、塩分濃度の最良有界評価を求めた。さらに、大気/海洋2相モデル方程式の自由境界問題の時間局所適切性を調べた。Primitive equation の自由境界問題の数学解析は世界初の結果である。現在時間大域解の構成を行っている。

5 1次元圧縮性粘性流体星の時間大域解を自己重力作用下で構成した。この問題に対する現在までの最良結果で、世界中から注目されている。

#### (2) 粉流体方程式の解析:

粉粒体を非圧縮、非斉次流体状物体と見なしたモデル方程式に対する初期-境界値問題の適切性を Navier 型滑り境界条件の下で証明した。Navier 型滑り境界条件は最近のホットな話題である。Tani (一般 Navier 型) 滑り境界条件下での同問題の研究が進展中である。

#### (3) (粘)弾性方程式の2相問題、亀裂伝播問題の解析:

1 2つの有界類似弾性体間に、Coulomb 摩擦が作用する時の亀裂界面の形状決定問題に対する数学解析を行った。

2 2次元斉次等方的弾性体内部に剛体線状亀裂があるとき、層間剥離の生起、不生起両場合に対し、その先端部分での漸近挙動を調べた。

両結果とも高評価を得ている。3次元、非ニュートン媒質に対する同問題の研究が進展中である。さらに、(粘)弾性方程式の exact 境界条件下での2相問題、亀裂進展問題の解析が展開中である。それらの空間2次元問題の解析方法と Hele-Shaw セル中の流れに対する方法とは共通点を持っているので、非ニュートン流体に対する Hele-Shaw 問題、ベキ則(粘)弾性体に対する亀裂問題についての展望を得ている。

#### (4) 津波のモデル方程式の解析:

1 海底変形に伴う水の波の運動を記述する新しいモデル方程式を提案し、それに対する非線形問題の数学解析をおこなった。水底の凹凸が時間変化する場合の影響について考察した。その時間変化が比較的遅い場合には、水の波の基礎方程式系が変形

Green-Naghdi 方程式によって高次近似されることを証明した。

2 水の波の運動に対する初期値問題の適切性、浅水波近似、津波モデル、長波近似の数学的正当性を証明した。

3 1次元浅水波モデルに対する解の時間漸近安定性を、ある条件下で1パラメータ族の定常解が存在すること、初期データが定常解に十分近いときには時間大域一意解が存在すること、その時間大域解が定常解に漸近することを証明することを通して、確立した。

4 水の波の基礎方程式系が有する変分構造から導かれた Lagrangian における速度ポテンシャルを近似することにより得られた近似 Lagrangian に対する Euler-Lagrange 方程式の初期値問題を考察した。その初期値問題は、初期面が特性曲面となっているので、一般には可解でないが、その可解性のため必要十分条件の特徴付けを与えた。さらに、自明解における線形近似方程式系が、浅水波近似と見なせること、Green-Naghdi 方程式よりも高次近似方程式となっていることを示した。

上記結果は素晴らしい結果であるが、いずれも水の波(渦なし)に対しての結果である。より現実的な Euler 方程式(渦あり)に対して考察すべきで、現在研究進展中である。

#### (5) Hurricane のモデル方程式の解析:

3次元半空間内における渦糸の運動、特に渦糸が端点を持つ場合を考察した。その運動は3階の分散型非線形偏微分方程式となる。境界条件としては、端点で曲率が零になる場合と、端点で渦糸が境界面に直交する場合を考え、その初期値-境界値問題の時間局所的な適切性を証明した。

Hurricane 解析において最重要面は、その内部構造を知ること、それが Hurricane 発生・成長過程の解析に不可欠である。そのため Emanuel モデル(現在における唯一のモデル)と渦糸方程式の研究結果を踏まえたバスタブ中の渦運動に対する初期-境界値問題の研究を継続している。

#### (6) その他の非線形問題の解析:

1 抵抗性ドリフト波乱流の2粒子モデル方程式である Hasegawa-Wakatani 方程式に対する初期-境界値問題の適切性と、零抵抗極限問題を解いた。さらに、同初期-境界値問題の適切性を、解空間がステパノフの意味での概周期関数である場合に証明した。この結果は世界最初の結果である。同方程式に対する自由境界問題、トーラスでない一般領域(角のある領域を含む)および Hasegawa-Wakatani 方程式より高位のモデル方程式に対する研究を展開している。

2 (地下水) 浸透現象記述するモデル方程式に対する逆問題の解の存在性, 一意性, 解析性および安定性を証明した. 方程式主要項決定問題としては最初の結果である. 浸透現象を記述する基礎方程式, porous media 方程式に対して逆問題を考察中である.

3 同時現象のモデル方程式である Kuramoto-Sakaguchi 方程式に対する初期-境界値問題の解の存在性, 一意性, 解析性について, 振動数分布関数のサポートが非有界であるときに調べた. 振動数分布関数が非有界サポートをもつ場合は Boltzmann 方程式をはじめ一般に難しい. Kuramoto-Sakaguchi 方程式に対しては最初の結果である. 現在同時現象の基礎方程式について研究を展開している.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 41 件)

1 S. Kondo, A. Tani, Initial boundary value problem for model equations of resistive drift wave turbulence with Stepanov-almost-periodic initial data, 査読有, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (掲載決定)

2 Y. Murakami, T. Iguchi, Solvability of the initial value problem to a model system for water waves, 査読有, Kodai Math. J. (掲載決定)

3 H. Tani, A. Tani, Effect of the wetting layer on the fingering pattern in a Hele-Shaw cell, 査読有, J. Phys. Soc. Japan, 83, 2014, pp.034401,1-4

4 M. Aiki, T. Iguchi, Motion of a vortex filament with axial flow in the half space, 査読有, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire, 31, 2014, pp.1311-1335

5 M. Umehara, A. Tani, Free-boundary problem of the one-dimensional equations for viscous and heat-conductive gaseous flow under the self-gravitation, 査読有, Math. Models Meth. Appl. Sci., 23, 2013, pp.1377-1419

6 B. Kwon, M. Suzuki, M. Takayama, Long-time behavior of solutions to an outflow problem for a shallow water model, 査読有, J. Differ. Eq., 255, 2013, pp.1883-1904

7 H. Itou, A.M. Khudnev, E.M. Rudoy, A. Tani, Asymptotic behaviour at a tip of a

rigid line inclusion in linearized elasticity, 査読有, ZAMM, 92, 2012, pp.716-730

8 H. Honda, A. Tani, Small-time existence of a strong solution of primitive equations for the ocean, 査読有, Tokyo J. Math., 35, 2012, pp.97-138

9 H. Itou, V.A. Kovtunenkov, A. Tani, The interface crack with Coulomb friction between two bounded dissimilar elastic media, 査読有, Appl. Math., 56, 2011, pp. 69-97

10 V.Yu. Liapidevskii, V.V. Pukhnachev, A. Tani, Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium, 査読有, Wave Motions, 48, 2011, pp.727-737

11 S. Kondo, A. Tani, Initial boundary value problem for model equations of resistive drift wave turbulence, 査読有, SIAM J. Math. Anal., 43, 2011, pp.925-943

12 N. Nakano, A. Tani, Navier's slip problem for motion of incompressible inhomogeneous fluid-like bodies, 査読有, J. Math. Fluid Mech., 13, 2011, pp.65-87

13 T. Iguchi, A mathematical analysis of tsunami generation in shallow water due to seabed deformation, 査読有, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, 141, 2011, pp. 551-608

[学会発表](計 102 件)

1 谷温之, Nuclear astrophysics I, II, 現象解析特別セミナー第7回, 2015年3月16, 17日, 茨城大学(茨城県, 水戸市)

2 U. Yokota, T. Nodera, Practical use of nonlinear GMRES for solving unconstrained optimization, CTAC 2014, December 1, 2014, Australian National University (Canberra, Australia)

3 井口達雄, 水の波の方程式, 非線形偏微分方程式 冬の学校 '14 in 札幌, 2014年11月21,22日, 北海道大学(北海道, 札幌)

4 A. Tani, Classical solvability of the two-phase radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell. International Conference on Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future, November 11, 2014, Waseda University (東京都, 新宿区)

5 A. Tani, Classical solvability of the radial viscous fingering problem in a

Hele-Shaw cell, Classical Problems and New Trends in Mathematical Fluid Dynamics, October 2, 2014, University of Ferrara (Ferrara, Italy)

6 A. Tani, Small-time solvability of primitive equations of the coupled atmosphere and ocean, 7th International Conference on Mathematical Modelling, June 30, 2014, North-Eastern Federal University (Yakutsk, Russia)

7 A. Tani, Small-time solvability of primitive equations of the coupled atmosphere and ocean, Progress in Nonlinear Partial Differential Equations, May 29, 2014, University of Lisbon (Lisbon, Portugal)

8 A. Tani, On some boundary value problem for the Stokes equations in an infinite sector, International Workshop on Singularities in boundary value problems, January 10, 2014, Tokyo University of Science (東京都, 新宿区)

9 T. Iguchi, Solvability of the initial value problem to a model system for water waves, RIMS Workshop "Kinetic Modeling and Related Equations: Conference in Memory of Seiji Ukai", October 30, 2013, Kyoto University (京都府, 京都市)

10 A. Tani, Classical solution to the radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell, RIMS Workshop on Kinetic Modelling and Related Equations: Conference in Memory of Seiji Ukai, October 28, 2013, Kyoto University (京都府, 京都市)

11 A. Tani, Free boundary problems of magnetohydrodynamics for viscous compressible electrically conducting fluids, Mathematical Hydrodynamics and Parabolic Equations in honour of Vsevolod Solonnikov on the occasion of his 80th birthday, September 12, 2013, Steklov Institute of Mathematics (St. Petersburg, Russia)

12 T. Iguchi, Shallow water approximations for water waves, Seminar on Non-linear PDE in Nara, 2013年3月11日, 奈良女子大学 (奈良県, 奈良市)

13 A. Tani, On the electrorheological material, 現象解析特別セミナー第2回, 2012年9月29日, 茨城大学 (茨城県, 水戸市)

14 Y. Matsuo, T. Nodera, An Efficient Implementation of the Block Gram-Schmidt Method, CTAC 2012, September 24, 2012, Queensland University of Technology (Brisbane, Australia)

15 T. Iguchi, Motion of a vortex filament with axial flow in the half-space, Third China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, October 24, 2011, Northwest University (Xian, China)

〔図書〕(計 1 件)  
野寺 隆 他, 共立出版, 情報学基礎, 2013, 167

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

谷 温之 (TANI Atusi)  
慶應義塾大学・理工学部・名誉教授  
研究者番号 : 90118969

### (2) 研究分担者

井口 達雄 (IGUCHI Tatsuo)  
慶應義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号 : 20294879

高山 正宏 (TAKAYAMA Masahiro)  
慶應義塾大学・理工学部・助教  
研究者番号 : 90338252

野寺 隆 (NDERA Takashi)  
慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号： 50156212

(3)連携研究者

伊藤 茂治 (ITO H Shigeharu)

弘前大学・教育学部・教授

研究者番号：40193487

田中 尚人 (TANAKA Naoto)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号：00247222

伊藤 弘道 (ITOU Hiromichi)

東京理科大学・理学部第二部・専任講師

研究者番号：30400790

梅原 守道 (UMEHARA Morimichi)

宮崎大学・工学部・准教授

研究者番号：40532164