

Title	最適化理論と不動点理論を介した非線形関数解析学と凸解析学の究明、及びその応用
Sub Title	The study of nonlinear functional analysis and convex analysis and its applications based on optimization theory and fixed point theory
Author	高橋, 渉(Takahashi, Wataru) 谷口, 雅治(Taniguchi, Masaharu) 木村, 泰紀(Kimura, Yasunori) 小宮, 英敏(Komiya, Hidetoshi) 木戸, 一夫(Kido, Kazuo)
Publisher	
Publication year	2011
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2010. )
JaLC DOI	
Abstract	本研究では、重要で新たな非線形問題を、非線形関数解析学と凸解析学を基礎にした非線形問題として捉え、非線形最適化理論と不動点理論を介在にした非線形関数解析学と凸解析学の立場から研究し、1980年にRayによって証明されたヒルベルト空間の閉凸集合が有界であるための必要十分条件は、その集合上で定義されたすべての非拡大写像が不動点を持つという定理を、バナッハ空間の場合まで拡張するなど、新しい非線形関数解析学と凸解析学を構築するとともに、他の分野の非線形問題にも応用し、多くの結果を得た。
Notes	研究種目：基盤研究(C)  研究期間：2007～2010  課題番号：19540167  研究分野：非線形関数解析学・凸解析学・最適化理論  科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
Genre	Research Paper
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_19540167seika">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_19540167seika</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

平成 23 年 6 月 2 日 現在

機関番号：3 2 6 1 2  
 研究種目：基盤研究 (C)  
 研究期間：2007～2010  
 課題番号：1 9 5 4 0 1 6 7  
 研究課題名 (和文) 最適化理論と不動点理論を介した非線形関数解析学と凸解析学の究明、及びその応用  
 研究課題名 (英文) The Study of Nonlinear Functional Analysis and Convex Analysis and its Applications Based on Optimization Theory and Fixed Point Theory  
 研究代表者  
 高橋 渉 (TAKAHASHI WATARU)  
 慶應義塾大学・経済学部・教授  
 研究者番号：4 0 0 1 6 1 4 2

研究成果の概要 (和文): 本研究では、重要で新たな非線形問題を、非線形関数解析学と凸解析学を基礎にした非線形問題として捉え、非線形最適化理論と不動点理論を介にした非線形関数解析学と凸解析学の立場から研究し、1980年にRayによって証明されたヒルベルト空間の閉凸集合が有界であるための必要十分条件は、その集合上で定義されたすべての非拡大写像が不動点を持つという定理を、バナッハ空間の場合まで拡張するなど、新しい非線形関数解析学と凸解析学を構築するとともに、他の分野の非線形問題にも応用し、多くの結果を得た。

研究成果の概要 (英文): In this study, we obtain many new and important theorems for nonlinear problems in nonlinear functional analysis and convex analysis by using optimization theory and fixed point theory. For example, we solved an open problem in geometry of Banach spaces which has been posed by Ray in 1980 by proving that every nonspreading mapping of a nonempty closed convex subset of a reflexive, strictly convex and smooth Banach space into itself has a fixed point if and only if the set is bounded.

## 交付決定額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：非線形関数解析学、凸解析学、最適化理論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析学、凸解析学、不動点理論、最適化理論、非線形作用素

## 1. 研究開始当初の背景

非線形数学とコンピュータの急速な進歩とともに、数学とコンピュータを用いてこれまで難しいとされていた非線形問題が解けるようになり、非線形問題とその周辺分野に興味を抱く研究者が国外、国内で多くなり、非

線形に関する学会が生まれたり、非線形問題に関連する研究集会が国外、国内の各地で開催されていた。本研究はそのような国内外の非線形問題の研究において、これまでも、不動点理論を基にして非線形関数解析学、凸解析学の基礎理論を構築し、それを非線形問題

に応用し多くの結果を得ていた。特に、2000年には、1976年から問題になっていたRockafellarのヒルベルト空間での近接点法の問題を、不動点収束法のアイデアを用いて解決するとともに、それをバナッハ空間に拡張することに成功し、最適化問題や均衡問題に関連して重要な近接点法をバナッハ空間で研究する突破口をつくった。それ以来、この非線形問題に関連する研究が盛んになり、意義のある多くの結果が得られるとともに、最適化問題や均衡問題に関連する重要な非線形問題がつぎつぎに生まれた。当研究はそのような背景において、世界をリードする立場にあった。

## 2. 研究の目的

本研究では、これまでの非線形問題の研究でわき起こった重要で新たな非線形問題を、非線形関数解析学と凸解析学を基礎にした非線形問題として捉え、その問題を非線形最適化理論と不動点理論を介在にした非線形関数解析学と凸解析学の立場からさらに研究し、新しい非線形関数解析学と凸解析学を構築するとともに、理論経済学やオペレーションズリサーチなどで重要な非線形最適化問題や均衡問題、像再生や実行可能性問題を数学的方法で直接解明することを目的とした。また、関連する他の分野の非線形問題にも応用が出来るようにいろいろな角度からその問題を研究し、数学の有用性と意義を他の分野の研究者に知ってもらうことを目的としている。

## 3. 研究の方法

研究目的を達成するための研究計画・方法は大きくわけて4つの段階からなる。

(1) これまでの非線形関数解析学と凸解析学及び非線形問題の研究で新たに問題になり、かつ重要と思われる非線形最適化の問題や、現在でも数学、応用数学において重要な非線形問題を的確に把握し、数学的、特に関数解析学と凸解析学の立場から再構成してみる。

(2) その問題は、非線形写像や集合値写像などこれまでの数学では解明できない問題となるので、当研究者によって開発された不動点理論と凸解析学、それと関数解析学を用いて研究するとともに、いくつかの新しい、有用な理論を構築する。

(3) (2) で得られた理論を非線形最適化や均衡問題、像再生や実行可能性問題の新しい非線形問題に応用し、非線形問題の解明にあたる。

(4) 近似定理の評価や改良の考察にあたってはコンピュータを用いて実践する。

## 4. 研究成果

(1) ヒルベルト空間では  $m$ -増大作用素と極大単調作用素は同じものであるが、バナッハ空間ではその2つは異なるものとなる。 $m$ -増大作用素のリゾルベントからはよく知られている非拡大写像が得られ、 $m$ -増大作用素の零点を求めるのに、非拡大写像の不動点を求める方法がこれまでは使われていた。しかしながら、極大単調作用素からは、これまで扱ったの難しいリゾルベント(距離リゾルベント)しか知られていなかった。この研究では距離リゾルベントの他に2つの扱いやすいリゾルベント(相対リゾルベント、擬非拡大リゾルベント)があることが発見され、それらの不動点定理が得られた。それらの不動点定理を用いて、極大単調作用素の零点の研究がなされ、これまでは未解決だった極大単調作用素の零点を見つける強収束定理が得られた。

(2) (1) で発見されは2つのリゾルベントからは、もっと一般的な新しい非線形作用素(ノンスプレッディング作用素、スキューノンスプレッディング作用素)が発見され、それらの不動点定理とその不動点定理を求める弱収束定理を得られた。これらの研究によって、極大単調作用素の零点を見つける新しい方法が確立された。

(3) ヒルベルト空間やバナッハ空間では、非拡大写像などの非線形作用素の不動点を求める弱収束定理は出やすいが強収束定理を出すことは難しい。この研究では、ハイブリッド法で、シュリンキング射影法といわれる新しいハイブリッド法を発見し、ヒルベルト空間やバナッハ空間での不動点を求める強収束定理の証明に成功した。シュリンキング射影法は、種々の分野で利用され、新しい結果が続々と証明されている。

(4) 像再生や実行可能性問題に関する近似法の研究では、ブロック法のアイデアを利用し、有限個または可算個の非拡大写像などの共通不動点を求める近似法を研究し、ハイブリッド法によるいくつかの強収束定理を得た。さらに、ここで得られた実行可能性問題の解決法を非線形最適化問題に応用し、最適解を求める新しい近接点法を得た。

(5) 1980年に、Rayはヒルベルト空間の閉凸集合が有界であるための必要十分条件はその閉凸集合上で定義されたすべての非拡大写像が不動点を持つことであるということを実証した。その後、この定理がバナッハ空間に拡張できないかという問題が提起されたが、30年間未解決のままだった。この研究では、(2)でのノンスプレッディング作用素を用いてこの問題を解決した。その証明は関数解析学での一様有界定理と極大単調作用素の零点を見つける新しい最適化法を用いたものだった。

(6) 非線形均衡点問題と非線形作用素の研究では、理論経済学での均衡点問題を非線形関数解析学と凸解析学の立場から究明し、その均衡点を求める問題は、ヒルベルト空間やバナッハ空間では増大型の非線形作用素の零点を求める問題であることを発見した。特に、バナッハ空間ではそれぞれ異なる4つの増大型非線形作用素の零点問題となる。この4つのうち、この研究では、2つの非線形作用素の零点問題の解決に成功し、さらにその零点を求める近似法も提案した。

(7) 凸関数の劣微分の零点問題は、ヒルベルト空間やバナッハ空間では  $m$ -増大作用素や極大単調作用素の零点問題となる。さらにそれはリゾルベントを介在すると不動点の存在問題になる。 $m$ -増大作用素や極大単調作用素の4つのリゾルベントを研究するとともに、それらからつくられる非線形射影を研究し、新しいサニー擬非拡大射影と呼ばれる射影を見つけることに成功した。

(8) (7) で得られた新しいサニー擬非拡大射影は、線形非拡大写像の極限問題と大いに関係していることがこの研究でわかり、これまで複雑な形で研究されていた線形非拡大写像の極限問題がこの非線形射影を用いて簡明かつ新しい形で解かれた。特に、線形非拡大写像の平均収束極限は距離射影ではなく、この非線形射影であることが判明し、この問題と関係する周辺の研究にも新しい情報を与えた。

(9) 非線形発展方程式から発生する非線形非拡大半群の問題では、非拡大半群が平均収束するための必要十分条件は、非拡大半群からつくられる軌道が平均収束することであることが証明された。また、ベクトル値をとる非拡大半群が平均収束するための必要十分条件も得られた。

(10) 集合値写像の不動点定理では、境界条件が、最適化問題でよく使われている錐を使ったタンジェント条件で証明でき、これを用いて角谷の集合値不動点定理がもっと広い形で得られた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計74件)

- 1 W. Takahashi, Fixed point theorem for new nonlinear mappings in a Hilbert space, J. Nonlinear Convex Anal., 査読有, 11 (2010), 135-160.
- 2 S. Takahashi, W. Takahashi, M. Toyoda, Strong convergence theorems for maximal monotone operators with nonlinear mappings in Hilbert spaces,

- J. Optim. Theory Appl., 査読有, 147 (2010), 24-41.
- 3 W. Takahashi, J. -C. Yao, T. Honda, Strong convergence theorems and nonlinear analytic methods for linear contractive mappings in Banach spaces, J. Nonlinear Convex Anal., 査読有, 11 (2010), 547-566.
- 4 W. Takahashi, J. -C. Yao, F. Kohsaka, The fixed point property and unbounded sets in Banach spaces, Taiwanese J. Math., 査読有, 14 (2010), 733-742.
- 5 S. Matsushita, K. Nakajo, W. Takahashi, Strong convergence theorems by a generalized projection hybrid method for families of mappings in Banach spaces, Nonlinear Anal., 査読有, 73 (2010), 1466-1480.
- 6 W. Takahashi, Viscosity approximation methods for countable families of nonexpansive mappings in Banach spaces, Nonlinear Anal., 査読有, 70 (2009), 719-734.
- 7 K. Aoyama, F. Kohsaka, W. Takahashi, Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications, J. Fixed Point Theory Appl., 査読有, 5 (2009), 201-225.
- 8 W. Takahashi, K. Zembayashi, Strong and weak convergence theorems for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces, Nonlinear Anal., 査読有, 70 (2009), 45-57.
- 9 G. Inoue, W. Takahashi, K. Zembayashi, Strong convergence theorems by hybrid methods for maximal monotone operators and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Convex Anal., 査読有, 16 (2009), 791-806.
- 10 T. Ibaraki, W. Takahashi, Fixed point theorems for nonlinear mappings of nonexpansive type in Banach spaces, J. Nonlinear Convex Anal., 査読有, 10 (2009), 21-32.
- 11 Y. Kimura, W. Takahashi, A generalized proximal point algorithm and implicit iterative schemes for a sequence of operators on Banach spaces, Set-Valued Anal., 査読有, 16 (2008), 597-619.
- 12 F. Kohsaka, W. Takahashi, Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive type mappings in Banach spaces, SIAM J. Optim., 査読有, 19 (2008), 824-835.
- 13 W. Takahashi, Proximal point

- algorithms and four resolvents of nonlinear operators of monotone type in Banach spaces, *Taiwanese J. Math.*, 査読有, 12 (2008), 1883–1910.
- 14 S.Matsushita, W.Takahashi, Existence of zero points for pseudomonotone operators in Banach spaces, *J. Global Optim.*, 査読有, 42 (2008), 549–558.
  - 15 S.Takahashi, W.Takahashi, Strong convergence theorems for a generalized equilibrium problem and a nonexpansive mapping in a Hilbert space, *Nonlinear Anal.*, 査読有, 69 (2008), 1025–1033.
  - 16 W.Takahashi, Viscosity approximation methods for resolvents of accretive operators in Banach spaces, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 査読有, 1 (2007), 135–160.
  - 17 S.Takahashi, W.Takahashi, Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 査読有, 331 (2007), 506–515.
  - 18 A. T. Lau, K. Nishiura, W. Takahashi, Convergence of almost orbits of nonexpansive semigroups in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 査読有, 135 (2007), 3143–3150.
  - 19 T. Ibaraki, W. Takahashi, A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces, *J. Approx. Theory*, 査読有, 149 (2007), 1–14.
  - 20 A. Tada, W. Takahashi, Weak and strong convergence theorems for a nonexpansive mapping and an equilibrium problem, *J. Optim. Theory Appl.*, 査読有, 133 (2007), 359–370.
- [学会発表](計 23 件)
- 1 Wataru TAKAHASHI (高橋渉), Nonlinear Mappings in Nonlinear Analysis and an Open Problem in Fixed Point Theory, International Conference on Mathematical Analysis (ICMA2010), December 7, 2010, Bangkok, Thailand. (Plenary Talk)
  - 2 Wataru TAKAHASHI (高橋渉), Fixed Point and Nonlinear Ergodic Theorems for Generalized Hybrid Mappings, 2010 Workshop on Nonlinear Analysis and Optimization, November 25, 2010, Taipei, Taiwan. (Key Note Speaker)
  - 3 Wataru TAKAHASHI (高橋渉), Nonlinear Analytic Methods for Linear Contractive Mappings in Banach Spaces, The Second Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAO Asia2010), September 9, 2010, Phuket, Thailand. (Plenary Talk)
  - 4 Wataru TAKAHASHI (高橋渉), Fixed Point Theorems and Convergence Theorems for Nonlinear Operators in Banach Spaces, Abstract Harmonic Analysis 2009 (AHA2009), December 19, 2009, Kaohsiung, Taiwan. (Plenary Talk)
  - 5 Wataru TAKAHASHI (高橋渉), Equilibrium Problems, Nonlinear Operators and Fixed Point Theorems, The 9-th International Conference on Fixed Point Theory and Applications 2009 (ICFPTA2009), July 20, 2009, Changhua, Taiwan. (Plenary Talk)
  - 6 Wataru TAKAHASHI (高橋渉), Proximal Point algorithms and Four Nonlinear Operators in Banach Spaces, The 6-th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2009), March 30, 2009, Tokyo, Japan. (Plenary Talk)
  - 7 Wataru TAKAHASHI (高橋渉), Fixed Point Algorithms and Proximal Point Algorithms in Optimization, The first Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAO2008), September 17, 2008, Shimane, Japan. (Plenary Talk)
  - 8 Wataru TAKAHASHI (高橋渉), Four Resolvents of Nonlinear Operators of Monotone Type in Banach Spaces, The 5-th World Congress of Nonlinear Analysts (WCNA2008), July 3, 2008, Florida, USA. (One Hour Invited Speaker)
  - 9 Wataru TAKAHASHI (高橋渉), Proximal Point Algorithms and Nonlinear Mappings in Banach Spaces, Nonlinear Analysis and Optimization (CNA2008), June 23, 2008, Haifa, Israel. (Invited Speaker)
  - 10 Wataru TAKAHASHI (高橋渉), Strong and Weak Convergence Theorems for Equilibrium Problems and Nonexpansive Mappings in Banach Spaces, International Symposium on Nonlinear Analysis and Convex Analysis 2007 (ICNACA2007), November 24, 2007, Kaohsiung, Taiwan. (Key Note Speaker)
  - 11 Wataru TAKAHASHI (高橋渉),

Existence Theorems and Convergence Theorems for Nonlinear Operators, The 8 -th International Conference on Fixed Point Theory and Applications (ICFPTA2007), July 18, 2007, Chiangmai, Thailand. (Plenary Talk)

- 12 Wataru TAKAHASHI (高橋涉),  
Proximal Point Algorithms and Nonlinear Operators in Banach Spaces, The 5 -th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007), June 1, 2007, Hsinchu, Taiwan. (Plenary Talk)

[ 図書 ] ( 計 4 件 )

- 1 W. Takahashi, Yokohama Publishers, Introduction to Nonlinear and Convex Analysis, 2009, 240.
- 2 S. Akashi, W. Takahashi, T. Tanaka, Yokohama Publishers, Nonlinear Analysis and Optimization, 2009, 1 - 387.
- 3 W. Takahashi, T. Tanaka, Yokohama Publishers, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2008, 1 -220.
- 4 T. Murofushi, W. Takahashi, M. Tukada, Yokohama Publishers, Applied Functional Analysis, 2007, 1 -302.

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

高橋 涉 (TAKAHASHI WATARU)  
慶應義塾大学・経済学部・教授  
研究者番号 : 40016142

### (2)研究分担者

谷口 雅治 (TANIGUCHI MASA HARU)  
東京工業大学・情報理工学研究科・准教授  
研究者番号 : 30260623  
木村 泰紀 (KIMURA YASUNORI)  
東京工業大学・情報理工学研究科・助教  
研究者番号 : 20313447  
小宮 英敏 (KOMIYA HIDETOSHI)  
慶應義塾大学・商学部・教授  
研究者番号 : 90153676  
木戸 一夫 (KIDO KAZUO)  
慶應義塾大学・商学部・教授  
研究者番号 : 50286621