慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	一般化Sturm-Liouville作用素に対するスペクトル理論とそのランダム化
Sub Title	Spectral theory for generalized Sturm-Liouville operators and its randomization
Author	南, 就将(Minami, Nariyuki)
Publisher	
Publication year	2023
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2022.)
JaLC DOI	
Abstract	一般化 Sturm-Liouville 作用素の例として、ホワイトノイズに 2 乗可積分な減衰因子をかけたものをポテンシャル項とする 1 次元シュレーディンガー作用素を考察した。ポテンシャル項はランダムな超関数であるが、作用素は対称作用素として定義され、確率 1 で自己共役となる。また、そのスペクトルの正の部分は確率 1 で絶対連続となり、負の部分はゼロ以外の集積点を持たない離散型であることが証明された。特に作用素は下に有界となる。 As an example of generalized Sturm-Liouville operator, we investigated a Schrodinger operator whose potential term consists of the white noise multiplied by a square integrable decaying factor. Although the potential term is not a usual function but a distribution, the operator is well defined, and is self-adjoint with probability one. Moreover, the positive part of its spectrum is absolutely continuous, while the negative part turns out to be discrete with no accumulation point other than zero. In particular, the operator is bounded from below.
Notes	研究種目 : 基盤研究 (C) (一般) 研究期間 : 2019 ~ 2022 課題番号 : 19K03526 研究分野 : 確率論
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_19K03526seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　 ５ 月 ３１ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ０３５２６

研究課題名（和文）一般化Sturm-Liouville作用素に対するスペクトル理論とそのランダム化

研究課題名（英文）Spectral theory for generalized Sturm-Liouville operators and its randomization

研究代表者
南　就将（MINAMI, Nariyuki）

慶應義塾大学・医学部（日吉）・教授

研究者番号：１０１８３９６４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：一般化 Sturm-Liouville 作用素の例として、ホワイトノイズに２乗可積分な減衰因子をかけたものをポテンシャル項とする１次元シュレーディンガー作用素を考察した。ポテンシャル項はランダムな超関数であるが、作用素は対称作用素として定義され、確率１で自己共役となる。また、そのスペクトルの正の部分は確率１で絶対連続となり、負の部分はゼロ以外の集積点を持たない離散型であることが証明された。特に作用素は下に有界となる。

研究成果の学術的意義や社会的意義
ホワイトノイズ・ポテンシャルは物理系が含む「乱れ」の数学的な理想化と言え、このようなモデルを詳しく研究することにより乱れを含む物理系に対する理論的な洞察が得られる。また、ポテンシャル項が超関数であるため、そのスペクトル解析には通常の関数解析的手法では足りず、確率論的手法を用いる必要がある。本研究の成果はこの２つの意味で乱れを含む物理系に対する数理解析の新しい事例と方向性を示している。

研究成果の概要（英文）：As an example of generalized Sturm-Liouville operator, we investigated a Schrodinger operator whose potential term consists of the white noise multiplied by a square integrable decaying factor. Although the potential term is not a usual function but a distribution, the operator is well defined, and is self-adjoint with probability one. Moreover, the positive part of its spectrum is absolutely continuous, while the negative part turns out to be discrete with no accumulation point other than zero. In particular, the operator is bounded from below.

研究分野：確率論

キーワード：Sturm-Liouville 作用素　ランダム作用素　シュレーディンガー作用素　絶対連続スペクトル　離散スペクトル　点過程

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

Sturm-Liouville 作用素とは、２階微分の項と、関数をかけることを作用とするゼロ階の項（ポテンシャル項）とを持つ常微分作用素のことである。（２階微分の項が通常のラプラス作用素である場合はシュレーディンガー作用素と呼ばれる。）その一般化としては、微分の項に一般の測度に関する微分を含めること、およびゼロ階の項として通常の関数だけではなく、超関数も許す、という２つの方向が考えられる。このような一般化 Sturm-Liouville 作用素に対するスペクトル理論の研究は古くから散発的に行われていたが、その多くは限られた応用のため、または一般化のための一般化を目的とした研究であり、数理物理への応用を目指す立場から総合的には行われていなかった。ところが、乱れを含むシステムに対する数理物理学の問題からは、ランダムな一般化 Sturm-Liouville 作用素がごく自然に現れる。たとえば、乱れを含むポテンシャルの数学的理想化としてホワイトノイズを考えることができるが、これは通常の関数ではなくランダムな超関数である。また、ベータアンサンブルと呼ばれる直線上のランダムな点配置（点過程）をスペクトルとする三重対角型のランダム行列（すなわちランダムな２階差分作用素）は一般化 Sturm-Liouville 作用素とみなされるが、その連続極限としてある種の超関数をポテンシャル項とするシュレーディンガー作用素が得られる。一方、通常の関数をポテンシャル項とするシュレーディンガー作用素、および測度に関する微分だけからなる作用素に対する逆スペクトル問題は Gelfand-Levitan および Krein により解かれていたが、両者を合わせた一般化 Sturm-Liouville 作用素に対する逆スペクトル問題はまだ考えられていない。

以上の状況を背景として、本研究は次のような動機の下に開始された：三重対角行列（２階差分作用素）および超関数をポテンシャル項とするシュレーディンガー作用素をともに含む一般化 Sturm-Liouville 作用素のクラスを適切に設定し、その中で連続極限等の極限定理を定式化し、さらに逆スペクトル問題が解けるようにしたい。また、数理物理的な意義をもつ具体例を解析したい。

２．研究の目的

本研究課題の申請時には、まず一般化 Sturm-Liouville 作用素を純粋にスペクトル理論の立場から系統的に詳しく考察し、その作業がある程度進んだ段階でランダム性を導入する、という計画を立て、以下の研究目的を設定した。

（１）測度に関する微分を含む 2 階の項と、超関数的なゼロ階の項を合わせ持つ一般化 Sturm-Liouville 作用素のクラスを設定する。超関数としては、各点 x において右連続かつ左極限を持つような関数 Q(x) の形式的微分 Q'(x) を想定する。このクラスに属する一般化 Sturm-Liouville 作用素に対して、まず固有関数展開の一般理論が成り立つことを確認する。

（２）（１）に述べた作用素のクラスに収束概念を導入し、対応するスペクトル測度の収束を調べる。

（３）上記の方向の研究とは別に、２階微分の項をラプラシアンとしたときに、作用素が２乗可積分関数のヒルベルト空間において自然に実現されるためには、どのような超関数がポテンシャル項として許されるかを確定させたい。先行研究としてデルタ関数の微分をポテンシャル項とするシュレーディンガー作用素を調べたものがあるが、これはポテンシャル項として Q''(x) を許すことに相当する。

（４）超関数的ポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素について Gelfand と Levitan の逆スペクトル問題の定式化を、特にスペクトル測度の増大度とポテンシャルの特異性の関係に注意しつつ行なう。

（５）作用素にランダム性を導入し、（１）および（２）の研究に基づいて、ランダム行列モデルの連続極限としてランダムな一般化 Sturm-Liouville 作用素が得られることを具体例により示す。

（６）小谷眞一氏は 1982 年に、エルゴード的なランダムポテンシャルを持つ１次元シュレーディンガー作用素の絶対連続スペクトルがリャプノフ指数（固有値方程式の解の指数増大度）により決定されるという著しい結果を得た。小谷氏はポテンシャルが有界な連続関数であることを仮定しているが、理論の一般性を考えるとこのような技術的な条件はできるだけゆるめることが望ましい。小谷理論の一部には逆スペクトル問題の解も必要となるので、（３）および（４）の研究を踏まえて小谷理論におけるランダムポテンシャルのクラスをどの程度の超関数にまで広げられるかを明らかにする。

（７）一般化 Sturm-Liouville 作用素の具体例として、減衰因子を持つホワイトノイズをポテンシャルとするシュレーディンガー作用素を考察する。ホワイトノイズの代わりにランダムな連続関数とした場合には小谷と右代谷（1988）による先行研究がある。スペクトルの正の部分についてはホワイトノイズの場合であっても定性的な差異が現れないと考えられたが、スペクトルの負の部分についてはポテンシャルがラプラシアンに対する摂動として扱われないので、その性質は明らかでなく、例えば作用素の下からの有界性も不明であった。確率解析的手法により、このような従来の作用素論では扱われなかった作用素のスペクトルの性質を確定させたい。

３．研究の方法
前項に述べた研究目的のうち、特に（１）、（２）、（７）を達成するために次のような方針を立てた。
（１）考察の対象とする一般化 Sturm-Liouville 作用素を L とし、E を勝手な複素数とするとき、スペクトル理論にとって基本的な固有値方程式 Lu=Eu は形式的な部分積分により積分方程式に変換される。ここから出発して H.Weyl 以来の伝統を持つ古典的理論を一般化 Sturm-Liouville 作用素に対してたどり直す。
（２）作用素のクラスにおいて自然に考えられるトポロジーは、２階の項に含まれる測度のいわゆる漠収束と、ゼロ階の項の元になっている関数 Q(x) の Skorohod 収束を組み合わせたものであるが、Skorohod 収束の概念は独立変数 x の非線形変換を含むため漠収束とは相性が悪い。これをいかに調和させるかを明らかにする。
（７）スペクトルの正の部分を調べるために、小谷と右代谷(1988)と同様の手法で方程式 Lu=Eu の解の漸近挙動を調べる。
研究目的（３）、（４）、（５）、（６）を達成するための具体的な方法は定まっていなかったが、先行研究を精査することにより進める方針であった。

４．研究成果
本研究の主な成果は、２乗可積分な減衰因子を持つホワイトノイズをポテンシャル項とするシュレーディンガー作用素のスペクトルを決定したことである。スペクトルの正の部分は「研究の目的」（７）で言及した小谷・右代谷の結果に対応して純粋絶対連続であることがわかった。証明は、小谷・右代谷にならって固有値方程式の解の漸近挙動を調べた後に、Gilbert-Pearson(1987)の定理をランダム化した判定条件に持ち込むことによる。一方、スペクトルの負の部分を解析するには、ポテンシャル項が超関数であるため、それを自由ラプラシアンの摂動とみなすことができず、関数解析の一般論が適用されない。そこで固有値方程式の解が有限個のゼロ点のみ持つことを証明した上で、Hartman（1948）の結果を適用することにより、スペクトルの負の部分の離散性と有界性を示した。この成果をまとめた論文はアメリカ物理学会の雑誌 Journal of Mathematical Physics に投稿中である。この成果の意義は、物理系の空間的な「乱れ」の自然な数学的理想化であるホワイトノイズをモデルに取り入れたこと、一方そうすることによって関数解析の一般論が当てはまらなくなるため、固有値方程式の解の挙動を確率論的に調べることによってスペクトルの性質を調べたことにある。減衰因子が２乗可積分でない場合、スペクトルの正の部分に関しては小谷・右代谷の結果をある程度再現できたが、負の部分については結果を得ることができなかった。
今後は、同じモデルに対してスペクトル統計の問題を考えていきたい。また「研究の目的」の項に述べたテーマの対象をポテンシャル項が行列値の超関数であるような一般化 Sturm-Liouville 作用素や一般的な係数をもつ Dirac 作用素に拡げていくことは有意義だと考えている。
本研究の実施は期間中に発生した新型コロナウィルス感染症流行により大きな影響を受けた。特に、研究上の関心が本研究課題の直接のテーマから一時的に外れて、感染症の数理モデルの研究に移った時期があった。その活動として、スペクトル統計などに用いる道具である点過程によって感染症の実効再生産数の数学的基礎付けを次のように試みた。まず、典型的な１個体と集団の他の成員とのランダムな接触過程がポアソン点過程により記述されると仮定した。また、接触の結果感染が成立した後の行動変容と他者への感染性の変化を表す２つのランダム関数 κ と p を導入した。κ により感染個体の他者との接触過程が定まり、さらに p によって接触による他者への感染成立の確率が定まる。以上を組み合わせた確率モデルは正の時間軸上の非定常な点過程を定めるが、その全質量はこの感染者が産み出す２次感染者の総数を表し、その期待値が実効再生産数と解釈される。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　0件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 南　就将・横須賀俊哉	４．巻 68
２．論文標題 ワクチン接種と免疫の減退を考慮した感染症流行の数理モデル	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Hiyoshi Review of Natural Science, Keio University	６．最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　2件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 南　就将
２．発表標題 感染性接触の点過程によるモデル化
３．学会等名 数理人口学・数理生物学セミナー（東京大学）（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 南　就将
２．発表標題 On the negative part of the spectrum of one-dimensional Schroedinger operators with decaying white noise potential
３．学会等名 Spectra of Random Operators and Related Topics（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

南　就将　個人ページ
http://user.keio.ac.jp/~minami/

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Spectra of Random Operators and Related Topics	2020年～2020年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関