慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	相分離の確率平衡系モデルの確率解析
Sub Title	Stochastic analysis on the phase separating random interface
Author	坂川, 博宣(Sakagawa, Hironobu)
Publisher	
Publication year	2010
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2009.)
JaLC DOI	
Abstract	例えば0度における水と氷のように二つ以上の異なる相が共存している状況では, その異なる相を分離する境界面, いわゆる界面が観測される. 本研究ではそのような界面を表す微視的なレベルでの平衡状態におけるモデルとして∇φ界面モデルと呼ばれる確率モデルを取り上げ, 主として壁と相互作用する界面の漸近挙動に関して調べた. 特に, 以前に発見的な議論で得られていた結果の数学的に厳密な証明およびそれらの精密化を行った.
Notes	研究種目 : 若手研究(B) 研究期間 : 2007 ~ 2009 課題番号 : 19740054 研究分野 : 確率論 科研費の分科・細目 : 数学・数学一般 (含確率論・統計数学)
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_19740054seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2007～2009
課題番号：１９７４００５４
研究課題名（和文）　相分離の確率平衡系モデルの確率解析

研究課題名（英文）　Stochastic analysis on the phase separating random interface

研究代表者
坂川　博宣（SAKAGAWA　HIRONOBU）
慶應義塾大学・理工学部・講師
研究者番号：60348810

研究成果の概要（和文）：
例えば 0 度における水と氷のように二つ以上の異なる相が共存している状況では，その異なる相を分離する境界面，いわゆる界面が観測される．本研究ではそのような界面を表す微視的なレベルでの平衡状態におけるモデルとして$\nabla\phi$界面モデルと呼ばれる確率モデルを取り上げ，主として壁と相互作用する界面の漸近挙動に関して調べた．特に，以前に発見的な議論で得られていた結果の数学的に厳密な証明およびそれらの精密化を行った．

研究成果の概要（英文）：
Under the situation that two distinct pure phases coexist in space like water/ice at zero temperature, hypersurfaces called interfaces are formed and separate these distinct phases at the microscopic level. In this research, we considered the $\nabla\phi$ interface model as an equilibrium model of such interface and studied mainly asymptotic behaviors of the interface interacting with the wall. Especially, we obtained mathematically rigorous and precise results which were previously obtained by several heuristic arguments.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	700,000	0	700,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	1,900,000	360,000	2,260,000

研究分野：　確率論
科研費の分科・細目：　数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：相転移，相分離界面，Gibbs 測度，エントロピー的反発，相関長

１．研究開始当初の背景

統計力学における重要な問題の一つとして，例えば 0 度における水と氷といったように同

一の温度で物質が二つ以上の異なる状態を取り得るという，いわゆる相転移の問題が挙げられる．そこでいま，二つ以上の異なる相が共存している状況を考えることにするとその異なる相を分離する境界面，いわゆる界面が観測される．このような相分離界面の微視的レベルでの確率モデルのひとつとして∇φ界面モデルがある．これはｄ次元格子上の Gibbs 確率場で，界面の高さを表す変数φに対し相互作用が∇φ(∇φは離散 gradient)から定まるものとして与えられる．このモデルは例えば Ising モデルと比べても更に単純化されたものではあるが，一方で系のエネルギーの高さに対する平行移動不変性など期待される物理的特徴を十分に備えており，また相互作用ポテンシャルが２次関数の場合はｄ次元格子上の零質量Gauss場として与えられることから，関連した解析的手法の発達に付随して近年その研究が統計物理に興味を持つ国内外の確率論研究者の間で盛んに行われている状況であった．

２．研究の目的

∇φ界面モデルの大きな特徴として場の相関関数の減衰が多項式オーダーであり長距離相関を持つことが挙げられるが，これによって場が独立，もしくは相関関数が指数的減衰を示すような場合とは異なる様々な現象が現れる．特に目標とするのは大数の法則，中心極限定理，大偏差原理といった確率論の極限定理などを通して相分離界面に関する様々な物理現象の本質を数学的に理解することと同時に同時に長距離相関を持つ確率場の解析に対する新たな数学手法と数学理論の開発を行うことである．その中でも本研究ではエントロピー的反発と呼ばれる現象に関連して，壁と相互作用する界面の漸近挙動について考えた．

エントロピー的反発とは高さ 0 のレベルに壁を置き，界面を正に条件付けたとき壁の影響で界面の挙動がどのように変わるかを調べるものであり，∇φ界面モデルに関しては Bolthausen, Deuschel, Giacomin, Zeitouni らによって様々な研究がなされていた．研究代表者はこの問題に関連して以前に，同時に複数の相が共存しその相分離界面が層をなして重なり互いに交わらないという状況や，３次元以上において上下に壁が置かれた状況でのエントロピー的反発についての研究を行い，いくつかの結果を得ていたがそれをより深く推し進めることで上記の目標を達することを目指した．

３．研究の方法

∇φ界面モデルは相互作用エネルギーが∇φから定まるので，格子上の Markov 場となり，大きく分けて確率場の研究のひとつとみなせる．特に相互作用ポテンシャルが２次関数の場合はｄ次元格子上の零質量Gauss場として与えられることからこの場合は 1970 年代から場の理論でも研究されており，そこでは自己ポテンシャルを加えた場合におけるランダムウォーク表現や鏡像原理，各種の相関不等式といった手法が開発されている．これに加えて最近の∇φ界面モデルの解析で種々の確率論的手法が編み出されており，これらの数学および厳密統計力学の両面からの道具を通して解析を行うことが主な研究方法となる．

なお本研究で取り扱った数学モデルは実際の現象を大きく単純化したものではあるが，それ故に数学的に厳密に扱うことが可能であり，相分離界面などに現れる様々な現象に対し数学的に厳密な論証に基づいて確固たる裏づけを与えることは極めて重要なことであると考えられる．

４．研究成果

∇φ界面モデルにおいて壁の条件を加えた下での界面の挙動の問題等に関連して以下の結果を得た．

（１）∇φ界面モデルでは系の平衡状態を表す Gibbs 測度は相互作用ポテンシャルが２次関数の場合はｄ次元格子上の零質量 Gauss 場として与えられ，長距離相関を持つことがしられている．以前に行った研究によって系が Gauss 的で高次元（３次元以上）の場合においては界面が上下に置かれた壁の間にとどまるという事象の実現確率の精密な評価を得ていたが，この研究を更に進め，２次元以上の場合において，上下に制限を加えた場合は場の相関関数が指数的減衰をすることを示し，更に壁の高さを無限大とする極限をとった場合についての場の相関長（correlation length）および分散の正確な漸近挙動を得た．これらは数理物理学者の Bricmont らによって得られていた発見的な議論による粗い評価に数学的に厳密な証明を与え，かつその精密化になっている．特にｄ次元の∇φ界面モデルはｄ＋１次元空間における相分離界面を表すので２次元の場合が最も物理的に興味があるものであり，また高次元の場合と比べ２次元では場の揺動が大きくなるという特徴があり各種の量の漸近挙動が大きく変わり高次元の場合に比べより精密な議論が必要となる．

証明は 1970～80 年台に場の理論の研究で開発された，場の相関関数に対する Brydges-Frohlich-Spencer のランダムウォーク表現や各種の相関不等式に最近の$\nabla\phi$界面モデルの解析で開発された種々の確率論的手法を組み合わせることで行う．その中でも特にランダムウォーク表現を用いることでピン止めランダムウォークの訪問点や多重点の個数などに対する詳細な評価が鍵となった．

(2) エントロピー的反発において界面が壁上に存在すると条件付けることは，負のときに無限大の値をとり正のときには０となるような自己ポテンシャルを加えた場合のGibbs測度を考えることに対応する．そこで界面を正の方向へ押しやるようなより一般の自己ポテンシャルを加えた場合の界面の挙動について調べた．結論として，場の持つ長距離相関を反映して，任意の非増加関数を自己ポテンシャルとして加えた場合に少なくとも正に条件付けた時と同じだけ界面が持ち上がることを証明した．これはLebowitzらによって以前に得られていた評価の精密化を与え，例えば負のときに無限大ではなく正の値をとり正のときには０となる自己ポテンシャルを加えた場合においても界面は常に非局在となることを意味している．また界面が壁上に存在すると条件付けたときと同じだけ持ち上がるための自己ポテンシャルの十分条件を与えた．更なる問題としては自己ポテンシャルに単調性が無く，壁による反射と壁への吸着の両方の効果を表すような場合に対応する自己ポテンシャルを加えた場合の界面の挙動が考えられる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３　件）

① Hironobu Sakagawa,
Confinement of the two dimensional discrete Gaussian free field between two hard walls,
Electronic Journal of Probability 14 (2009), 2310-2327, 査読有

② Hironobu Sakagawa,
Entropic repulsion of the massless field with a class of self-potentials,
Journal of Statistical Physics 135 (2009), 467-481, 査読有

③ Hironobu Sakagawa,
Bounds on the mass for the high dimensional Gaussian lattice field between two hard walls,
Journal of Statistical Physics 129 (2007), 537-553, 査読有

〔学会発表〕（計　６　件）

① 坂川　博宣,
Confinement of the two dimensional discrete Gaussian free field between two hard walls,
大規模相互作用系の確率解析，2009 年 10 月 9 日，東京大学

② 坂川　博宣,
Behavior of the massless Gaussian field interacting with the wall
慶応確率論セミナー，2009 年 4 月 30 日，慶應義塾大学

③ 坂川　博宣,
Behavior of the massless Gaussian field interacting with the wall,
Random processes and systems，2009年2月18日，京都大学

④ 坂川　博宣,
Entropic repulsion of the massless field with a class of self-potentials,
大規模相互作用系の確率解析，2008 年 11 月 5 日，東京大学

⑤ 坂川　博宣,
Confinement of a Gaussian lattice field beteween two hard walls,
Stochastic analysis on large scale interacting systems，2007 年 10 月 25 日，九州大学

⑥ 坂川　博宣,
Bounds on the mass for a Gaussian lattice field between two hard walls,
東京確率論セミナー，2007 年 6 月 4 日，東京工業大学

６．研究組織

(1)研究代表者
坂川　博宣（SAKAGAWA　HIRONOBU）
慶應義塾大学・理工学部・講師
研究者番号：60348810

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
該当なし