Title	岩澤理論の新しい展開
Sub Title	New development of Iwasawa theory
Author	栗原, 将人(Kurihara, Masato) 塩川, 宇賢(Shiokawa, Iekata) 池田, 保(Ikeda, Tamotsu) 藤井, 俊(Fujii, Satoshi)
Publisher	
Publication year	2023
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2022.)
JaLC DOI	
Abstract	楕円曲線に伴うBeilinson-Kato元に対して、Darmon流の微分を用いて、その新しい性質を定式化した。この予想を一般化Perrin-Riou予想と名付け、詳しく研究した。特に、この予想からMazur Tateによる有名なBirch Swinnerton- Dyer予想の精密化予想が、ある種の条件の下に、導かれることを証明した。以上は、David Burnsと佐野昂迪との共同研究である。また、素数 p を固定して、総実代数体の円分Zp拡大上の古典的岩澤加群のFittingイデアルを計算することに成功した。これはCornelius Greitherと片岡武典との共同研究である。 We discovered a new property on Beilinson-Kato elements for elliptic curves, using Darmon-type derivatives. We call this property Generalized Perrin-Riou Conjecture, and studied it in detail. In particular, we showed that it implies the famous Mazur Tate conjecture, a refinement of the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, under certain conditions. This is joint work with David Burns and Takamichi Sano. We also compute the Fitting ideal of the classical Iwasawa module over the cyclotomic Zp- extension of a totally real field. This is joint work with Cornelius Greither and Takenori Kataoka.
Notes	研究種目 : 基盤研究 (B) (一般) 研究期間 : 2019～2022 課題番号 : 19H01783 研究分野 : 整数論
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_19H01783seika

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｈ０１７８３

研究課題名（和文）岩澤理論の新しい展開

研究課題名（英文）New Development of Iwasawa theory

研究代表者
栗原　将人（Kurihara, Masato）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・教授

研究者番号：４０２１１２２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　11,400,000円

研究成果の概要（和文）：楕円曲線に伴うBeilinson-Kato元に対して、Darmon流の微分を用いて、その新しい性質を定式化した。この予想を一般化Perrin-Riou予想と名付け、詳しく研究した。特に、この予想からMazur Tateによる有名なBirch Swinnerton-Dyer予想の精密化予想が、ある種の条件の下に、導かれることを証明した。以上は、David Burnsと佐野昂迪との共同研究である。また、素数 p を固定して、総実代数体の円分Zp拡大上の古典的岩澤加群のFittingイデアルを計算することに成功した。これはCornelius Greitherと片岡武典との共同研究である。

研究成果の学術的意義や社会的意義
有理数体上の楕円曲線の数論は、さまざまな理論への一般化が可能であり、またさまざまな分野への応用も可能である。そこで、この分野で新しい性質を見出すことは、きわめて大きな価値がある。また、岩澤理論をFittingイデアルを用いて定式化し直すことは、その精密化を得ることにもなり、大変価値のあることである。古典的岩澤加群を扱うことは、扱いやすいコホモロジー群を扱うよりも難しく、このような加群に対して理論を構築することの学術的意義は高い。

研究成果の概要（英文）： We discovered a new property on Beilinson-Kato elements for elliptic curves, using Darmon-type derivatives. We call this property Generalized Perrin-Riou Conjecture, and studied it in detail. In particular, we showed that it implies the famous Mazur Tate conjecture, a refinement of the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, under certain conditions. This is joint work with David Burns and Takamichi Sano.
We also compute the Fitting ideal of the classical Iwasawa module over the cyclotomic Zp-extension of a totally real field. This is joint work with Cornelius Greither and Takenori Kataoka.

研究分野：整数論

キーワード：Iwasawa theory　zeta elements　Iwasawa module　Fitting ideal

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景
背景にあるのは、最近の岩澤理論のめざましい発展である。岩澤理論の中心をなすのは、代数的対象と解析的対象を結ぶ岩澤主予想である。研究代表者は、この岩澤主予想の一般化という多くの研究者が行っている方角ではなく、岩澤主予想の精密化を長年探求している。近年、岩澤理論や Euler 系などのコホモロジーの元の系列の理論は大きく発展しているが、その新しい発展のアイディアを、岩澤理論の精密化理論にも適用し、この理論をさらに発展させたいと考えている。

２．研究の目的
本研究の目的は、研究代表者がこれまで研究してきた岩澤理論の精密化理論をさらに発展させることである。具体的には、従来の岩澤理論では、岩澤加群(ある種の Galois 群や p 進表現の Selmer 群)と対応する p 進 L 関数との間の関係を、岩澤主予想によって記述するが、本研究ではその関係をより一層詳しい関係に精密化する。そして今までの研究で現れた、ゼータ関数の値と関係する数論的なコホモロジーの元たちの間の関係を表す理論を、Euler 系の新しい理論などを用いることで、構築することである。

３．研究の方法
最近の整数論研究で使われるようになった新しい道具を用いて研究を行う。具体的には、Mazrur-Rubin-Sano 予想で使われた議論、片岡によるシフトの理論、新しい Tate 完全系列の理論などである。また、国際共同研究として、イギリスの King’s College London の David Burns 教授、大阪公立大学の佐野昂迪教授との共同研究を継続して行った。また、ドイツのミュンヘン防衛大の Cornelius Greither 教授、東京理科大の片岡武典教授と共同研究を行った。また、韓国高等研究所の Chan-Ho Kim 研究員との研究も続けた。

４．研究成果
(1) Beilinson-Kato 元の新しい性質の定式化とその応用
Galois コホモロジーの元である、Beilinson-Kato 元は、保型形式の数論幾何で大変重要な役割りを果たす。その最も有名な性質は、元の系列が Euler 系をなすことと、その L 関数の値との関係である。私達はこの研究において、楕円曲線の場合を考え、Darmon 型の微分を用いることにより、Beilinson-Kato 元の今まで知られていなかった新しい性質を定式化し、予想として提出した。L 関数の位数が 1 のときは、この予想は Perrin-Riou 予想と一致するので、この予想を私達は一般化 Perrin-Riou 予想と名付けた。特に、円分 Zp 拡大に対するこの予想が、Beilinson-Kato 元を理解する上で重要である。この予想は、有名な Birch Swinnerton-Dyer 予想とも関係があり、L 関数の s=1 での Taylor 展開の先頭項の情報が、どのように Beilinson-Kato 元の中に組み込まれているかをはっきりさせている。
われわれの一般化 Perrin-Riou 予想は、Mazur と Tate による Birch Swinnerton-Dyer 予想の精密化という有名な予想とも関係があり、われわれは、ある種の緩い条件の下で、円分 Zp 拡大に対する一般化 Perrin-Riou 予想が、一般の Abel 体に対する Mazur Tate 予想を導くことを証明した。特に、L 関数の位数が 1 のときは、Perrin-Riou 予想が証明されている場合があるので、この場合は、Mazur Tate 予想を証明することができる。今まで、弱い Mazur Tate 予想については、多くの結果が知られているが、regulator 部分に対するこの強い Mazur Tate 予想については理論的な結果は何も知られておらず、われわれの結果は、強い Mazur Tate 予想の最初の非自明な結果を与える。以上は、David Burns および佐野昂迪との共同研究である。

(2) p 分岐岩澤加群の Fitting イデアルについて
p を素数とするとき、総実代数体の円分 Zp 拡大上の、p の外不分岐な最大 pro-p 拡大の Galois 群を p 分岐岩澤加群と言う。これは、古典的に大変良く調べられている対象である。ただ、etale cohomology 群としてはとらえにくいので、その同変的解析はしづらい。この重要な岩澤加群を、片岡武典によるシフトの理論および適切な複体の理論を用いることにより、その Fitting イデアルを原理的に計算できる形で計算した。Galois 群が特別な場合は、研究代表者による以前の結果と一致することを確かめた。この Fitting イデアルの形から、加群のどのような性質がわかるかを研究することが、次の研究の目標となる。以上は、Cornelius Greither および片岡武典との共同研究である。

(3) モジュラー記号からできる計算可能な量と Selmer 群の構造について
有理数体上の楕円曲線について考える。楕円曲線と対応する Mazur Tate によるモジュラー元は、保型形式の複素平面上の積分であるモジュラー記号を用いて定義される。モジュラー元の係数に現れる数を、われわれはこれまでの研究で詳しく調べ、p-Selmer 群の構造を記述できることを、楕円曲線が p で通常還元を持つ場合に証明していた(2014 年)。今回の新しい研究において、楕円曲線が超特異還元を持つ場合にも同じ結果が成り立つことを証明した。すなわち、単射定理

(δnがpで割り切れなければ、p Selmer群からnを割るすべての素数 q についてのq有限体有理点への写像は単射)が成立すること、および p-Selmer 群の次元がこれらの量で記述できるという予想が作れることを確かめた。また、多くの数値例を計算し、pが玉河数を割らないとき、および anomalous でないときには、同じことが成り立つことも予想できた。以上の理論は、Selmer群の大きさおよび構造を決定する数値計算の方法が存在することを意味する。これは、有名なBirch Swinnerton-Dyer予想が述べるSelmer群とL関数との関係とは異なる両者の関係があることを意味し、大変興味深い結論を導くものになると考えている。なお、この方面の研究については、その後、筑波大学の坂本龍太郎と韓国高等研究所のChan-Ho Kimが、上記の予想について新しい結果を得ている。

(4) Pan Asian Number Theory Conference について
京都大学の池田保教授と共に、京都大学数理解析研究所において、2020 年 7 月に Pan Asian Number Theory Conferenceを行う予定であった。これは、世界的に活躍しているアジアに起源を持つ研究者を集めて行う研究集会で、今回が10回目のPANTであった。しかしながら、コロナ禍によって延期され、最終的に2021年12月6日から10日までオンライン形式で開催した。世界から第一線の研究者が集い、きわめて有意義な研究集会となった。

参考文献
[1] David Burns, Masato Kurihara, and Takamichi Sano, On derivatives of Kato’s Euler system for elliptic curves, arXiv:1910.07404.
[2] David Burns, Masato Kurihara, and Takamichi Sano, On derivatives of Kato's Euler system and the Mazur-Tate Conjecture, arXiv 2103, 11535.
[3] Masato Kurihara, Some analytic quantities yielding arithmetic information about elliptic curves, to appear in the Proceedings of TATA Institute.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　4件／うちオープンアクセス　2件）

１．著者名 Kim Chan-Ho, Kurihara Masato	４．巻 14
２．論文標題 On the Refined Conjectures on Fitting Ideals of Selmer Groups of Elliptic Curves with Supersingular Reduction	５．発行年 2021年
３．雑誌名 International Mathematics Research Notices	６．最初と最後の頁 10559-10599
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnz129	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 T. Ikeda and S. Yamana	４．巻 53
２．論文標題 On the lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Siegel cusp forms	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4)	６．最初と最後の頁 1121-1181
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 David Burns, Masato Kurihara and Takamichi Sano	４．巻 86
２．論文標題 On Stark elements of arbitrary weight and their p-adic families	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Proceedings of Iwasawa 2017, Advanced Studies in Pure Mathematics	６．最初と最後の頁 113-140
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Cornelius Greither, Masato Kurihara and Hibiki Tokio	４．巻 86
２．論文標題 The second syzygy of the trivial G-module, and an equivariant main conjecture	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Proceedings of Iwasawa 2017, Advanced Studies in Pure Mathematics	６．最初と最後の頁 317-349
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Masato Kurihara	4．巻 33
2．論文標題 Notes on the dual of the ideal class groups of CM-fields	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux	6．最初と最後の頁 971-996
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/jtnb.1184	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Cornelius Greither, Takenori Kataoka, Masato Kurihara	4．巻 28
2．論文標題 Fitting ideals of p-ramified Iwasawa modules over totally real fields	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Selecta Mathematica	6．最初と最後の頁 1-48
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00029-021-00731-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　7件／うち国際学会　3件）

1．発表者名 Masato Kurihara
2．発表標題 Several regulators and a new conjecture on Kato's zeta elements for elliptic curves
3．学会等名 Regulators in Niseko 2019（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Masato Kurihara
2．発表標題 Derivatives of Kato's Euler system for elliptic curves
3．学会等名 International Colloquium on Arithmetic Geometry(Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai)（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2020年

１．発表者名 藤井俊
２．発表標題 円分体のイデアル類群のマイナスパートの挙動について
３．学会等名 愛知数論セミナー（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 藤井俊
２．発表標題 円分体のイデアル類群のマイナスパートの挙動について
３．学会等名 北陸数論セミナー（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Masato Kurihara
２．発表標題 Survey on the Brumer-Stark conjecture and the proof by Dasgupta and Kakde
３．学会等名 代数的整数論とその周辺
４．発表年 2020年

１．発表者名 Masato Kurihara
２．発表標題 Some analytic quantities in the arithmetic of elliptic curves
３．学会等名 The 9th East Asia Number Theory Conference（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2021年

1．発表者名 栗原将人
2．発表標題 Dasgupta Kakde の最近の仕事とその周辺 Overview
3．学会等名 Dasgupta Kakde の最近の仕事とその周辺（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 栗原将人
2．発表標題 いくつかの Selmer module の導入とその性質
3．学会等名 Dasgupta Kakde の最近の仕事とその周辺（招待講演）
4．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	塩川　宇賢 (Shiokawa Iekata) (00015835)	慶應義塾大学・理工学部（矢上）・名誉教授 (32612)	
研究分担者	池田　保 (Ikeda Tamotsu) (20211716)	京都大学・理学研究科・教授 (14301)	
研究分担者	藤井　俊 (Fujii Satoshi) (20386618)	島根大学・学術研究院教育学系・准教授 (15201)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Pan Asian Number Theory Conference	2021年～2021年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	King's College London			
ドイツ	Universitaet der Bundeswehr Muenchen			
韓国	Korea Institute for Advanced Study			