

Title	離散化した超対称ゲージ理論に基づく量子重力の探求
Sub Title	Study of quantum gravity based on discretised supersymmetric gauge theories
Author	松浦, 壮(Matsuura, So) 太田, 和俊(Ohta, Kazutoshi)
Publisher	
Publication year	2024
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2023.)
JaLC DOI	
Abstract	本研究では、超対称ヤン・ミルズ理論の数値解析と理論的考察が進められた。我々は、球面上の$N=(2,2)$超対称ヤン・ミルズ理論の格子上での定義とその連続極限の挙動を調査し、フェルミオンのゼロモードに関する問題を発見し、グラフ理論を用いて詳細な解析を行った。その解析の過程で、グラフ上のゲージ理論とグラフゼータ関数との関係を見だし、これを用いてlarge Nにおける分配関数の正確な計算に成功した。この成功を受けて構築したモデル (FKMモデル) の相構造を理論的・数値的に検証し、このモデルが、ユニバーサルに3次相転移を起こすことを示す強い証拠を得た。この研究は、超対称ゲージ理論の理解を深める重要な成果である。 We have investigated supersymmetric Yang-Mills theory via both of numerical and theoretical ways. Our research focused on defining the $N=(2,2)$ supersymmetric Yang-Mills theory on a lattice set on a spherical surface and investigating its behavior in the continuum limit. We discovered issues related to the zero modes of fermions. Through this analysis, we uncovered a relationship between gauge theory on graphs and the graph zeta function, which enabled us to accurately calculate the partition function of a gauge theory on the graph in the large N limit. We have then constructed a model called the FKM model and examined its phase structure in detail. We obtained strong evidence showing that this model universally exhibits third-order phase transitions. These findings represent significant advancements in our understanding of supersymmetric gauge theories.
Notes	研究種目：基盤研究 (C) (一般) 研究期間：2020～2023 課題番号：20K03934 研究分野：素粒子理論
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_20K03934seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

令和 6 年 6 月 6 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03934

研究課題名（和文）離散化した超対称ゲージ理論に基づく量子重力の探求

研究課題名（英文）Study of quantum gravity based on discretised supersymmetric gauge theories

研究代表者

松浦 壮（MATSUURA, So）

慶應義塾大学・商学部（日吉）・教授

研究者番号：70392123

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究では、超対称ヤン・ミルズ理論の数値解析と理論的考察が進められた。我々は、球面上の $N=(2,2)$ 超対称ヤン・ミルズ理論の格子上での定義とその連続極限の挙動を調査し、フェルミオンのゼロモードに関する問題を発見し、グラフ理論を用いて詳細な解析を行った。その解析の過程で、グラフ上のゲージ理論とグラフゼータ関数との関係を見だし、これを用いて large N における分配関数の正確な計算に成功した。この成功を受けて構築したモデル（FKMモデル）の相構造を理論的・数値的に検証し、このモデルが、ユニバーサルに3次相転移を起こすことを示す強い証拠を得た。この研究は、超対称ゲージ理論の理解を深める重要な成果である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で得られた結果は、超対称ゲージ理論の理解を深める重要な知見を提供し、理論物理学の発展に大きく寄与するものである。特に、超対称ヤン・ミルズ理論の数値解析と理論的考察を通じて得られた知見は、ゲージ理論を非摂動的に解析する際の基板となるものである。また、その過程で得られたFKMモデルは、現実的なゲージ理論との関係も深く、より深い理解が待たれるモデルである。特に、グラフ理論とグラフゼータ関数を用いた解析手法は、他の分野にも応用可能であり、広範な科学技術の進歩に寄与することが期待される。総合的に、本研究は、将来的な科学の発展、及び、新しい解析手法の創出に繋がる可能性を開いたものと評価できる。

研究成果の概要（英文）：We have investigated supersymmetric Yang-Mills theory via both of numerical and theoretical ways. Our research focused on defining the $N=(2,2)$ supersymmetric Yang-Mills theory on a lattice set on a spherical surface and investigating its behavior in the continuum limit. We discovered issues related to the zero modes of fermions. Through this analysis, we uncovered a relationship between gauge theory on graphs and the graph zeta function, which enabled us to accurately calculate the partition function of a gauge theory on the graph in the large N limit. We have then constructed a model called the FKM model and examined its phase structure in detail. We obtained strong evidence showing that this model universally exhibits third-order phase transitions. These findings represent significant advancements in our understanding of supersymmetric gauge theories.

研究分野：素粒子理論

キーワード：素粒子理論 超対称性 格子ゲージ理論 数値計算 グラフ理論

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Maldacena 氏によって提唱された AdS/CFT 対応を筆頭とするゲージ理論と重力理論の双対性 (ゲージ/重力対応) (i) は、素粒子の運動を支配するゲージ理論と超弦理論を背景にもつ重力理論が等価であるという予想で、様々な応用を生みだしてきた。実際、この双対性を通じて、ブラックホールの情報喪失問題に代表される量子重力に関わる諸問題に重要な示唆が得られただけでなく、量子色力学(QCD)、超伝導、超流動といった物理に重力理論を利用しようとする魅力的な試みも盛んに行われ、ゲージ/重力対応の応用範囲は生まれ故郷である素粒子論の枠組みを超えた広がりを見せていた。

しかしながら、この発展には、重力理論と双対な超対称ゲージ理論を解析する完全な方法が確立できていないという問題があった。超対称ゲージ理論は、超対称性という強い縛りを積極的に使うことで、一部の物理量については厳密な計算が可能で多くの実りをもたらしたが、その一方で、超対称性で縛られた一部の物理量にしか適用できないという弱みを持つ。そのため、ゲージ/重力対応の研究にこの手法を採用する限り、ゲージ/重力対応を部分的に検証することはできても、量子重力のダイナミクスに絡んだ興味深い問題に迫るのは原理的に難しい。すなわち、ゲージ/重力対応を真の意味で理解したければ、超対称ゲージ理論を摂動論に頼ることなく解析する第一原理的な計算法の構築が必要となっていた。

場の理論を第一原理から計算するための最も確実な方法は、QCD に対して格子 QCD がそうであったように、理論を有限自由度の統計系に正則化することである。この王道が実現出来ればここで述べた問題は直ちにクリアできるが、超対称変換は 2 回行くと並進変換になることを思い出すと、この路線は一筋縄ではいかないことがわかる。実際、時空を格子状に区切ると、システムから並進対称性が失われるため、代数の中に並進変換を含む超対称性の全てを格子上に保つことが原理的に不可能になってしまう。これがネックとなり、「超対称格子理論」の研究は大きく発展出来ない時期が続いた。

ところが、2000 年代初頭に、超対称性を部分的に残して格子理論を構成できることが判明したことで研究が急速に進展した。当初、2 次元以上の超対称ゲージ理論を格子上に定義する試みが複数の研究グループによって独立になされ(ii)、混沌とした状況であったが、申請者とニールスボーア・アカデミーの所長を務める Dangaard 氏との共同研究によって系統的な分類がなされ、最終的に、杉野氏による理論(杉野理論)(iii)と、Kaplan 氏のグループによる理論 (CKKU 理論)(iv)の 2 種類にまとめられた。

このうち、CKKU 理論は定義が簡単でプログラムの作成が易しい反面、U(1)セクターの分離や余分な零質量モードの存在といった理論的な問題があるため、意味のある結果を得るために複雑なパラメータ調整を必要とする。一方、杉野理論はプログラムの作成にこそ手間を要するが、自然な操作で超対称ゲージ理論が実現できる。実際、トーラス上の 2 次元 $N=(2,2)$ 超対称ヤン・ミルズ理論に対応する杉野理論に関しては、金森氏、鈴木氏、花田氏らによって数値シミュレーションを実行する上での技術的課題が解決され、正しく連続極限が取れることが確認された。これらの成果によって、最適な格子理論は実質的に杉野理論に一本化されたと言える。

また、花田氏、杉野氏、松浦は、Maldacena 氏等によって提案された、2 次元非可換球面上のゲージ理論を行列正則化する方法を応用し、特定の変形を施した 2 次元超対称格子ヤン・ミルズ理論から適切な極限をとることで、4 次元超対称ヤン・ミルズ理論が実現できることを理論的な立場から明らかにしていた(v)。

その後、 $N=(2,2)$ 超対称ヤン・ミルズ理論の杉野理論は、鎌田氏、三角氏、太田氏、松浦によって任意に分割された 2 次元面上の理論として拡張され、並列計算アルゴリズムを実装した数値計算プログ

ラムも整備されていた(vi)(vii)。

以上が、本課題開始当時の背景である。

【参考文献】

- (i). J.M.Maldacena, Adv.Theor.Math.Phys.2:231, 1999
- (ii). A.G.Cohen,D.B.Kaplan,E.Katz,M.Unsal, JHEP 0308:024, 2003, JHEP 0312:031, 2003:
F. Sugino, JHEP 0401:015,2004: S. Catterall, JHEP 0411:006,2004: A. D'Adda, I. Kanamori, N. Kawamoto, K. Nagata, Phys.Lett. B633:645, 2006.
- (iii). F. Sugino, JHEP 0401:015,2004.
- (iv). A. G. Cohen, D. B. Kaplan, Emanuel Katz, M. Unsal, JHEP 0308:024, 2003, JHEP 0312:031, 2003.
- (v). M. Hanada, S. Matsuura and F. Sugino, Prog.Theor.Phys.126 597(2011)
- (vi). S.Matsuura, T.Misumi, K.Ohta, PTEP 2014 (2014) 12, 123B01, PTEP 2015 (2015) 3, 033B07
- (vii). S.Kamata, S.Matsuura, T.Misumi, K.Ohta, PTEP 2016 (2016) 12, 123B01

2. 研究の目的

この状況を受け、

1. ゲージ/重力対応で重力理論との対応が预言されている超対称ゲージ理論を有限自由度統計系として正則化し、あらゆる物理量を数値的に正しく計算する手法を確立すること
2. 超対称ゲージ理論の数値計算を通じて、ゲージ/重力対応に基づいた量子重力の効果を検証すること

を目標として研究を行った。

3. 研究の方法

研究開始当初に予定していた研究方法は以下の通りである。

比較的単純な2次元 $N=(2,2)$, $(4,4)$ 超対称ヤン・ミルズ理論を正則化し、連続極限やラージ N 極限を取る際に起こりうる問題を検証する

数値計算を行う際には、知られている物理量が正しく再現できることを綿密にチェックすることが重要である。なぜなら、プログラムは常にバグを含む可能性があるため、このようなチェックがクリアされない限り、他の計算を行ったとしても結果が全く信用出来ないからである。幸い、超対称ゲージ理論には厳密な値が知られている物理量が存在する。本研究の序盤では、それらの物理量を指標にしながら、現在までの研究では手薄になっている連続極限で生じるゼロモードの有無、符号問題の影響といった問題を系統的に調査し、これまで積み上げてきた技術を盤石なものにする。

培った技術を用いて2次元 $N=(8,8)$ 超対称ヤン・ミルズ理論を正則化し、双対性予想の検証と重力の量子効果の評価を行う。

2次元 $N=(8,8)$ 超対称ヤン・ミルズ理論は、超弦理論から重力理論と対応することが预言されているゲージ理論のひとつである。 $N=(2,2)$, $(4,4)$ で培った技術を応用してこの理論を正則化し、そこから計算される物理量を評価することで量子重力の効果を検証する。具体的には、超対称格子ゲージ理論に

レプリカ法を実装し、エンタングルメントエントロピーとその $1/N$ 補正を評価する。その結果を笠-高柳の公式と比較することで、ゲージ/重力対応が量子重力の領域においても正しく機能するかを検証できると考えている。

2次元超対称ヤン・ミルズ理論にマイヤーズ項を加えて変形し、数値計算によって4次元の $N=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論を実現する。

我々の研究グループは、2次元 $N=(8,8)$ 理論にマイヤーズ項を導入し適切な極限を取ることで、4次元 $N=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論が実現できることを理論的に示したが、この方法が数値計算のレベルで正しく機能するかどうかは未検証である。そこで、数値計算によって超対称性、共形対称性、ポアンカレ対称性に関するウォード高橋恒等式を評価し、4次元 $N=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論が正しく実現できているかを数値的にチェックする。

4. 研究成果

$N=(2,2)$ 超対称ヤン・ミルズ理論の格子上の定義と連続極限の調査

球面上の $N=(2,2)$ 超対称ヤン・ミルズ理論を格子上に定義し、その連続極限の挙動を数値的・理論的に調査した。まず、計算コードを並列計算が可能な形に書き換え、大きな格子サイズにも対応出来るように改良した。その上で、ハミルトニアン保存、分子動力学の時間反転対称性などの代表的な検証を行うと共に、超対称変換に関して作用が不変であることを数値レベルで確かめた。

その後、格子上に保たれている超対称性に関する Ward-高橋恒等式が成立するかどうかを検証した。通常、これは自明なチェックに属するが、背景が球面の時にはアノマリーの影響を受けて非自明な現象が起こることが明らかになった。球面背景では真空自体が $U(1)$ 電荷を持つため、意味のある物理量を評価するためにはその電荷をキャンセルする必要がある。我々の先行研究において、この $U(1)$ 電荷をキャンセルするために compensator という演算子を提案していたが、今回の研究で、作用が持つ対称性に由来する Ward-高橋恒等式を評価する時ですら、フェルミオンを含んだ適切な compensator を用いる必要があることが明らかになった。

更に、連続極限に近づくにつれてフェルミオンのゼロモードが顕在化し、連続極限の回復を阻むことも明らかになった。これは球面背景に限った話ではなく、トーラス背景でも同様の問題が生じ得る根源的な問題である。

離散化された $N=(2,2)$ 超対称ヤン・ミルズ理論の新構造の発見

上記の結果を受けて、我々は、グラフ理論の手法を用いて、離散化された $N=(2,2)$ 超対称ヤン・ミルズ理論のスペクトル構造を詳細に調べた。我々はまず、理論で大切な役割を果たす鞍点まわりの構造は、グラフ理論に登場する入射行列と呼ばれる行列のスペクトルで規定されることを明らかにした。そして、この理論の分配関数は、鞍点まわりに必ずフェルミオンのゼロモードが生じるために、その処理をしない限り分配関数そのものが定義不可能になってしまうことを明らかにした。このゼロモードは鞍点の直上でしか顕在化しないため、数値計算では認識されないが、連続極限に近づくにつれてその影響が大きくなる。これが、本来なら成り立つべき数値計算が破綻した原因と考えられる。これは、連続理論における解析でも見逃されていた事象であり、今後、他の超対称ゲージ理論を数値的に解析する際には常に考慮に入れなければならない特性である。

フェルミオン・ゼロモード問題とグラフゼータ関数の関係の発見

離散化した $N=(2,2)$ 超対称ゲージ理論のフェルミオン・ゼロモードの問題を解決するためには、このゼロモードをキャンセルする演算子が必要になる。そのような演算子を構成しようと試みたところ、1992 年に Kazakov と Migdal によって発見された模型(KM 模型)の作用と同じ形をした演算子が最有力候補として上がることとなった。

この演算子を精査したところ、その期待値がグラフのサイクルを数え上げる働きをすることが示唆された。そこで、ひとつの試行として、この演算子をグラフ上に一般化された KM 模型の作用とみなして分配関数を計算したところ、グラフゼータ関数と呼ばれる関数を行列重み付けして拡張されたものになっていることを発見した。

グラフゼータ関数は、グラフ上の原始サイクルをカウントする関数で、その逆数が有限行列の行列式で表されるという著しい性質を持っている。我々は、行列重み付けしていてもこの性質が失われないことを証明し、large N におけるグラフ上に一般化された KM 模型の分配関数を正確に計算することに成功した。

さらに、KM 模型から派生した別の模型(FKM 模型)についても、グラフゼータ関数による記述ができることを見いだした。この模型は、Wilson 型格子ゲージ理論と近い特性を持ち、特に連続極限においてヤン・ミルズ理論を再現する可能性が示唆される興味深い模型である。我々は、グラフゼータ関数の特性を利用して、この模型が、考えているグラフの詳細によらずに、large N において相転移現象を起こすことを見いだした。

FKM 模型の相構造の解明

上記のように構築された模型の中でも、FKM 模型は、標準的な格子ゲージ理論の作用である Wilson 作用をその中に含み、ゲージ理論と同じ対称性を持つ模型であると同時に、その分配関数がグラフゼータ関数で表されるという著しい特性を持つ。そこで我々は、パラメータ領域を制限して、分配関数が、伊原ゼータ関数と呼ばれる最も単純なグラフゼータ関数になるような FKM 模型を詳細に調べた。

我々はまず、FKM 模型を GWW 模型と呼ばれる単純な理論で近似することで、弱結合領域での相転移の回数が、グラフの基本サイクルの角数のバリエーションによって決まることを明らかにした。また、伊原ゼータ関数に成り立つ関数等式と呼ばれる恒等式に対応して、FKM 模型が強結合領域と弱結合領域の間に双対性を持つことを明らかにした。これは、現実のゲージ理論への新しい知見を含む可能性のある、興味深い成果である。

我々はまた、これらの理論的な予言を数値計算によって検証し、理論の構造を正しく捉えていることを確認すると同時に、グラフの詳細に依らずに、相転移の次数が 3 次であることを示す強い証拠を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Matsuura So, Ohta Kazutoshi	4. 巻 108
2. 論文標題 Gross-Witten-Wadia phase transition in induced QCD on the graph	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Physical Review D	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1103/physrevd.108.054504	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Matsuura So, Ohta Kazutoshi	4. 巻 2022
2. 論文標題 Kazakov-Migdal model on the graph and Ihara zeta function	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/JHEP09(2022)178	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Matsuura So, Ohta Kazutoshi	4. 巻 2022
2. 論文標題 Graph zeta functions and Wilson loops in a Kazakov-Migdal model	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/ptep/ptac146	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Matsuura So, Ohta Kazutoshi	4. 巻 -
2. 論文標題 Supersymmetric Gauge Theory on the Graph	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/ptep/ptac018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 松浦壮, 太田和俊
2. 発表標題 グラフゼータ関数から見た格子ゲージ理論のGWW相転移について
3. 学会等名 日本物理学会2023年秋季大会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 松浦壮
2. 発表標題 GWW Phase Transition in Induced QCD on the Graph
3. 学会等名 離散的手法による場と時空のダイナミクス 2023
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 松浦壮
2. 発表標題 GWW Phase Transition in Induced QCD on the Graph
3. 学会等名 Strings and Fields 2023
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 花田政範, 菅野聡, 松浦壮, 渡辺展正
2. 発表標題 単調性を用いたレプリカ交換モンテカルロ法の拡張と行列幾何学
3. 学会等名 日本物理学会2022年秋季大会
4. 発表年 2022年

1．発表者名 松浦壮，太田和俊
2．発表標題 Kazakov-Migdal模型とグラフゼータ関数
3．学会等名 日本物理学会2022年秋季大会
4．発表年 2022年

1．発表者名 松浦壮
2．発表標題 Kazakov-Migdal 模型とグラフゼータ関数
3．学会等名 離散的手法による 場と時空のダイナミクス2022
4．発表年 2022年

1．発表者名 松浦壮
2．発表標題 Supersymmetric Gauge Theory on the Graph
3．学会等名 離散的手法による 場と時空のダイナミクス 2021
4．発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6．研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	太田 和俊 (Ohta Kazutoshi)		

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------