Title	Mahler関数の特殊値による超越数の構造解明
Sub Title	Structural analysis of transcendental numbers through the values of Mahler functions
Author	田中, 孝明(Tanaka, Takaaki)
Publisher	
Publication year	2013
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2012.)
JaLC DOI	
Abstract	本研究では次のような性質をもつ、複素数全体で定義される関数を構成した。相異なる代数的な数における値が0でなければ、それらの値の間には有理数係数のいかなる非零多項式で表される関係式も存在しない。さらに、それらの値に加えて、上記のような代数的な数において何回でも微分した値を併せて考えても、やはり有理数係数のいかなる非零多項式で表される関係式も存在しない。しかも、値が0になる数のなす列は線形回帰関係式を満たす数列の部分列として明示できる。
Notes	研究種目 : 若手研究(B) 研究期間 : 2010～2012 課題番号 : 22740023 研究分野 : 数物系科学 科研費の分科・細目 : 数学・代数学
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_22740023seika

様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　３月３１日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2012
課題番号：２２７４００２３
研究課題名（和文）　Mahler 関数の特殊値による超越数の構造解明
研究課題名（英文）　Structural analysis of transcendental numbers through the values of Mahler functions

研究代表者
田中　孝明（TANAKA TAKAAKI）
慶應義塾大学・理工学部・専任講師
研究者番号：60306850

研究成果の概要（和文）：本研究では次のような性質をもつ、複素数全体で定義される関数を構成した。相異なる代数的な数における値が０でなければ、それらの値の間には有理数係数のいかなる非零多項式で表される関係式も存在しない。さらに、それらの値に加えて、上記のような代数的な数において何回でも微分した値を併せて考えても、やはり有理数係数のいかなる非零多項式で表される関係式も存在しない。しかも、値が０になる数のなす列は線形回帰関係式を満たす数列の部分列として明示できる。

研究成果の概要（英文）：In this project the research representative constructed, using linear recurrences, entire functions defined by explicit infinite products such that their values as well as their all successive derivatives at algebraic points other than their zeroes are algebraically independent. Zeroes of such entire functions form subsequences of the linear recurrences.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
２０１１年度	500,000	150,000	650,000
２０１２年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：Mahler 関数、代数的独立性、整関数、無限積、フィボナッチ数列、超越数

１．研究開始当初の背景

平成２２年度の本研究の開始当初は $|q|>1$ をみたす複素数 q に対する q ポッホハマー記号 $(a;q)_n=(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$ において、q の指数を線形回帰整数列 $\{R(n)\}_{n\geqq 1}$ で置き換えた $((a;q))_n=(1-aq^{R(1)})(1-aq^{R(2)})\cdots(1-aq^{R(n)})$ により記述される q 超幾何級数のアナロジーが研究対象であった。具体的には $\Theta(z)=\Sigma_{n\geqq 1}z^n/((1;q))_n$ のとる値の数論的性質の研究を想定していた。その理由は $\Theta(z)$ が相異なるすべての代数点 z（$\neq 0$）を例外なく代数的独立な値に写像するという性質を有するためである。本研究を開始してみると、Mahler 関数の特殊値の集合として与えられる超越数のクラスの構造解明を通して超越数論・代数的独立論に新たな方面から寄与するという目的を達成するためには、$\Theta(z)$ より強い、次に述べるような著しい性質をもつ整関数を構成することの重要性が明らかとなった。そ

の性質とは、零点を除いた相異なる代数的数における値 及びそれら代数的数における逐次微分をすべて併せた無限集合が代数的独立となることである。しかし、$\Theta(z)$ の逐次微分の数論的性質の研究に関しては多くの技術的困難が生じた。一方、q 超幾何級数の一種である q 指数関数 $E(z)=\Sigma_{n\geq 1} z^n/(1;q)_n$ は $E(z) = (z;1/q)_\infty = \Pi_{n\geq 1}(1-z/q^n)$ という無限積表示をもつことが知られている。このことから、$E(z)$ について同様のアナロジーを構成すれば、上述のような著しい数論的性質を有し、超越数のクラスの構造解明に貢献する関数が得られると考えた。

２．研究の目的

q 指数関数の無限積表示から着想を得て、そのアナロジーである $\Phi(z)=((z;1/q))_\infty=\Pi_{n\geq 1}(1-z/q^{R(n)})$ の値の代数的独立性を示すことを第１の目的とした。具体的には $\Phi(z)$ について、零点を除く相異なる代数的数における値 及びそれら代数的数における逐次微分をすべて併せた無限集合の代数的独立性の証明を目指した。これは微分完全代数的独立性とも言うべき著しい数論的性質であり、同一の関数の異なる代数的数における値の代数的独立性としては最も強いものである。また、微分完全代数的独立性は指数関数や三角関数などのよく知られた初等関数には見られない性質である。さらに言えば、零点以外の相異なる代数的数における値がすべて代数的独立であるという、(微分完全代数的独立性より弱い) 完全代数的独立性でさえも、これらの初等関数には無い性質である。

一方、q が２以上の整数 d の場合、$\Phi(z)=\Pi_{n\geq 1}(1-z/d^{R(n)})$ の零点の集合 $\{d^{R(n)}\}_{n\geq 1}$ は等比数列 $\{d^n\}_{n\geq 1}$ の線形回帰整数列 $\{R(n)\}_{n\geq 1}$ に対応する部分列であることから $\{d^n\}_{n\geq 1}$ と $\{R(n)\}_{n\geq 1}$ の関係を逆にした $\{R(d^n)\}_{n\geq 1}$ を零点とする無限積で表される整関数 $F(z)=\Pi_{n\geq 1}(1-z/R(d^n))$ についても同様に微分完全代数的独立性を有するか研究を進めた。

$\Phi(z)$ の微分完全代数的独立性の研究には後述の多変数 Mahler 関数の理論が用いられる。多変数 Mahler 関数は大まかに言えば、変数の乗法的変換の下に関数方程式を満たす多変数解析関数である。ここで、乗法的変換とは整数成分の正則行列 Ω の作用として記述できるものである。ただし、従来の Mahler 関数の理論では Ω は非負行列に限られる。この条件は緩和することが困難なものと考えられてきた。このことを踏まえて、負の成分を許容した Ω の乗法的作用として記述される変数変換 $\boldsymbol{z} \to \Omega\boldsymbol{z}$ の下に関数方程式を満たす多変数関数 $f(\boldsymbol{z})$ の特殊値の代数的独立性を示すことも本研究の目的とした。

３．研究の方法

研究目的を達成するために用いた方法は、関数値の代数的独立性に関して最も著しい成果を上げている Mahler の方法である。これは、代数的独立性を示したい数の集合を、Mahler 関数と呼ばれる或る種の関数方程式を満たす関数の特殊値に帰着させ、関数方程式の iteration により代数的独立性を示す方法である。

無限積表示される整関数 $F(z) = \Pi_{n\geq 1}(1-z/R(d^n))$ の代数的数における値は、$\{R(n)\}_{n\geq 1}$ の満たす漸化式の形に応じて１変数または多変数の無限積型 Mahler 関数の値として表されることから Mahler 関数の理論を応用できる。さらに、$F(z)$ の逐次微分についてはランベルト級数型の Mahler 関数の特殊値に帰着でき、それらの代数的独立性についても研究代表者の従来の研究を生かすことができた。

従って、本研究における最大のポイントのひとつは無限積型とランベルト級数型という２つの異なるタイプの Mahler 関数の、代数点における値を併せた代数的独立性の判定定理を確立することにあった。

また、Mahler 関数の値の代数的独立性の判定定理を適用するにあたっては関数自身の有理関数体上での代数的独立性を全く別の手法で示す必要がある。つまり、値の代数的独立性の証明は２段階から成る。これについては K. K. Kubota の定理により、無限積型とランベルト級数型という２つのタイプごとに個別に定まる或る関数方程式の、有理関数解の存在問題に帰着される。研究代表者はこの問題の解決のため独自の証明方法をとり入れて研究を進めた。具体的には、無限積型の Mahler 関数達の有理関数体上での代数的独立性を示すために、それらが満たす関係式の対数微分を行いランベルト級数型の Mahler 関数達の有理関数体上での代数的独立性に帰着させるという工夫をした。

４．研究成果

本研究初年度にあたる平成２２年度は、q 指数関数のアナロジーである $\Phi(z) = \Pi_{n\geq 1}(1-z/q^{R(n)})$ が微分完全代数的独立性を有することを証明した。つまり、$\Phi(z)$ の零点を除く相異なる代数的数における値 及びそれら代数的数における逐次微分をすべて併せた無限集合 $\{\Phi^{(\ell)}(\alpha) \mid \ell\geq 0, \alpha\in\overline{\boldsymbol{Q}}^\times, \alpha\neq q^{R(n)}\}$ が代数的独立であることを示した。この成果をディオファンタス解析研究集会において発表した (学会発表[3])。また、この結果をまとめた論文が AIP Conference Proceedings に掲載された (雑誌論文[2]参照)。

また、平成２２年度の研究では $\{R(n)\}_{n\geq 1}$ が $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n\geq 1)$ で

定義されるフィボナッチ数列 $\{F_n\}_{n\geqq 1}$、或いは $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ ($n\geqq 1$) で定義されるルカ数列 $\{L_n\}_{n\geqq 1}$ といった代表的な数列の場合に、$F(z) = \prod_{n\geqq 1}(1 - z/R(d^n))$ の有理整数 $\boldsymbol{Z}$ における値が（代数的独立の否定である）代数的従属となる必要十分条件の記述に成功した。特に、ルカ数列の場合には先行研究にはみられなかった $F(z)$ の異なる整数における値の間の関係式を得た。この結果をまとめた論文は査読付学術誌に掲載された（雑誌論文[3]参照)。

平成２３年度は、より一般の２項回帰整数列 $\{R(\mathrm{n})\}_{\mathrm{n}\geqq 1}$ により生成される整関数 $F(z)=\prod_{n\geqq 1}(1-z/R(d^n))$ を研究対象とし、$F(z)$ の代数的数における値が微分完全代数的独立性を有するか研究した。$\{R(n)\}_{n\geqq 1}$ の特性根が乗法的独立か否かにより、２変数の Mahler 関数の代数的数における値に帰着される場合と１変数のそれに帰着される場合がある。前者の場合は相異なる代数的数における $F(z)$ の値が代数的従属となるような例外は存在せず、$F(z)$ は微分完全代数的独立性を有する整関数であることが分かった。

１変数 Mahler 関数は、変数をその冪に変換したものが元の関数と有理関数体上代数的従属である関数として特徴付けられる。例えば、自然境界をもつ関数の実例として関数論の教科書で取り上げられるフレドホルム級数 $Fred(z) =\sum_{n\geqq 1} z^{d\hat{}n}$ (d は２以上の整数) は最も簡単な Mahler 関数である。Mahler 関数とみる視点では関数方程式 $Fred(z) = Fred(z^d) + z^d$ が本質的である。これを一般化し、冪級数 $f(z)$ であって $f(z^d)$ と有理関数体 $\boldsymbol{C}(z)$ 上代数的従属であり、正の収束半径をもつものが１変数 Mahler 関数である。１変数 Mahler 関数に関しては代数幾何の手法を応用した種々の先行研究が存在する。

理論の創始者 Kurt Mahler は当初、r 変数 $z_1,\cdots,z_r$ の解析関数 $f_i(z_1,\cdots,z_r)$ ($i = 1,\cdots,m$) であって各 i に対して $f_i(z_1,\cdots,z_r)$ と $f_i(z_1^d,\cdots,z_r^d)$ が r 変数有理関数体 $\boldsymbol{C}(z_1,\cdots,z_r)$ を法として有限次代数体 K 上 1 次従属であるものに対して、$f_1,\cdots,f_m$ の代数点における値の代数的独立性を研究していた。その理論は 1970 年代後半以降、K. K. Kubota, J. H. Loxton－A. J. van der Poorten, D. W. Masser, Kumiko Nishioka 等により研究が進められ、$\{f_1(z_1,\cdots,z_r),\cdots,f_m(z_1,\cdots,z_r)\}$ と $\{f_1(z_1^d,\cdots,z_r^d),\cdots,f_m(z_1^d,\cdots,z_r^d)\}$ が互いに $\boldsymbol{C}(z_1,\cdots,z_r)$ を法として有限次代数体 K 上 1 次従属である場合や、各 i に対して $\{1, f_i(z_1,\cdots,z_r), f_i(z_1^d,\cdots,z_r^d)\}$ が $\boldsymbol{C}(z_1,\cdots,z_r)$ 上１次従属という場合などが扱える形まで発展している。研究代表者は、このような多変数 Mahler 関数の理論の発展を受けて、無限積型の Mahler 関数について多変数の場合も含めて、代数点における値の代数的独立性の証明に成功した。

一方、上述の $\{R(n)\}_{n\geqq 1}$ の特性根が乗法的従属となり１変数の Mahler 関数に帰着される場合には、相異なる代数的数における $F(z)$ の値が代数的従属となる例外が多数現われ、それらの定式化は容易ではなかった。そのため、後者の場合の中で定式化し得たものを前者の場合と併せた結果を論文としてまとめた [T. Kurosawa, Y. Tachiya, and <u>T. Tanaka</u>: Algebraic independence results for the values of certain Mahler functions and their application to infinite products (査読中)]。尚、この共著論文においては 研究代表者が主要な定理および補題を証明した。この論文の主定理は、整関数 $F_d(z)=\prod_{n\geqq 1}(1 - z/R(d^n))$ において 2 項回帰数列 $\{R(n)\}_{n\geqq 1}$ の特性根が乗法的独立である場合には微分完全代数的独立性を有することを主張するものである。実際には更に強い主張、すなわち 無限集合 $\cup_{d\geqq 2}\{F_d^{(\ell)}(\alpha) \mid \ell\geqq 0, \alpha\in\bar{\boldsymbol{Q}}^{\times}, \alpha\neq R(d^n)\}$ が代数的独立であることを証明した。

微分完全代数的独立性を有する整関数の実例を得た西岡による次のような先行研究が存在する。すなわち、γ を $0<|\gamma|<1$ をみたす代数的数、d を２以上の整数とするとき、冪級数 $f(z)=\sum_{n\geqq 1}\gamma^{n!}z^n$ および $g_d(z)=\sum_{n\geqq 1}\gamma^{d\hat{}n}z^n$ はそれらの値の無限集合 $\{f^{(\ell)}(\alpha) \mid \ell\geqq 0, \alpha\in\bar{\boldsymbol{Q}}^{\times}\}$ および、固定された d に対する値の無限集合 $\{g_d^{(\ell)}(\alpha) \mid \ell\geqq 0, \alpha\in\bar{\boldsymbol{Q}}^{\times}\}$ が代数的独立となる。また、研究代表者は先行研究においてフィボナッチ数列 $\{F_n\}_{n\geqq 1}$ が生成する冪級数 $h(z)=\sum_{n\geqq 1}\gamma^{F_n}z^n$ について、値の無限集合 $\{h^{(\ell)}(\alpha) \mid \ell\geqq 0, \alpha\in\bar{\boldsymbol{Q}}^{\times}\}$ が代数的独立であることを示している。つまり、$f(z)$ と $g_d(z)$ 及び $h(z)$ はそれらの零点を除く相異なる代数的数における値 及びそれら代数的数における逐次微分をすべて併せた無限集合が代数的独立となっている。

$F_d(z)$ は上述の $f(z)$, $g_d(z)$, $h(z)$ と比して次の２点においてより興味深いと考えられる。すなわち、

- $d\geqq 2$ を動かした場合の $g_d(z)$ の代数的数における逐次微分をすべて併せた無限集合の代数的独立性は未知である。すなわち、無限集合 $\cup_{d\geqq 2}\{g_d^{(\ell)}(\alpha) \mid \ell\geqq 0, \alpha\in\bar{\boldsymbol{Q}}^{\times}\}$ が代数的独立か否か分かっていない。
- $f(z)$, $g_d(z)$, $h(z)$ の零点の分布は未知である。従って、これらの整関数の明示的な無限積表示は得られていない。

これに対して、無限積表示された整関数 $F_d(z)=\prod_{n\geqq 1}(1-z/R(d^n))$ は零点を除く代数的数における逐次微分をすべて併せた無限集合 $\cup_{d\geqq 2}\{F_d^{(\ell)}(\alpha) \mid \ell\geqq 0, \alpha\in\bar{\boldsymbol{Q}}^{\times}, \alpha\neq R(d^n)\}$ が代数的独立となる。

上述後者のような、$F_d(z)$ の相異なる代数

的数における値が１変数の Mahler 関数の特殊値に帰着され、従ってそれらの値が代数的従属となる例外が現れる場合については、代数的従属であることを示す明示的な関係式を求めるという意味での定式化を進めた。これを実現するにあたっては、相反多項式の根に関する精密な考察が必要であり、代数学と複素解析の両面から研究を推進した。その結果、相反多項式の根を追跡するある種のアルゴリズムを発見し、この問題の解決に至った。明示的な関係式を得るプロセスを証明した共著論文は査読付学術誌への掲載が決定した（雑誌論文[1]参照）。さらに、上述のアルゴリズムの証明を与える論文を現在 執筆中である。

一方、複素変数 x に関する冪級数 $\Psi(x, z)$ であって、２項回帰整数列 $\{R(n)\}_{n\geqq 1}$ に対する $\Phi(z) = \prod_{n\geqq 1}(1-z/q^{R(n)})$ の導関数 $\Phi'(z)$ と $\Psi(1, z) = -\Phi'(z)$ という関係にあるもの、即ち $\Phi'(z)$ をその特殊化として含む２変数の冪級数 $\Psi(x, z)$ に関する値の完全代数的独立性の研究を通して「研究の目的」欄の最後で述べたことを実現できた。２項回帰整数列 $\{R(n)\}_{n\geqq 1}$ に対する $\Phi(z)$ の零点ではない代数的数 z を固定したとき、 x の関数 $\Psi(x, z)$ が完全代数的独立性を有することが研究代表者の従来の研究から導かれる。平成２３年度から本研究最終年度にあたる平成２４年度にかけての研究では、 x を単位円の外部に限定したとき $\Psi(x, z)$ を拡張した級数 $\Psi^*(x, z)$ は上記の目的を達成する関数であることを証明した。即ち、$\Psi^*(x, z)$ は単位円の外部の x と $\Phi(z)$ の零点でない z に対して完全代数的独立性を有する２変数関数であり、完全代数的独立となる $\Psi^*(x, z)$ の値の集合は、従来の Mahler 関数の枠を越えた２変数関数 $f_\lambda(z_1, z_2)$ 達の代数的数 α $(0<|\alpha|<1)$ における値 $f_\lambda(1, \alpha)$ として表されることを示した。各々の $f_\lambda(z_1, z_2)$ は、整数成分の２次正則行列 Ω の変数 z_1, z_2 への乗法的作用として記述される変数変換 $(z_1, z_2) \to \Omega(z_1, z_2)$ の下に、定数係数の関数方程式 $f_\lambda(z_1, z_2) = \xi_\lambda f_\lambda(\Omega(z_1, z_2))$ を満たす。ただし、Ω の成分のひとつは負であり、Ω は非負行列に限る、という従来の制約から外れている。研究代表者は、このような Ω であっても $\Omega \in SL_2(\mathbb{Z})$ であれば従来の Mahler 関数と類似した方法を適用できることを示し、値の完全代数的独立性を証明することができた。この成果をディオファンタス解析研究集会において発表した（学会発表[2]）。また、この結果を発展させた論文を学術誌に投稿し現在 査読中である。

これらの研究を推進した結果、超越数の新たなクラスの構造解明に寄与することができた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

[1] T. Kurosawa, Y. Tachiya, and <u>T. Tanaka</u>: Algebraic relations with the infinite products generated by Fibonacci numbers, *Ann. Math. Inform.* **41** (2013), 掲載決定（査読付き）.

[2] <u>T. Tanaka</u>: Algebraic independence properties related to certain infinite products, AIP Conference Proceedings **1385**, Diophantine Analysis and Related Fields 2011, American Institute of Physics, 2012, pp. 116－123（査読無し）.
doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.3630047

[3] T. Kurosawa, Y. Tachiya, and <u>T. Tanaka</u>: Algebraic independence of infinite products generated by Fibonacci numbers, *Tsukuba J. Math.* **34** (2010), pp. 255－264（査読付き）.
http://projecteuclid.org/euclid.tkbjm/1302268248

〔学会発表〕（計４件）

[1] <u>T. Tanaka</u>: Algebraic independence of the values of certain infinite products and their derivatives related to Fibonacci and Lucas numbers, RIMS 研究集会「解析的整数論とその周辺 ―近似と漸近的手法を通して見た数論」, 京都大学数理解析研究所, 2012 年 10 月 30 日.

[2] <u>T. Tanaka</u>: Algebraic independence of the values of Mahler functions with ‘negative’ transformations, Diophantine Analysis and Related Fields 2012, 新潟大学, 2012 年 1 月 10 日.

[3] <u>T. Tanaka</u>: Algebraic independence properties related to certain infinite products and Lambert series, Diophantine Analysis and Related Fields 2011, 成蹊大学, 2011 年 3 月 3 日.

[4] <u>T. Tanaka</u>: Algebraic independence of the values of a certain entire function defined by the infinite product, RIMS 研究集会「解析数論 ―複素関数の値の分布と性質を通して」, 京都大学数理解析研究所, 2010 年 10 月 8 日.

６．研究組織
(1)研究代表者
　田中　孝明 (TANAKA TAKAAKI)
　慶應義塾大学・理工学部・専任講師
　研究者番号：60306850

(2)研究分担者
　該当なし

(3)連携研究者
　該当なし