慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	様々な効果を持つ非線形楕円型方程式の解構造の研究
Sub Title	Study of the strucure of solutions to nonlinear elliptic equations with various effects
Author	生駒, 典久(Ikoma, Norihisa)
Publisher	
Publication year	2024
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2023.)
JaLC DOI	
Abstract	本研究課題では特異性や非局所効果のある非線形楕円型方程式の解構造の解明を目標とし，研究を行った．得られた成果は，Born-Infeld方程式(特異性のある方程式)の最小化元の正則性と弱解との関係，分数冪ラプラシアンとHardy-Henon型非線形項を持つ方程式(非局所性のある方程式)の安定解の存在や非存在，また安定解の族が層構造を持つことも示すことができた．これら以外にも劣線形項を持つ方程式，1次元Pucci作用素を含む方程式，大きなパラメータを含む楕円型方程式，L2制約条件付き問題それぞれについて解の存在や形状等を調べ明らかにした． The aim of this research project was to investigate the structure of nontrivial solutions to elliptic equations involving singularities, nonlocalities and so on. During the period, the following results were obtained. For the Born-Infeld equation(this equation has a singularity), the regularity of minimizer as well as the relation between minimizers and weak solutions were studied. For the equation with the fractional Laplacian and the Hardy-Henon type nonlinearity (the equation has a nonlocality), the existence and nonexistence of stables solutions was proved. The layer property of the family of stable solutions were also shown. In addition to these two equations, the existence of nontrivial solutions and their properties were obtained for the equation with sublinear nonlinearities, a class of equations involving the 1 dimensional Pucci operators, the equation with large parameters and the equation with a constraint on the L^2 norm of solutions.
Notes	研究種目：基盤研究 (C) (一般) 研究期間：2019～2023 課題番号：19K03590 研究分野：偏微分方程式
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_19K03590seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　 ４ 月 ２４ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３５９０

研究課題名（和文）様々な効果を持つ非線形楕円型方程式の解構造の研究

研究課題名（英文）Study of the strucure of solutions to nonlinear elliptic equations with various effects

研究代表者
生駒　典久（Ikoma, Norihisa）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・准教授

研究者番号：５０７２８３４２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では特異性や非局所効果のある非線形楕円型方程式の解構造の解明を目標とし，研究を行った．得られた成果は，Born-Infeld方程式(特異性のある方程式)の最小化元の正則性と弱解との関係，分数冪ラプラシアンとHardy-Henon型非線形項を持つ方程式(非局所性のある方程式)の安定解の存在や非存在，また安定解の族が層構造を持つことも示すことができた．これら以外にも劣線形項を持つ方程式，1次元Pucci作用素を含む方程式，大きなパラメータを含む楕円型方程式，L2制約条件付き問題それぞれについて解の存在や形状等を調べ明らかにした．

研究成果の学術的意義や社会的意義
Born-Infeld方程式については，これまでの先行研究とは異なる着眼点から研究を行い，得られた成果も先行研究とは大きく異なる．特に光線分を持つ弱解の存在を示し，エネルギー汎関数の最小化元だが弱解とはならない例を構成できたことも非常に意義深い．分数冪ラプラシアンを含む方程式では，安定解の族とその層構造の存在を示した．これは先行研究を大きく前進させるものであり，新しい技法を発見した．さらに副産物として得られたJoseph-Lundgren指数の複数存在という結果もこれまで考えられてこなかった状況である．これは更なる研究を呼び起こす可能性のある結果であり，興味深いことを見つけたと言える．

研究成果の概要（英文）：The aim of this research project was to investigate the structure of nontrivial solutions to elliptic equations involving singularities, nonlocalities and so on. During the period, the following results were obtained. For the Born-Infeld equation(this equation has a singularity), the regularity of minimizer as well as the relation between minimizers and weak solutions were studied. For the equation with the fractional Laplacian and the Hardy-Henon type nonlinearity (the equation has a nonlocality), the existence and nonexistence of stables solutions was proved. The layer property of the family of stable solutions were also shown. In addition to these two equations, the existence of nontrivial solutions and their properties were obtained for the equation with sublinear nonlinearities, a class of equations involving the 1 dimensional Pucci operators, the equation with large parameters and the equation with a constraint on the L^2 norm of solutions.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：非自明解　Born-Infeld方程式　弱解と最小化元　光線分　分数冪ラプラシアン　安定解　層構造

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究課題を開始した当初の目的は特異性や非局所性を持つ非線形楕円型方程式の解構造および解の性質を解明することであった．特異性を持つ方程式としては Born-Infeld 方程式を，非局所性を持つ方程式としては分数冪作用素を含む方程式を主に解析する予定であった．

Born-Infeld 方程式については，外力を与えたとき方程式に対応するエネルギー汎関数の最小化元がただ 1 つ存在することはよく知られていたが，その最小化元が方程式の解となるか，という問については外力が有界な場合や球対称な場合を除いてあまり多くのことが知られていなかった．

一方，分数冪作用素を含む方程式については，1 次元の方程式を解析する予定であった．この方程式についてはこれまで他の方程式について有効であったいくつかの方法がうまく働かず，全く新しいアイデアが必要とされていた．

２．研究の目的

本研究課題の目的は，物理学や幾何学等において現れる非線形楕円型方程式の解構造を解明することにあり，その中でも特異性や非局所性を持つ方程式に焦点を絞って研究を行う予定であった．ここで解構造の解明とは，まず非自明解の存在・非存在を明らかにすることである．非自明解の存在を示すことができればその後，非自明解が持つ性質(解の符号に関する情報，解の正則性，解の対称性，解の多重存在性など)を明らかにすることである．

３．研究の方法

本研究課題で扱った非線形楕円型方程式は変分構造を持つ．したがって方程式の解を見つけるには対応するエネルギー汎関数の臨界点の存在を示せば良い．汎関数の臨界点を見つける強力な方法は臨界点理論であり，本研究課題でも臨界点理論を主に使用している．ただし「4.研究成果」欄(1)の方程式では，汎関数の臨界点が方程式の解となるかは自明ではない．そのため方程式の近似を行い，幾何学的な構造および線形化方程式の解析を通じ汎関数の臨界点の性質を調べた．また(2)のテーマでは，エネルギー汎関数の臨界点を見つけるだけでは不十分であり，比較原理や分数冪ラプラシアンを局所的な作用素とみなすための拡張問題の技法を組み合わせた．それ以外のテーマでは，方程式の解のさらなる性質を解明するために汎関数の形状やパラメータによる漸近的な挙動を詳しく解析した．

４．研究成果

研究実施期間中，次のテーマについて研究成果が得られた:

(1) Born-Infeld 方程式.
(2) 分数冪ラプラシアンに対する Hardy-Hénon 型方程式.
(3) 劣線形項を伴う非線形楕円型方程式.
(4) 1 次元 Pucci 作用素を含む楕円型方程式の変分法による解析.
(5) 大きなパラメータを含む非線形楕円型方程式.
(6) L^2 正規化解の存在.

以下ではそれぞれのテーマ毎に詳述していく．

(1) 本テーマでは次の 2 つの問題を扱った:

① 外力項の正則性(主に可積分性)とエネルギー汎関数の最小化元の正則性
② 非線形反応項を伴う方程式の非自明解の存在

① 得られた研究結果は外力項に対する可積分性に対する比較的弱い条件の下，エネルギー汎関数の最小化元が方程式の弱解となることを示した．この問題では最小化元が光線分を含むかどうかが非常に重要になり，これまでの研究では外力項に対しもっと強い条件を課し，最小化元が光線分を含まないことを示し，最小化元が方程式の解となることが示されていた．一方，我々が得た結果は，弱い可積分条件の下，最小化元が方程式の弱解にいつなるかを考察した初めての試みであり，最小化元が光線分を持つことを許容している．実際，我々の研究により，方程式の弱解であるが(エネルギー汎関数の最小化元でもある)，光線分を含むものを具体的に構成した．したがってここで得られた研究成果はこれまでの研究手法や考え方からは得られない独創的な成果である．またこの具体例から弱解を基点として考えた際，既存の研究では見つけられていなかった新しい可積分指数の閾値の予想を得ることができた．この可積分指数に対する予想が正しいかどうかは更なる研究を引き起こすように思える．また，上で述べた具体的な弱解の例の副産物として，外力項の条件をもっと弱めてしまうとエネルギー汎関数の最小化元ではあるが，方程式の弱解とは決してならない例も構成することができた．エネルギー汎関数の最小化元ではあるが，方程式の弱解とはならない例は知られておらず，このような観点からも我々の研究成果がインパクトのあるものだと言える．

② 得られた研究成果は，正値解の存在と非自明解の多重存在(可算無限個)である．この結果を得るため，Monotonicity Trick と呼ばれる手法を下半連続な汎関数に対し拡張した．また解の多重存在を得るため既存の研究では Palais-Smale(-Cerami)条件，スケーリングの方法，補助汎関数の構成などが取られてきた．本研究では従来の方法とは異なり Monotonicity Trick のみを用いても解の多重存在が得られる，ということが分かった．我々の結果は滑らかな汎関数の場合でも新しい結果となっている．また Born-Infeld 方程式以外の多くの方程式に対しても適用できる見込みがあり，今後の研究において活用されることが期待できる．

(2) この方程式については安定解と呼ばれる最も基本的な性質を持つ解について研究を行い，次の 2 点の成果を得た：
① 安定解の非存在．
② 安定解の存在と安定解が持つ性質．
① 方程式右辺の冪乗型非線形項の指数が Joseph-Lundgren 指数よりも小さい(Joseph-Lundgren 劣臨界)とき，安定解が存在しないことを示した．冪乗型非線形項の前に空間変数による重みがない場合，既に先行研究があり，この結果は主にその先行研究の議論を参考にした．ただし本研究では冪乗型非線形項の空間変数による係数が特異性を持つ場合も含まれるため，議論の細かい修正が必要になった．また先行研究では見落とされていた条件についても発見した．
② 冪乗型非線形項の指数が Joseph-Lundgren 指数以上(Joseph-Lundgren 臨界および優臨界)の場合に方程式の正値解であり，安定解となっている族の存在を示した．さらにこれらの安定解の族が原点での値で特徴付けられ，層構造を成していること，さらに原点の値が大きくなるにつれこの安定解は冪型特異解に収束することを明らかにした．空間変数による冪乗型の係数がない場合の先行研究では，非常に特別なときのみ正値安定解の層構造が得られ，その他の場合は正値安定解の族までしか得られておらず，層構造までは得られていなかった．これらの成果は先行研究と異なる方法により証明することができた．この研究の副産物として Joseph-Lundgren 指数が複数存在する場合を発見した．この指数が複数存在するとはこれまで知られておらず，またラプラシアンでは起こりようがなかった現象であり，非常に興味深い現象を見つけることができた．現在の所 Joseph-Lundgren 指数が複数存在することの深い意味が知られていない．この点については更なる研究が必要であるように思える．

(3)このテーマでは，劣線形となる冪乗型非線形項を考察し，非負非自明解が存在するための必要十分条件を求めた．更に方程式を原点中心の球上で考えると得られた必要十分条件から非負非自明解が存在するための最小半径が存在する．そこで半径を大きい方からこの最小半径に近づけたとき，非負非自明解が球上の Dirichlet 境界条件下での第一固有関数をスケールしたものに漸近していくことを解明した．また劣線形性を表す指数を 0 に近づけると非自明解が Neumann 境界条件下での第二固有関数に，指数を 1 に近づけると適切なスケール変換の下，対数非線形 Schrödinger 方程式の解に漸近することも明らかにした．先行研究との対比であるが，劣線形な非線形項を持つ場合は優線形の場合と比べるとそれほど多く研究がされていなかった．その中でも我々が得た結果の特筆すべき点は，非負非自明解の漸近挙動を詳細に決定したことにある．優線形冪乗型非線形項の場合の結果はあったが，指数を 0 に近づけたときの挙動や最小半径に近づけたときの挙動はこれまで知られていなかった．

(4)このテーマでは臨界点理論により非線形楕円型方程式の正値解の存在を示した．ここで扱った非線形楕円型方程式のクラスは，1 次元の Pucci 作用素を含むことを目的に一般化している．Pucci 作用素は完全非線形楕円型作用素の中でも最も基本的な作用素であり重要であるが，一般に変分構造を持たず，臨界点理論を適用することができない．そこで変分構造を持つ非線形楕円型方程式の結果がどれだけ変分構造を持たない完全非線形楕円型方程式に拡張できるかは非常に興味深い問題であるが，先行研究は非常に限られている．今回考えた方程式のクラスはこの問題を動機としているため，類似の先行研究はなく，独創的である．

(5) 大きなパラメータを含む非線形楕円型方程式
このテーマではポテンシャル項を含む非線形楕円型方程式を考え，非線形反応項の係数をパラメータとして扱い，このパラメータが非常に大きいとき，方程式の正値解が存在することを解明した．さらにパラメータを無限大に持っていたときの正値解の漸近形も明らかにした．これまでの先行研究では，2 次元以上の方程式しか扱えず，また 2 次元のときはポテンシャル関数に色々な制約が課されていた．本研究では 2 次元以上の場合，ポテンシャル関数に対するテクニカルな条件は不要であることを示し，正値解の存在結果をより洗練した．1 次元の場合も先行研究では扱われておらず，本研究では 2 次元以上の問題と 1 次元の問題では本質的に状況が違うことが分かった．最後にパラメータを無限大に持っていったときの正値解の漸近形も既存研究では扱われておらず，本研究で明らかにすることができた．これらのことを証明するため，独自のアイデアを導入しテクニックを開発した．これらの観点からこの研究成果は独自性が高いと言える．

(6) L^2 劣臨界非線形項とポテンシャル項がある場合に L^2 正規化解の存在(正値解および可算無限個の解の存在)を示すことができた．L^2 正規化解の存在問題は現在活発に研究が行われている分

野であり，新しい研究結果がどんどん出てきている．その中でも本研究の特徴は Lagrangian function approach をポテンシャル項付きの問題に拡張したことである．既存研究では Lagrangian function approach はポテンシャル項がない場合にしか適用されていなかったが，本研究によりポテンシャル項を含んでいても適用可能であることが分かった．さらに Lagrangian function approach に Cerami 列を導入したのも本研究が初めてであり，このアプローチの更なる発展が見込める．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計7件（うち査読付論文　7件／うち国際共著　2件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Ikoma Norihisa、Tanaka Kazunaga、Wang Zhi-Qiang、Zhang Chengxiang	４．巻 71
２．論文標題 Nonlinear elliptic equations of sublinearity: qualitative behavior of solutions	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	６．最初と最後の頁 2001～2043
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1512/iumj.2022.71.9168	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Hasegawa Shoichi、Ikoma Norihisa、Kawakami Tatsuki	４．巻 227
２．論文標題 On weak solutions to a fractional Hardy-Henon equation, Part II: Existence	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Nonlinear Analysis	６．最初と最後の頁 113165～113165
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2022.113165	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Adachi Shinji、Ikoma Norihisa、Watanabe Tatsuya	４．巻 172
２．論文標題 Existence and asymptotic behavior of positive solutions for a class of locally superlinear Schroedinger equation	５．発行年 2023年
３．雑誌名 manuscripta mathematica	６．最初と最後の頁 933~970
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-022-01428-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Ikoma Norihisa、Yamanobe Mizuki	４．巻 24
２．論文標題 The existence and multiplicity of L^2-normalized solutions to nonlinear Schroedinger equations with variable coefficients	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Advanced Nonlinear Studies	６．最初と最後の頁 477～509
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/ans-2022-0056	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Hasegawa Shoichi、Ikoma Norihisa、Kawakami Tatsuki	４．巻 20
２．論文標題 On weak solutions to a fractional Hardy-Henon equation: Part I: Nonexistence	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Communications on Pure & Applied Analysis	６．最初と最後の頁 1559～1600
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/cpaa.2021033	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Ikoma Norihisa	４．巻 2
２．論文標題 On the existence of positive solutions to a certain class of semilinear elliptic equations	５．発行年 2021年
３．雑誌名 SN Partial Differential Equations and Applications	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s42985-021-00079-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Byeon Jaeyoung、Ikoma Norihisa、Malchiodi Andrea、Mari Luciano	４．巻 10
２．論文標題 Existence and Regularity for Prescribed Lorentzian Mean Curvature Hypersurfaces, and the Born?Infeld Model	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Annals of PDE	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40818-023-00167-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計14件（うち招待講演　14件／うち国際学会　5件）

１．発表者名 生駒典久
２．発表標題 Born-Infeld 方程式の弱解の存在，非存在およびその性質
３．学会等名 談話会(大阪大学)（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名
生駒典久

２．発表標題
ポテンシャル項付き L^2 正規化解の存在問題

３．学会等名
微分方程式セミナー(大阪大学)（招待講演）

４．発表年
2022年

１．発表者名
生駒典久

２．発表標題
The existence and nonexistence of weak solutions to the Born-Infeld equation

３．学会等名
Workshop on Non-compact Variational Problems and Related Topics（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2022年

１．発表者名
生駒典久

２．発表標題
Lagrangian function approach による L^2 正規化解の存在

３．学会等名
HMA セミナー・冬の研究会 2023(広島大学)（招待講演）

４．発表年
2023年

１．発表者名
生駒典久

２．発表標題
分数冪Hardy-Henon方程式に対する安定解の存在・非存在

３．学会等名
応用解析研究会（招待講演）

４．発表年
2021年

１．発表者名
生駒典久

２．発表標題
Solvability and Nonsolvability of Born-Infeld equation with general charges

３．学会等名
第39 回九州における偏微分方程式研究会（招待講演）

４．発表年
2022年

１．発表者名
生駒典久

２．発表標題
劣線形項を持つ非線形楕円型方程式の非負値解の挙動

３．学会等名
九州関数方程式セミナー（招待講演）

４．発表年
2020年

１．発表者名
生駒典久

２．発表標題
Existence of Small Positive Solutions to the Nonlinear Schroedinger Equation

３．学会等名
Special Session 47 Singular Limits in Elliptic and Parabolic PDEs (The 13th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations And Applications) (招待講演) (国際学会)

４．発表年
2023年

１．発表者名
生駒典久

２．発表標題
Existence and Nonexistence of Stable Solutions to a Fractional Hardy-Henon Equation

３．学会等名
Special Session 50 Nonlinear Elliptic PDEs: Analysis and Computations (The 13th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations And Applications) (招待講演) (国際学会)

４．発表年
2023年

１．発表者名
生駒典久

２．発表標題
Born-Infeld 方程式の弱解の存在，非存在およびその性質

３．学会等名
数理学談話会(金沢大学)（招待講演）

４．発表年
2023年

１．発表者名
生駒典久

２．発表標題
Existence of small positive solutions to the nonlinear Schroedinger equation

３．学会等名
Seminar at University of Turin（招待講演）

４．発表年
2023年

１．発表者名
生駒典久

２．発表標題
Existence of small positive solutions to the nonlinear Schroedinger equation

３．学会等名
Seminar at Scuola Normale Superiore di Pisa（招待講演）

４．発表年
2023年

１．発表者名
生駒典久

２．発表標題
The existence of normalized solutions for the nonlinear Schroedinger equationswith the L^2-critical growth

３．学会等名
RIMS研究集会（公開型）「発展方程式とその周辺 - エネルギー構造と解の定量的解析 -」（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2023年

１．発表者名 生駒典久
２．発表標題 The mountain pass theorem for nonsmooth functionals and its application
３．学会等名 OIST Workshop Geometric Aspects of Partial Differential Equations（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2024年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	ピサ高等師範学校	トリノ大学	ローマ大学	
韓国	KAIST			
中国	福建師範大学	北京師範大学		