

|                  |   |
|------------------|---|
| Title            | ゼータ関数・テータ関数の挙動解明と多変数超幾何関数論  |
| Sub Title        | Investigation of the behaviours of zeta and theta functions from a viewpoint of the theory of multiple hypergeometric functions |
| Author           | 桂田, 昌紀(Katsurada, Masanori)<br>野田, 工(Noda, Takumi)  |
| Publisher        |   |
| Publication year | 2014  |
| Jtitle           | 科学研究費補助金研究成果報告書 (2013. )  |
| JaLC DOI         |   |
| Abstract         |   |

平成 26 年 5 月 29 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540025

研究課題名(和文)ゼータ関数・テータ関数の挙動解明と多変数超幾何関数論

研究課題名(英文) Investigation of the behaviours of zeta and theta functions from a viewpoint of the theory of multiple hypergeometric functions

研究代表者

桂田 昌紀 (KATSURADA, Masanori)

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号：90224485

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、以下(1)～(3)の成果が得られた：(1)  $s$  複素変数、 $z$  複素パラメータを持つ(2重)Shintani ゼータ関数に対して、複素パラメータが減少・増大するときそれぞれの場合について、その完全漸近展開を確立した；(2) 2複素変数を持つ(2重)正則 Eisenstein 級数に対して、その basis parameter  $z_j$  ( $j=1, 2$ ) の相互距離  $|z_2 - z_1|$  が、増大・減少するときのそれぞれの場合について、その完全漸近展開を確立した；(3) ある種の重み付き多重  $q$  積分・ $q$  微分に対して、 $q \rightarrow 1$  のときの完全漸近展開を確立した。

研究成果の概要(英文)：The following items (1)---(3) describe the major consequences of our study during the fiscal years 2011--2013: (1) it is shown that complete asymptotic expansions exist for the double Shintani zeta-functions defined with  $s$  complex variables  $\mathbf{s}$  and  $z$  complex parameters  $\mathbf{z}$  when  $\mathbf{z}$  becomes both small and large; (2) it is shown that complete asymptotic expansions exist for the double holomorphic Eisenstein series of two complex variables and with two complex parameters  $z_j$  ( $j=1, 2$ ) when the distance  $|z_2 - z_1|$  of the basis parameters becomes both small and large; (3) Let  $q$  be a complex parameter with  $|q| < 1$ . It is then shown that complete asymptotic expansions exist for certain weighted multiple  $q$ -integrals and  $q$ -differentials when  $q \rightarrow 1$ .

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：漸近展開

1. 研究開始当初の背景

(1) Shintani ゼータ関数の挙動と多変数超幾何関数論: 研究計画調書項目 A 1)

に記した  $s_n$  複素変数 および  $s_n$  複素パラメータを持つ (2重) Shintani ゼータ関数に対して、本研究代表者は、これまであまり顧慮されることのなかった Lauricella 型超幾何関数とその積分核を含むある種の Mellin-Barnes 型積分表示を見出し、この積分表示が Shintani ゼータ関数の複素パラメータが無限小になるとき、および無限大になるときの漸近的挙動の解明に有効であろうという着想を得ていた。いま  $\theta_0$  を  $|\theta_0| < \pi/2$  を満たす任意の角度とすると、実際この積分表示からは、 $s_n$  番目の座標である pivotal parameter  $z_n$  が  $\theta_0$  を中心として両側に角度  $\pi/2$  の開きを持った扇状領域内を  $z_n \rightarrow 0$  とするとき、 $z_n \rightarrow \infty$  とするとき、それぞれの場合について完全漸近展開を導出することに成功した。但しここに他のパラメータ  $z_j$  は同様の扇状領域を条件  $z_j \sim z_n$  ( $j=1, \dots, n-1$ ) を満たしつつ動くものとする。ここで導かれた二種類の完全漸近展開からはさらに、多変数 (2重) Shintani ゼータ関数の様々な挙動に関する知見が得られることが期待された。

(2) 正則・非正則 Eisenstein 級数の挙動と多変数超幾何関数論: 本研究代表者は 2007 年の研究で、研究計画調書項目 A 2) で

定義した、複素 1 変数  $s$  と複素パラメータ  $z$  を持つ Epstein ゼータ関数、及びその (Poisson 分布型加重平均とも看做せる)  $z$  の虚軸方向への Laplace-Mellin 変換に対して、パラメータ  $z$  が虚軸方向に  $\text{Im } z \rightarrow \infty$  とするときの完全漸近展開を確立した。他方、(正負の) 数重み  $k$  に付随する非正則 Eisenstein 級数に対して、2009 年の研究で、本研究代表者は、上記 Epstein ゼータ関数に対して確立された完全漸近展開を出発点として、 $k=0$  のときに、成り立つ Epstein ゼータ関数と重み  $0$  の非正則 Eisenstein 級数との間の関係式により、重み  $0$  の非正則 Eisenstein 級数の完全漸近展開に移行し、さらにここで得られた完全漸近展開に、 $\text{Maa}\{s\}$  の重み変更作用素を逐次作用させることで、一般の (正・負) 偶数重み  $k$  に付随する非正則 Eisenstein 級数のパラメータが  $\text{Im } z \rightarrow \infty$  とするときの完全漸近展開を導出することに成功した。

Eisenstein 級数型のゼータ関数に関しては、多変数化の研究がそれほど進捗していないという現状があるため、上述の Epstein ゼータ関数や (正則・非正則) Eisenstein 級数に対する成果を第一のステップとして、ここで得られた諸成果を、差し当たり、2つの複素変数を持つ Eisenstein 型級数に拡張・一般化することが研究の自然な方向性といえる。そのため、2つの複素変数を持つ

Eisenstein 級数型ゼータ関数を適切に表現する Mellin-Barnes 型積分表示を探索・確定することが、今後の展開に向けて肝要だと考えられた。

(3) ゼータ関数の挙動と多変数超幾何関数論: 以下、 $q$  を  $0 < |q| < 1$  なる複素パラメータとする。1910 年代に行われた Hardy との共同研究の最終局面において Ramanujan は、擬ゼータ関数  $F(q)$ 、 $G(q)$ 、 $H(q)$  等の  $q \rightarrow 1$  における漸近公式に言及している。本研究代表者は、2003 年の研究において、ある種の一般化さらた Lambert 型  $q$  級数を導入し、その  $q \rightarrow 1$  における完全漸近展開を導出した。この展開式からは、Ramanujan によって言及された上述の擬ゼータ関数の  $q \rightarrow 1$  における漸近公式を、明示的な形に精密化した。さらにはより最近の研究において、ある種の重み付き  $q$  微分・ $q$  積分作用素を導入し、それらを generic な正則関数  $f(z)$  に  $r$  回作用させた順像に対して、 $q \rightarrow 1$  における完全漸近展開が存在することを証明した。上述 2 つの成果における主要な手法は逆 Mellin 変換であるが、その積分核には Barnes の多重ゼータ関数等、種々のゼータ関数が現れる。この方向で、逆 Mellin 変換の積分核に多変数超幾何関数を含む  $q$  級数を探索し、意味のあるクラスを抽出するとともに、それらの  $q \rightarrow 1$  における漸近展開を確立することは有望な研究の方向性と考えられた。

2. 研究の目的

(1) Shintani ゼータ関数の挙動と多変数超幾何関数論: 項目 1 (1) に述べた複素  $s_n$  変数、複素  $s_n$  パラメータを持った (2重) Shintani ゼータ関数を適切に表現する、Lauricella (多変数) 超幾何関数を積分核に含む Mellin-Barnes 型積分表示の応用により、この Shintani ゼータ関数の pivotal parameter  $z_n$  が角度  $\theta_0$  を中心とし、両側に  $\pi/2$  の開きを持った扇状領域内を、 $z_n \rightarrow 0$ 、 $z_n \rightarrow \infty$  とするときの完全漸近展開の導出を行う。さらにこの漸近展開公式から、複素  $s_n$  変数 (2重) Shintani ゼータ関数の複素  $s_n$  次元空間への解析接続、特異点集合の決定、特異点近傍での特異部分の抽出を通じた振る舞いの解明を行う。さらには、最も一般的な、 $s_n$  個の複素変数と  $r$  個の複素パラメータを持った  $r$  重 Shintani ゼータ関数を適切に表現する Mellin-Barnes 型積分の探索を行い、この場合の Shintani ゼータ関数に関しても同様の解明を行う。

(2) 正則・非正則 Eisenstein 級数の挙動と多変数超幾何関数論: 研究計画調書項目 A 2) で導入した  $s_2$  複素変数と複素パラメータ  $(z, \bar{z})$  を持つ、Epstein 型ゼータ関数や、より一般に、 $s_2$  複素変数と  $s_2$  複素パラメータ  $(z_1, z_2)$  を持つ、正

則・非正則 Eisenstein 型級数を適切に表現する(多変数超幾何関数を積分核に含んだ) Mellin-Barnes 型積分を抽出・確定することを第一のステップとする. この表示の応用として, パラメタが増大及び減少するときの完全漸近展開を確立する. これらの漸近展開から, 特殊値の有限な閉じた形の明示公式や関数等式などの解明を行う.

(3) テータ関数の挙動と多変数超幾何関数論: 逆 Mellin 変換により表示される種々の  $q$  級数を精査し, その積分核に多変数超幾何関数を含んだ  $q$  級数のクラスを探索し, 意味あるクラスを抽出するとともに, それらの  $q \rightarrow 1$  における漸近展開を確立する.

### 3. 研究の方法

(1) Shintani ゼータ関数の挙動と多変数超幾何関数論: 項目 2 (1) に述べた複素  $n$  変数 (2 重) Shintani ゼータ関数のパラメタ  $z_n$  に関する完全漸近展開において, 変数の適切な特殊化や極限を取る操作により, Shintani ゼータ関数の種々の関数としての性質を導く

(2) 正則・非正則 Eisenstein 級数の挙動と多変数超幾何関数論: 複素  $2$  変数を持つ Epstein 型ゼータ関数を適切に表現する Mellin-Barnes 型積分表示が特定されたならば, 項目 1 (2) に述べた, 複素  $1$  変数 Epstein ゼータ関数に対して本研究代表者が 2007 年に行った研究で得られた諸結果を指導原理として, 同様の方向性のもとに複素  $2$  変数 Epstein ゼータ関数の解明を推進する.

(3) テータ関数の挙動と多変数超幾何関数論: 項目 2 (3) に述べた, (多変数超幾何関数を積分核に含んだ) Mellin-Barnes 型積分で表示される  $q$  級数の意味あるクラスが抽出されたならば, 本研究代表者が 2003 年に行った, 一般化された Lambert 型  $q$  級数の  $q \rightarrow 1$  における完全漸近展開の研究をモチーフとして, これらのクラスの  $q$  級数に対して,  $q \rightarrow 1$  における完全漸近展開を導出する.

### 4. 研究成果

(1) Shintani ゼータ関数の挙動と多変数超幾何関数論: 本研究代表者は, 項目 2 (1) に述べた (多変数超幾何関数を積分核に含んだ) Mellin-Barnes 型積分の応用により, 複素  $n$  変数 (2 重) Shintani ゼータ関数に関して, パラメタの減少; 増大に付随する所期の完全漸近展開を確立することに成功した. この漸近展開からはさらに, 複素  $n$  変数 (2 重) Shintani ゼータ関数が, 全複素  $n$  次元空間へ有理型関数として解析接続されることの別証明; 特異点集合の形状; 任意の特異点の近傍における挙動; 特異点集合内の (特に) 確定特異点の分布; [Shintani (1976)] で導入された本来の複素  $1$  変数 Shintani ゼータ関数の

非負整数点における特殊値の明示公式への移行, 等種々の成果が得られた. これらの成果は, 差し当たり, 項目 5, 論文, に詳述されている.

(2) 正則・非正則 Eisenstein 級数の挙動と多変数超幾何関数論: この方面では, 現在, 複素  $2$  変数, 複素  $2$  パラメタを持つ正則 Eisenstein 級数に対して, パラメタ間の距離  $|z_2 - z_1|$  がある種の自然な設定の下で, 減少; 増大, するときの完全漸近展開が得られている. この漸近展開の変数を整数格子点の場合に特殊化することで, 正則 Eisenstein 級数の, 有限に閉じた形の明示的表示式; 一般化された Lambert 級数による種々の関係式; Ramanujan の楕円関数論・テータ関数論で中心的な役割を果たす古典的な Eisenstein 級数  $S_r(q)$  との間の種々の関係式; 同じく Ramanujan の楕円関数論・テータ関数論で重要な役割を果たす楕円 (系) 関数  $\varphi_j(w; q)$  ( $j=1, 2$ ) との間の種々の関係式, 等様々な成果が得られている. 結果は論文 “Transformation formulae and asymptotic expansions for double holomorphic Eisenstein series of two complex variables” として纏められ, 現在欧文学術誌に投稿準備中である.

(3) テータ関数の挙動と多変数超幾何関数論: この方面で本研究代表者は, [Ramanujan (1916)] において導入された 2 重  $q$  級数  $\varphi_{\{r,s\}}(q)$  及びそのある種の一般化に対して, Lambert 級数と Riemann ゼータ関数の (正・負の) 奇数点での特殊値を関係付ける, 著名な Ramanujan の公式を導出する研究を行っている. 現時点では初期的な成果が得られているが, 十分な一般性を有する成果にまでは至っていない. 今後, この方面の研究もさらに推進する予定である.

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

Masanori Katsurada, Complete asymptotic expansions associated with Epstein zeta-functions II, The Ramanujan Journal, 掲載決定, (査読有), <DOI: 10.1007/s11139-014-9583-6>.

Masanori Katsurada, Asymptotic expansions for certain  $q$ -series,  $q$ -integrals,  $q$ -differentials and a formula of Ramanujan for specific values of  $\zeta(s)$ , in “ $K$ kyroku”, R.I.M.S., 掲載決定, (査読無).

Masanori Katsurada, Shintani zeta-functions of several variables and Lauricella hypergeometric functions, in “ $K$ kyroku”, R.I.M.S., 掲載決定, (査読無).

Masanori Katsurada, Hypergeometric type generating functions of several variables associated with the Lerch zeta-function (summarized version), in “ $K\{x\}ky\{y\}$ roku, R.I.M.S., No. 1874, pp. 161–173, 2014, (査読無), <<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1874-18.pdf>>.

Masanori Katsurada, Complete asymptotic expansions for certain multiple  $q$ -integrals and  $q$ -differentials of Thomae-Jackson type, Acta Arithmetica, **152** (2012), 109–13 (査読有), <DOI: 10.4064/aa152-2-1>.

Masanori Katsurada, Complete asymptotic expansions associated with Epstein zeta-functions II (summarized version), in  $K\{x\}ky\{y\}$ roku, R.I.M.S., No. 1806, pp. 99–113, 2012, (査読無), <<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1806-11.pdf>>.

Masanori Katsurada, Shintani zeta-functions of several variables and Lauricella hypergeometric functions, in “Proceedings of Diophantine Analysis and Related Fields 2011”, A.I.P. Conference Proceedings, No. 1385, pp. 58–72, 2011, (査読無), <DOI: 10.1063/1.3630041>.

Masanori Katsurada and Takumi Noda, On generalized Lipschitz formulae and applications II, in “Proceedings of Diophantine Analysis and Related Fields 2011”, A.I.P. Conference Proceedings, No. 1385, pp. 73–86, 2011, (査読無), <DOI: 10.1063/1.3630042>.

〔学会発表〕(計 8 件)

Masanori Katsurada and Takumi Noda, Transformation formulae and asymptotic expansions for double holomorphic Eisenstein series of two variables, 日本数学会年会, 2014 年 3 月 18 日, 学習院大学理学部, 東京都.

Masanori Katsurada and Takumi Noda, Transformation formulae and asymptotic expansions for double holomorphic Eisenstein series of two variables, Diophantine Analysis and Related Fields 2014, March 6, 2014, University of Tsukuba, Tsukuba.

Masanori Katsurada, Asymptotic expansions for certain multiple  $q$ -integrals and  $q$ -differentials of Thomae-Jackson type, Analytic Number Theory-----Arithmetic Properties of Transcendental functions and their Applications, November 7, 2013, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto.

Masanori Katsurada, Complete asymptotic expansions for generalized

Epstein zeta-functions, 日本数学会年会, 2013 年 3 月 23 日, 京都大学理学研究科・数理解析研究所, 京都市.

Masanori Katsurada, Shintani zeta-functions of several variables and Lauricella hypergeometric functions II, 日本数学会秋季総合分科会, 2012 年 9 月 18 日, 九州大学数理学研究院.

Masanori Katsurada, Asymptotic expansions of non-holomorphic Eisenstein series and their applications, K.I.A.S. Workshop:  $q$ -series and Related Topics, August 24, 2012, Hotel Riviera Haeundae: Busan, (招待講演).

Masanori Katsurada, Asymptotic expansions for certain multiple  $q$ -integrals and  $q$ -differentials of Thomae-Jackson type, K.I.A.S. Workshop:  $q$ -series and Related Topics, August 25, 2012, Hotel Riviera Haeundae: Busan (招待講演).

Masanori Katsurada, Asymptotic expansions for generalized Epstein zeta-functions and applications, Analytic Number Theory---Related Multiple Aspects of Arithmetic Functions, November 1, 2011, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：  
〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

桂田 昌紀 (KATSURADA, Masanori)

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号：9 0 2 2 4 4 8 5

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

野田 工 (NODA, Takumi)

日本大学・工学部・准教授

研究者番号：10350034