

Title	形式主義と直観主義の証明論的手法による比較再検討
Sub Title	Reconsideration of the relationship between formalism and intuitionism via proof-theoretical method
Author	秋吉, 亮太(Akiyoshi, Ryota)
Publisher	
Publication year	2012
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2011. )
JaLC DOI	
Abstract	2010～2011年度にかけては, 形式主義と直観主義の比較再検討というテーマの元, 論理学(数学基礎論)・哲学の両面から研究を行った. 主な数学的成果としては, スタンフォード大学G.ミンツ教授との共同研究により, ブフホルツの $\Omega$ 規則の完全カット消去定理という未解決問題を解いた. 主な哲学的成果としては, 非可述性の分析という観点から証明論のこれまでの歴史を振り返り考察を行い, 今後の課題を提示した.
Notes	研究種目: 研究活動スタート支援 研究期間: 2010～2011 課題番号: 22820054 研究分野: 人文学 科研費の分科・細目: 哲学・倫理学
Genre	Research Paper
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_22820054seika">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_22820054seika</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月15日現在

機関番号：32612

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2010～2011

課題番号：22820054

研究課題名（和文）形式主義と直観主義の証明論的手法による比較再検討

研究課題名（英文）Reconsideration of the relationship between formalism and intuitionism via proof-theoretical method

研究代表者

秋吉 亮太 (AKIYOSHI RYOTA)

慶應義塾大学・文学研究科・助教

研究者番号：20587852

研究成果の概要（和文）：2010～2011年度にかけては，形式主義と直観主義の比較再検討というテーマの元，論理学（数学基礎論）・哲学の両面から研究を行った．主な数学的成果としては，スタンフォード大学 G.ミンツ教授との共同研究により，ブフホルツの規則の完全カット消去定理という未解決問題を解いた．主な哲学的成果としては，非可述性の分析という観点から証明論のこれまでの歴史を振り返り考察を行い，今後の課題を提示した．

研究成果の概要（英文）：We investigated the relationship between formalism and intuitionism from the view points of mathematical logic and philosophy. In the joint mathematical work with G.Mints (Stanford University), the complete cut-elimination theorem for Omega-rule, which had been an open problem, is proved. In the philosophical work, we analysed the history of proof theory from the viewpoint of "analysis of impredicativity" and presented some issues to be addressed.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：人文学

科研費の分科・細目：哲学・倫理学

キーワード：哲学・倫理学

## 1. 研究開始当初の背景

形式主義は，20世紀初頭に数学者 D.ヒルベルトによって提唱された，論理主義・直観主義に並ぶ数学の哲学上の立場であり，それを実行するために証明論という論理学の分野がつけられた．そして，形式主義の目的とは，数学全体を形式化しその無矛盾性を有限の立場で証明することにより数学を基礎付けよう，というすぐれて哲学的なものであ

た．

しかしながら，ゲーデルの不完全性定理（1931年）によってヒルベルトの計画が実行不可能であると受け入れられた後，形式主義（証明論）は純粋な数学として非常に発達した．特に，G.ゲンツェンが算術の無矛盾性を証明する（1936，1938年）ために，最初の数までの超限帰納法を用いて以降，このような傾向は非常に強くなった．ゲンツェンは，三段論法が不要であることを主張する力

ット消去定理を証明することによって算術の無矛盾性を証明したが、これは証明論の基本定理であり最重要定理である。ゲンツェン以後も、証明論の中心はこのカット消去定理を証明することにあつた。ゲンツェン以後、日本では竹内外史によって証明論は高階論理(解析)へと拡張された。竹内は、"ordinal diagram"という理解が非常に難しい順序数の道具立てを導入し様々な成果を得た。特に、この順序数を用いて、解析学の部分体系の無矛盾証明を与えた。しかしながら、その理解は非常に難しい。そして、竹内らによる仕事の後、証明論はドイツ(シュッテ学派、プフホルツ、ポラーズ、ラティエン他)、そして日本の新井敏康らによって解析学や集合論のさらに強い体系へと発展させられたが、以前として順序数を用いているため、事情は変わらなかった。このような数学的な発展とは裏腹に、証明論が本来もっていた哲学的意義を問う研究は少なくなつていった。形式主義的証明論は、非可述性の分析を行っているとしばしば言われるものの、肝心の道具立て(証明論的順序数)が難しいために、例えば、なにをもってなにが分析されているのか、の理解が非常に難しい。さらにいえば、この証明論的順序数という複雑な道具のために、基本的な数学的なアイディアの理解さえ難しかった。

## 2. 研究の目的

本研究は、形式主義の哲学的意義の解明を最終目標とする。前述のように、証明論は順序数という複雑な道具立てを用いているため理解が非常に難しい。そこで、数学的な目的としては、第一にこのような順序数を用いない証明論を構築する必要がある。前述のように、証明論の主要定理はカット消去定理と呼ばれ、三段論法が不要なことを主張する。証明論において、カット消去定理を証明するためにしばしば順序数が用いられるため、このような道具立てを用いない証明論を構築したい。

特に、カット消去プロセスを記述する際、そしてそれが止まることを示す際順序数を用いない形で理論を構築することを目指す。そしてまた、順序数を用いずに証明論がどこまで展開できるかと考察することで、翻つて、証明論的順序数の意義、必要性についてもさらに解明されることを目標とする。また、以下で述べるように、申請者による手法は規則という直観主義的な背景をもっているものであるために、この数学的研究を通じて、形式主義と直観主義を比較したい。特に、どこまでの強い理論であれば、(カット消去定理という)形式主義に基づく結果を規則(という直観主義的手法)で置き換えられるのか

を考察したい。

第二、このような豊かな数学的成果を背景に、数学として発展した証明論の実践からなんらかの概念的な意味を読み取り、形式主義の哲学的意義の解明を目指す。特に、「非可述性の分析」という観点から、申請者の成果も含めた証明論の歴史を振り返り、これからの数学の哲学において問われるべき問題を設定すること、そしてその問題にとりかかる基盤を作ることを目指す。順序数を用いない証明論はしばしば直観主義的手法を用いているため、この作業を通じて、直観主義と形式主義の関係の再考への基盤としたい。また、なぜ証明論的順序数の理解が何故難しいのかについても明らかにしたい。単に数学的に複雑というだけではなく、尺度としての難しさを指摘する。そして、これらの論点を、国内・海外の証明論の専門家だけでなく、哲学のコミュニティに向けて発信し、伝えることも目指す。これにより、数学/論理学/哲学の垣根を超えた学際的で国際的なコミュニケーションを盛んにするようなネットワークの構築も目的の一つである。

より歴史的な研究として、ヒルベルト以降の証明論(形式主義)の代表的研究者であつたG.ゲンツェンの無矛盾性証明を分析する。ゲンツェンは複回数算術の無矛盾性を証明しているが、有名なのは1938年のものである。ゲンツェン以降の証明論も、この証明の技法をその発端とする。しかしながら、それ以前の1936年の証明において、ゲンツェンは、より直観主義的な手法を用いているため、これらの証明は異なつたものであると考えられてきた。本来、ゲンツェンは形式主義に属し、形式主義と直観主義は異なつた学派であると考えられてきたため、この点だけでも非常に興味深い。さらに、1936年の証明には、「有限的意味を与える」という哲学的な目的がある。1938年の証明にそのような目的を見出すことは難しいように一見思える。このように、1936年の証明は非常に興味深いものの、証明自体が非常に曖昧であるために理解が難しい。特に、肝心の証明図の還元ステップの定義、そして、それが止まることの証明が曖昧であるように思われる。そこで、形式主義の再検討に向けた一歩として、ゲンツェンの1936年の証明を現代的手法で再構成し、ゲンツェンが考えていた哲学的意義を明らかにする。そして、その現代的意義も明らかにしたい。また、副産物として、1936年、1938年の証明が、実は「有限的意味を与える」という統一的なテーマの元に解釈できることを示す。そして、形式主義の代表的研究者であるゲンツェンが用いた直観主義的手法を分析することで、形式主義と直観主義の比較を行いたい。

### 3. 研究の方法

上述の通り、本研究は数学的側面と、哲学的側面からなる。数学的側面については、証明論の世界的権威であるスタンフォード大学 G. ミンツ教授との共同研究により、これまでの形式主義的証明論で用いられてきたものの直観主義的な背景をもっている規則に着目し、拡張を目指した。

規則は、解析学が展開できるような体系（特に包括原理）を解釈できる強い規則であり、1970年代末に W. ブフホルツによって導入された。これまで規則に対して証明されたカット消去定理は、算術的と呼ばれる範囲、すなわち二階の（存在）量子子を帰結に含まない証明図に限られていた。これが任意の証明図に拡張できるかは、規則が導入されて以来未解決であった。その理由は、規則が算術的な証明図上のみ量化して、再帰的定義によって定義されているためである。しかしながら、単にこの量化の範囲を任意の証明図へと広げると、定義が循環してしまい破綻してしまう。そこで、規則を拡張するにあたり、カットにつながっている推論規則（暗黙的、とよばれる）とそうでないもの（明示的、とよばれる）を区別した。この区別は竹内に由来するものであり、これを用いて規則を拡張し、完全カット消去定理の証明を目指した。

哲学的側面に関しては、このような申請者自身の結果も含めた証明論の歴史を振り返りつつ、これから問うべき問題を明らかにする。その際には、上述の規則のような、一見すると形式主義と反するような要素をもった手法を中心に分析を行った。さらに、規則に関する申請者結果も含めた、最新の結果を参照しつつこれからの数学の哲学において問われるべき課題を提出することを試みた。

また、証明論的順序数の困難さを分析するにあたっては、まずゲーデルの死後出版された講義を参照することで、証明論的順序数がどの程度構成的であるかを分析し、その上で尺度としての困難さを指摘した。

ヒルベルト以降の証明論の代表的研究者であったゲンツェンの無矛盾性証明を分析するにあたっては、ミンツ＝ブフホルツの手法を用いた。この手法は、そもそもゲンツェンの1938年の証明の分析・再構成に用いられていたものである。しかしながら、これを1936年の証明に拡張、応用する。以上がこの課題に取り組むための数学的な手法であり、哲学的な手法としては、慶應大学文学研究科博士課程高橋優太氏と共同研究を行うことで、ゲンツェンのテキストとの詳しい対応をつける。さらに、ゲンツェンが1937年に書いた、これまでに読まれてこなかった論文を

参照することにより、ゲンツェンの複数の無矛盾性証明には統一的なアイデアがあったことを裏付ける。また、ゲンツェンのアイデアをミンツ＝ブフホルツのアイデア、さらにゲーデルの有名なディアレクティカ解釈と比較する。

### 4. 研究成果

数学的な成果としては、規則に関する完全カット消去定理が挙げられる。上述のように、本研究では、暗黙的/明示的の区別を用いて規則を定式化した。完全カット消去定理を証明するのに問題なのは、その量化の範囲であった。ただ、単純にこの範囲を広げることではできない。そこで、量化の範囲には、算術的な規則だけではなく、明示的な包括原理も入れておく。そして、体系を解釈する際には、暗黙的な包括原理のみを規則へと翻訳し、そうでない包括原理はそのまま残しておく。通常、ブフホルツに由来するやり方では、包括原理は全て一括して規則へと翻訳されるため、この点が従来の方法と大きく異なっている。以上の手法によって、解析が多少展開できる体系を解釈することができ、これらの準備の上で、完全カット消去定理、すなわち任意の証明図に対するカット消去定理が証明できた。つまり、カット消去定理を算術的な論理式の証明図に対する限定的なものから、完全なものへと一挙に拡張し、未解決問題を解決した。さらに、竹内の還元法を、より通常の変元ステップに近いもので分析し、前者を後者で置き換えられることも証明した。この結果は、規則の変元ステップをある仕方で分析できたことを意味している。また、副産物としては、還元ステップを定義するに際してミンツ＝ブフホルツの手法を用いることで、ゲンツェンの1936年の無矛盾性証明がこの手法で再構成できることを発見した。これらの結果を査読付きの国際会議で発表し、査読付きの国際誌へ投稿した。現在査読者のコメントを受けた後改訂中ではあるが、この結果に関して査読者から非常に好評を博した。

また、規則は繰り返しることによってさらに強い体系に拡張できることが知られているが、申請者は、解析学が十分に展開できるような包括原理にまでこれを拡張した。この結果に関してはまだ査読付きの国際誌へ投稿してはいないが、その証明をスケッチしたものを GCOE の報告書から出版した。

哲学的側面に関しては、証明論の歴史を振り返り、これからの数学の哲学における課題を提示する論文を『科学基礎論研究』から出版した。また、その中で、証明論的順序数がゲーデルの意味で構成的ではあるものの、尺度として曖昧でありそれ故に難しいと結論

づけた。そして、ベルナイスの「投射」という概念が、証明論の行っていることを分析するに際して有用ではないか、と示唆を行った。この成果に関しては、神戸大学の数学者(集合論)である瀧野昌教授のグループ、愛媛大学の藤田博司助教、大阪大学の哲学者である中山康雄教授、名古屋大学の数学者(集合論)である薄葉季路特任助教と共に、「科学基礎論学会」でワークショップを行い、申請者が招待講演を行った。この活動を通じて、哲学者とはもちろんのこと、数学者との交流を深めることができたことも収穫の一つであった。

ゲンツェンの無矛盾性証明に関してはミンツェンツェン=ブホルツの手法で再構成し、大阪大学にて行われた「論理学と数学の哲学の研究会」において招待講演を行った。特に、ミンツェンツェン=ブホルツの手法によって、還元木という、ある種の還元ステップを表す木を明示的に定義し、ゲンツェンの還元ステップに対応することを確認し、還元木が整礎であることの証明を与えた。この結果は、GCOEの報告書から出版された。ここまでは数学的な色合いが強い成果であるが、その後、高橋優太氏と共同研究を開始し、ゲンツェンのテキストとの詳しい対応をつけた。そして、その作業を通じて、ゲンツェンの複数の無矛盾性証明が統一的なアイデアに基づいており、さらに、ゲンツェンのアイデアを、現代的なミンツェンツェン=ブホルツのそれと比較することで、かなり共通点があることを示した。より具体的には、有限的な証明図のある種の「コード」とみなして、それを実行(「デコード」)するという共通点を指摘した。また、ゲンツェンの証明がその発端になったディアレクティカ解釈と比較することで、ゲーデルがどのようにディアレクティカに至ったのかに関する説明を与えた。このことは、先に述べた還元木を考察することにより、非常に明瞭な形で理解できる。これらの成果に関しては共同論文を執筆中であり、まだ投稿には至っていないが、できるだけ早い段階での投稿を目指して作業を行った。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

1. 秋吉亮太, 「非可述性の分析としての証明論」(査読有), 『科学基礎論研究』, 第39巻, 43-57頁, 2012年.

2. Ryota Akiyoshi, "An Extension of the Iterated Omega-Rule", *CARLS Series of*

*Advanced Study of Logic and Sensibility* Vol.5, pp.221-230, 2011. (査読無)

3. Ryota Akiyoshi and Grigori Mints, "Complete Cut-Elimination Theorem for  $\omega$ -Rule" (abstract), to appear in *The Bulletin of Symbolic Logic*. (査読無)

4. Ryota Akiyoshi and Grigori Mints, "Analysis and Extension of Omega-Rule", *arXiv*, <http://arxiv.org/abs/0904.4742>, 2011. (査読無)

5. Ryota Akiyoshi and Grigori Mints, "An Ordinal-Free Proof of the Cut-elimination Theorem for  $\Pi^1_1$ -CA with  $\omega$ -rule" (abstract), *The Bulletin of Symbolic Logic*, Volume 16 p. 293, 2011. (査読無)

6. Ryota Akiyoshi, "Gentzen's First Consistency Proof Revisited", *CARLS Series of Advanced Study of Logic and Sensibility* Vol.4, pp. 315-324, 2010.

(査読無)

[学会発表](計5件)

1. Ryota Akiyoshi and Grigori Mints, "Complete Cut Elimination Theorem for  $\omega$ -Rule" (査読有), *Logic Colloquium 2011*, University of Barcelona, July 2011.

2. Ryota Akiyoshi, "Finite Notations for  $\omega_{\mu+1}$ -rule" (査読有), *Logic Colloquium 2010*, Paris Diderot University, July 2010.

3. 秋吉亮太, 「規則の拡張について」(査読有), 第四十四回日本科学哲学会, 日本大学, 2011年11月.

4. 秋吉亮太, 「非可述性の分析としての証明論」, (招待講演) 2011年度科学基礎論学会, ワークショップ「あたらしい数理論理学の揺籃 - 証明論的な順序数と集合論的な順序数」における提題者, 愛媛大学, 2011年6月.

5. 秋吉亮太, 「ゲンツェンの無矛盾性証明再訪」(招待講演), 『論理学と数学の哲学の研究会』, 大阪大学, 2010年11月.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

秋吉 亮太 (AKIYOSHI RYOTA)  
慶應義塾大学・文学研究科・助教  
研究者番号：20587852

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：