

Title	確率過程論を用いた非完備市場における価格付け理論の研究
Sub Title	Research on pricing theory in incomplete financial markets by using stochastic analysis
Author	新井, 拓児(Arai, Takuji)
Publisher	
Publication year	2010
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2009. )
JaLC DOI	
Abstract	<p>Good deal boundsの研究に現れるショートフォールリスク測度に関する研究の総仕上げを行った。ショートフォールリスク測度とは、条件付請求権の売り手がうまく戦略を組んでショートフォールリスクをある閾値以下にできる最低価格を表す凸リスク測度である。</p> <p>このショートフォールリスク測度により、条件付請求権の価格の候補を求めることができる。平成21年度の前半では、20年度までに得られた結果を、</p> <p>原資産価格過程が非局所有界である場合に拡張すると共に、</p> <p>admissible戦略が凸錘や凸に制約された場合についても論じることに成功した。さらに後半では、inf-convolutionに関する研究を行い、これをショートフォールリスク測度の表現の導出へ応用した。その結果、これまでに得られていたショートフォールリスク測度の表現は、Orlicz空間のうちOrlicz heartと呼ばれるものを対象としてきたが、これを完全に一般のOrlicz空間に拡張することに成功した。</p>
Notes	<p>研究種目：基盤研究(C)</p> <p>研究期間：2007～2009</p> <p>課題番号：19540144</p> <p>研究分野：数物系科学</p> <p>科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)</p>
Genre	Research Paper
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_19540144seika">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_19540144seika</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

平成 22 年 6 月 11 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540144

研究課題名（和文） 確率過程論を用いた非完備市場における価格付け理論の研究

研究課題名（英文） Research on pricing theory in incomplete financial markets by using stochastic analysis

研究代表者

新井 拓児（ARAI TAKUJI）

慶應義塾大学・経済学部・准教授

研究者番号：20349830

研究成果の概要（和文）: Good deal bounds の研究に現れるショートフォールリスク測度に関する研究の総仕上げを行った。ショートフォールリスク測度とは、条件付請求権の売り手がうまく戦略を組んでショートフォールリスクをある閾値以下にできる最低価格を表す凸リスク測度である。このショートフォールリスク測度により、条件付請求権の価格の候補を求めることができる。

平成 21 年度の前半では、20 年度までに得られた結果を、原資産価格過程が非局所有界である場合に拡張すると共に、admissible 戦略が凸錘や凸に制約された場合についても論じることに成功した。さらに後半では、inf-convolution に関する研究を行い、これをショートフォールリスク測度の表現の導出へ応用した。その結果、これまでに得られていたショートフォールリスク測度の表現は、Orlicz 空間のうち Orlicz heart と呼ばれるものを対象としてきたが、これを完全に一般の Orlicz 空間に拡張することに成功した。

研究成果の概要（英文）: I have completed my research on shortfall risk measures which appear in research on good deal bounds. Shortfall risk measures are convex risk measures representing the least price which enables a seller selling a claim to suppress her shortfall risk less than her limitation by selecting a suitable hedging strategy. Shortfall risk measures would decide candidates of prices of contingent claims.

In the first half of FY 2010, I extended results which I had obtained in FY 2009 to the case where the underlying asset price process is non-locally bounded, and succeeded in getting some results on models under cone and convex constraints. Moreover, in the second half, I studied inf-convolutions, and applied it to the shortfall risk measure problem. As a result, while I had obtained results only on Orlicz hearts which are parts of Orlicz spaces, I succeeded in extending to general Orlicz spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：確率論・関数解析学・応用数学・ファイナンス論

### 1. 研究開始当初の背景

条件付請求権の価格は、株価をマルチンゲールにする測度、同値マルチンゲール測度の下での期待値で与えられる。この値は、条件付請求権を完全に複製するヘッジ戦略の初期費用と一致する。このような複製戦略が存在する市場を完備市場と呼ぶ。しかし、市場の完備性は現実離れした非常に強い条件である。そこで、完備性を持たない非完備市場における条件付請求権の価格付け及びヘッジ手法の研究が重要になっている。非完備市場では、同値マルチンゲール測度が無限個存在し、複製戦略は存在しない。そこで、複製戦略に代わる何らかの意味で最適なヘッジ戦略を考える。つまりヘッジ戦略に関する何らかの最適化問題を考える。そして、その双対問題として同値マルチンゲール測度に関する最適化問題が現れる。それが価格付け問題に密接に関係しているのである。例えば、 $L^2$ の意味で最適なヘッジ戦略を選択する問題を考える。この時、解の存在を保証するために株価過程に関する確率積分全体の空間が  $L^2$  の意味で閉になっていなければならない。この最小化問題の解を mean variance hedging と呼ぶ。Mean variance hedging の初期費用を価格と見なすと、これは variance-optimal martingale measure と呼ばれる同値マルチンゲール測度の下での期待値に等しい。Variance-optimal martingale measure とは、ラドン・ニコディム密度関数の  $L^2$ -ノルムが最小になる同値マルチンゲール測度である。Mean-variance hedging の表現は、論文「On  $L^2$ -projections on a space of stochastic integrals」(T. Rheinlander, and M. Schweizer, Ann. Prob., Vol. 25, pp. 1810-pp. 1831, 1997)や私自身の研究「An extension of mean-variance hedging to the discontinuous case」(Fin. Stoch., Vol. 9, pp. 129-pp. 139, 2005)などにより大部分は解決している。平成 18 年度までの私の研究対象は、mean-variance hedging の拡張として、条件付請求権とヘッジ戦略の価値の差の  $p$  次平均 ( $p > 1$ ) が最小となるようなヘッジ手法、 $L^p$ -ヘッジングであった。数学的には、確率変数の確率積分空間上への  $L^p$ -射影を求める問題と同値である。 $p=2$  の場合が mean-variance hedging に相当する。私は、この  $L^p$ -ヘッジングの表現とそこから導か

れる条件付請求権の価格、つまり  $L^p$ -ヘッジングの初期費用の数学的特性に関する研究成果を既に得た。Mean-variance hedging の結果より、 $L^p$ -ヘッジングから導かれる価格は  $q$ -optimal martingale measure の下での期待値で与えられると予想される。但し、 $q > 1$  は  $p$  の共役指数で、 $q$ -optimal martingale measure とは、ラドン・ニコディム密度関数の  $L^q$ -ノルムが最小になるマルチンゲール測度のことである。しかし、この予想は成立しないことが分かった。そして、 $L^p$ -ヘッジングから導かれる価格が射影作用素を用いて特徴付けられることも示した。これらの成果を論文「 $L^p$ -projections of random variables and its application to finance」にまとめ出版した。

平成 19 年度当初は、 $L^p$ -ヘッジングをより一般の凸関数上の最適化問題に拡張することと、リスク管理的な観点を取り入れた最適ヘッジ戦略に関する研究を行いと考えていた。

### 2. 研究の目的

私の研究分野は確率論を用いた数理ファイナンスであり、特に、金融派生商品、より一般に条件付請求権の価格付け問題に端を発する確率過程論の問題に取り組んでいる。最終目標は、数学的概念とファイナンス的概念の結びつきを明らかにすることと、数理ファイナンスという視点から発生した問題を通して確率過程論の一般論に対する貢献を行うことである。今回の研究課題では、そのような最終目標を達成すべく、非完備市場におけるヘッジ戦略や価格と同値マルチンゲール測度の関係を包括的に理解することを目的とした。条件付請求権との距離が最小になるというファイナンス的意味を持つヘッジ戦略が、双対性から導かれる同値マルチンゲール測度という数学的概念とどう関わっているのかを明らかにすることを目指した。また、数学的視点から提唱された同値マルチンゲール測度のファイナンス的意味付けにも取り組む予定であった。これらの研究により、セミマルチンゲールに関する確率積分空間上の関数解析という新たな数学的枠組みを定式化することができればと考えた。

### 3. 研究の方法

数学的には、確率積分空間上の関数解析また

は凸解析という立場から問題を扱ってきた。最適ヘッジ問題の双対問題として、同値マルチンゲール測度上の最適化問題が表れることから、ヘッジ戦略と同値マルチンゲール測度の関係に注目して研究を行った。

#### 4. 研究成果

平成 19 年度の前半は、前年度後半からの継続である非対称関数に基づいた最小ヘッジ戦略問題を扱った。解の一意存在のための条件と特性について、関数解析の一般論を用いて研究した。研究成果を論文「Optimal hedging strategies on asymmetric functions」にまとめた。さらに後半は、no good deal という概念から導かれる請求権価格の上下限と凸リスク測度の関係について研究した。非完備市場における請求権の価格を無裁定条件から導こうとすると、価格は一意に定まらず、価格の候補となる範囲のみが与えられる。しかもこの価格の範囲は非常に広く実用性に乏しい。そこで、何らかの指標を基に、それがあつる閾値を下回るか上回る場合を、投資家にとって良い投資機会 (good deal) であると定義する。請求権の価格は、買い手売り手双方にとって good deal にならないような値を取るはずである。そのような価格の範囲を good deal bound と呼ぶ。これは、無裁定条件から導かれる価格の範囲よりも狭くなる。私は、期待ショートフォール (損失額の重み付け期待値) を基にした good deal bound の研究を行った。まず、投資家が上手く戦略を組んで期待ショートフォールをある閾値以下にできる場合を good deal と定義した。つまり請求権の価格は、買い手売り手共にどんなヘッジ戦略を組んでも期待ショートフォールをある値以下にできないような値である。このような値の上下限を、凸リスク測度を用いて表現した。成果を論文「Good deal bounds induced by shortfall risk」にまとめた。

さらに、3月に入ってから Orlicz space 上での最適ヘッジ戦略とそれに関連するマルチンゲール不等式の研究を行っている。この研究に関連した研究連絡を行うためにスイスを訪問した。

平成 20 年度は 2 つの研究を同時に行った。一つは、平成 19 年度に始めた共同研究である。共同研究者は、スイス連邦工科大学チューリッヒ校の Schweizer 教授とカナダ・アルバータ大学の Choulli 准教授である。この研究は、Orlicz 空間上での最適ヘッジ問題とそれに関連するマルチンゲール不等式に関するものである。最適ヘッジ問題に関しては、最適解が一意存在するための十分条件を得ることに成功した。しかし、マルチンゲール不等式に関する研究は平成 21 年度に持ち越すこととなった。

もう一つの研究テーマは、Orlicz 空間上の凸リスク測度に関する研究である。これも昨年度からの引き続きである。19 年度末に論文「Good deal bounds induced by shortfall risk」をまとめたが、20 年度はこの成果の拡張を行った。19 年度の論文では、条件付請求権の売り手がうまく戦略を組んでショートフォールリスクをある閾値以下にできる最低価格を、Orlicz heart 上の凸リスク測度で表現することに成功した。これに対し、投資家の選好を表す損失関数や投資家が選択できる戦略のクラスを拡張するためには、この最低価格を Orlicz 空間上の凸リスク測度で表現することが必要となる。そのための必要条件と表現定理の導出に成功し、論文を改訂することに成功した。この成果を得ることができたきっかけは、平成 20 年 7 月にロンドンで開催された国際学会に科研費を使用して参加したことによる。その学会において、私は 19 年度末に得られた成果を発表した。それに対して、凸リスク測度の研究で最近大きな成果を得ているイタリア人研究者であるミラノ大学の Frittelli 教授から色々とアドバイスを頂き、今回の拡張を行うことを提案してもらったのである。

平成 21 年度は、19 年度から始めた Good deal bounds の研究に現れるショートフォールリスク測度に関する研究の総仕上げを行った。ショートフォールリスク測度とは、条件付請求権の売り手がうまく戦略を組んでショートフォールリスクをある閾値以下にできる最低価格を表す凸リスク測度である。このショートフォールリスク測度により、条件付請求権の価格の候補を求めることができる。

21 年度の前半では、20 年度までに得られた結果を、原資産価格過程が非局所有界である場合に拡張すると共に、admissible 戦略が凸錘や凸に制約された場合についても論じること成功した。この結果を、19 年度末に書いた論文「Good deal bounds induced by shortfall risk」の改訂版に書き加え学術論文雑誌に投稿した。

さらに後半では、Orlicz 空間上の凸リスク測度の一般論の研究、特に inf-convolution に関する研究を行った。Inf-convolution は、最適リスク分配問題などに登場するリスク測度の分解方法であり、これまでは有界確率変数上のリスク測度に対する研究しか行われてこなかった。今回はそれを一般の Orlicz 空間上のリスク測度にまで拡張した。これをショートフォールリスク測度の表現の導出へ応用した。これまでに得られていたショートフォールリスク測度の表現は、Orlicz 空間のうち Orlicz heart と呼ばれるものを対象としてきたが、これを完全に一般の Orlicz 空間に拡張することに成功した。一般の

Orlicz 空間は順序連続性を持たないため, リスク測度の表現を得るためには順序下半連続性を論じる必要がある. そこで inf-convolution を用いてショートフォールリスク測度を2つのリスク測度に分解し, それぞれの下半連続性を調べた. この結果を論文「Convex risk measures on Orlicz spaces: inf-convolution and shortfall」にまとめ, 学術論文雑誌に投稿した.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

1. T. Arai and M. Kawaguchi,  $q$ -optimal martingale measures for discrete time models, Asia Pacific Financial Markets, Vol.15, pp.155-173, 2008. 査読有
2. T. Arai,  $L^p$ -projections of random variables and its application to finance, International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol.11, pp.869-888, 2008. 査読有
3. T. Arai, Optimal hedging strategies on asymmetric functions, Advances in Mathematical Economics, Vol.11, pp.1-10, 2008. 査読有

[学会発表](計13件)

1. 新井拓児, Convex risk measures on Orlicz spaces --convolution and shortfall--, Young researcher's workshop on finance, 2010年3月9日, 首都大学東京秋葉原オフィス
2. 新井拓児, Shortfall risk measure on Orlicz spaces, 科研費シンポジウム「確率論シンポジウム」, 2009年12月17日, 愛媛大学
3. 新井拓児, Shortfall risk measure for general semimartingales, Workshop on Risk Measures and Robust Optimization in Finance, 2009年11月20日, シンガポール国立大学
4. 新井拓児, Convex risk measures on Orlicz spaces --convolution and shortfall--, Workshop on Mathematical Economics, 2009年11月13日, 慶應義塾大学
5. 新井拓児, Shortfall risk measure for

general semimartingales, RIMS international conference Stochastic Analysis for and from Finance, 2009年8月3日, 京都リサーチパーク

6. T. Arai, Good deal bounds induced by shortfall risk, Daiwa Young Researchers' International Workshop on Finance 2009, 2009年3月11日, 京都大学.
7. 新井拓児, Orlicz 空間上の Convex Risk Measure と Shortfall Risk, 科研費シンポ「数理ファイナンスとその周辺」, 2009年1月22日, 九州大学西新プラザ.
8. 新井拓児, Good deal bounds induced by shortfall risk, 中之島 Workshop, 2008年12月6日, 大阪大学中之島センター.
9. 新井拓児, Good deal bounds induced by shortfall risk, 2008年度夏季 JAFEE 大会, 2008年8月2日, 成城大学.
10. T. Arai, Good deal bounds induced by shortfall risk, the Fifth World Congress of the Bachelier Finance Society, 2008年7月16日, Imperial College London.
11. T. Arai, Good deal bounds induced by shortfall risk, The 8th Ritsumeikan International Symposium on "Stochastic Processes and Application to Mathematical Finance" and The 8th Columbia-Jafee Conference on Mathematical Finance, 2008年3月19日, キャンパスプラザ京都.
12. 新井拓児, 非完備市場における価格付け理論 No Arbitrage と No Good Deal -, 慶應経済学会シンポジウム, 2007年11月26日, 慶應義塾大学.
13. T. Arai, Optimal hedging strategies on asymmetric functions, Workshop and Mid-Term Conference on Advanced Mathematical Methods for Finance, 2007年9月20日, ウィーン工科大学.

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕  
ホームページ等

6．研究組織

(1)研究代表者

新井 拓児 (ARAI TAKUJI)

慶應義塾大学・経済学部・准教授

研究者番号：20349830