

Title	非正則Eisenstein級数の挙動とq超幾何関数論
Sub Title	Behaviours of non-holomorphic Eisenstein series and the theory of q-hypergeometric functions
Author	桂田, 昌紀(Katsurada, Masanori) 野田, 工(Noda, Takumi)
Publisher	
Publication year	2010
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2009. )
JaLC DOI	
Abstract	本研究では, モジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ に付随する(正負の)偶数重み $k$ の非正則Eisenstein級数 $E_k(s; z)$ に対し, その $\text{Im } z \rightarrow +\infty$ における完全漸近展開の導出に成功した. この展開からは $E_k(s; z)$ の $z \rightarrow 0$ における完全漸近展開, Fourier級数展開や種々の特殊値の閉じた形の明示公式を始め, $E_k(s; z)$ が重み $k$ の非ユークリッドLaplacianの固有関数になることの直接的証明など, 数多くの有用な知見が得られる.
Notes	研究種目 : 基盤研究(C)  研究期間 : 2007 ~ 2009  課題番号 : 19540049  研究分野 : 解析的整数論  科研費の分科・細目 : 数学・代数学
Genre	Research Paper
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_19540049seika">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_19540049seika</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

平成 2 2 年 6 月 7 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540049

研究課題名（和文）非正則 Eisenstein 級数の挙動と  $q$  超幾何関数論研究課題名（英文）Behaviours of non-holomorphic Eisenstein series and the theory of  $q$ -hypergeometric functions

研究代表者

桂田 昌紀（KATSURADA MASANORI）

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号：90224485

研究成果の概要（和文）：本研究では、モジュラー群  $SL_2(\mathbb{Z})$  に付随する（正負の）偶数重み  $k$  の非正則 Eisenstein 級数  $E_k(s; z)$  に対し、その  $\lim_{z \rightarrow \infty}$  における完全漸近展開の導出に成功した。この展開からは  $E_k(s; z)$  の  $z \rightarrow 0$  における完全漸近展開、Fourier 級数展開や種々の特殊値の閉じた形の明示公式を始め、 $E_k(s; z)$  が重み  $k$  の非ユークリッド Laplacian の固有関数になることの直接的証明など、数多くの有用な知見が得られる。

研究成果の概要（英文）：Let  $E_k(s; z)$  be the non-holomorphic Eisenstein series with an even weight  $k$  attached to the modular group  $SL_2(\mathbb{Z})$ . One of the major achievements of the present project is to establish its complete asymptotic expansion as  $\lim_{z \rightarrow \infty}$ ; this yields various useful results on  $E_k(s; z)$ , which include its asymptotic expansion as  $z \rightarrow 0$  through the sector  $0 < \arg z < \pi$ , its Fourier series expansion, and further the direct proof that it becomes the eigenfunction of the non-Euclidean Laplacian of weight  $k$ .

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
平成 19 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
平成 20 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
平成 21 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：解析的整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：Eisenstein 級数，漸近展開， $q$  超幾何関数

## 1. 研究開始当初の背景

(1) Epstein zeta 関数に付随する完全漸近展開：以下  $s = \sigma + it$  を複素変数， $z = x + iy$  を複素上半平面のパラメータとするとき、正値二次形式  $Q(u, v) = |u + vz|^2$  に付随してその Epstein ゼータ関数が、 $\zeta_{\mathbb{Z}^2}(s; z) = \sum'_{m, n \neq 0} |m + nz|^{-2s}$ （以下、和

$\sum'$  においては  $m \neq 0$  となる項を除く）及びその全  $s$  平面の有理型関数への接続として定義される。研究代表者は、 $\zeta_{\mathbb{Z}^2}(s; z)$  及びその（Poisson 分布型加重平均ともみなせる）Laplace-Mellin 変換に対し、それらの  $\lim_{z \rightarrow \infty}$  における完全漸近展開を導いた。

(2) Eisenstein 級数の解析的性質: 正負の偶数  $k$  に対して,  $\mathbb{Z}$  に付随する非正則 Eisenstein 級数  $E_k(s; z)$  が  $E_k(s; z) = (y^{s/2}) \sum_{(c,d)=1} (cz+d)^{-k} |cz+d|^{-2s}$  ( $\text{Re } s > 1$ ) 及びその全  $s$  平面の有理型関数への接続として定義される. T. Noda は, 非正則 Eisenstein 級数の Fourier 展開の各項を評価することで,  $E_k(s; z)$  の  $\text{Im } z \rightarrow 0$  や  $\text{Im } z \rightarrow \infty$  における有界性条件を導くとともに, Sturm [Duke Math. (1981)] によって構成された, いわゆる  $\mathcal{C}^\infty$  保型形式から尖点形式のなす空間への射影について, Poincaré 級数と  $E_k(s; z)$  の Petersson 内積の形で与えられる射影の Fourier 展開の係数が, 同時に Laplace-Mellin 変換によっても表示されることに着目し, 上記研究代表者の論文と同様の Mellin-Barnes 型積分を用いる計算手法により, 非正則 Eisenstein 級数と尖点形式のなす空間との直交関係を証明している.

## 2. 研究の目的

(1) 非正則 Eisenstein 級数の挙動: 以下  $\zeta(s)$  を Riemann ゼータ関数とするとき,  $k=0$  の場合については関係式  $E_0(s; z) = y^s \zeta(\mathbb{Z}^2)(s; z) / 2\zeta(2s)$  によって, 上述の研究代表者の解析によって得られている  $\zeta(\mathbb{Z}^2)(s; z)$  の漸近展開から  $E_0(s; z)$  の漸近展開への直接的な移行が可能となる. そこで, この  $E_0(s; z)$  の漸近展開をもとに,  $E_k(s; z)$  の  $\text{Im } z \rightarrow \infty$  における完全漸近展開を導出することを第一ステップとし, この漸近展開が確立されたならば, それを Rankin-Selberg の方法により得られる保型  $L$  関数の積分表示の被積分関数に代入するなどの手法により, 保型  $L$  関数の特殊値や解析的性質の解明に  $E_k(s; z)$  の漸近展開を応用したい.

(2)  $q$  超幾何関数の挙動: 以下  $q$  を  $|q| < 1$  なる複素パラメータとする. 本研究の第二のテーマでは, 種々の  $q$  超幾何関数とそれに付随する  $q$  関数の  $q \rightarrow 1$  における漸近公式を導き, それらの公式と種々の  $q$  変換公式との関係を解明する. さらに, この方向の研究事実を集積したうえで, 種々の (一般化)  $q$  超幾何関数の変換公式や,  $q$  微分・ $q$  積分, また  $q$  級数の変形において重要な役割を果たす (数列の二つの組の間の) Bailey 変換, そして Selberg 積分の  $q$  類似等,  $q$  解析における広範な概念の Mellin 逆変換の観点からの再定式化を目指す.

## 3. 研究の方法

(1) 非正則 Eisenstein 級数の挙動: 前項 2(1)にも述べた通り,

$\zeta(\mathbb{Z}^2)(s; z)$  の漸近展開から  $E_0(s; z)$  の  $\text{Im } z \rightarrow \infty$  における完全漸近展開への直接的移行が可能である. 他方  $Maa(s)$  の微分作用素の逐次作用により,  $E_0(s; z)$  の諸性質を  $E_k(s; z)$  の性質に移行できることが知られているため, 上で得られた  $E_0(s; z)$  の漸近展開に各項に  $Maa(s)$  の微分作用素を逐次作用することで,  $E_k(s; z)$  の  $\text{Im } z \rightarrow \infty$  における完全漸近展開を導出する. さらにこの漸近展開式と  $E_k(s; z)$  の特殊値や関数等式との関連も解明する.

(2)  $q$  微分・ $q$  積分・ $q$  超幾何微分方程式との関連:  $q$  微分作用素や  $q$  積分作用素が古典的に定義されており,  $q \rightarrow 1$  における極限はそれぞれ通常の微分と積分と一致することが知られている. 本研究では, まずこれらを多重化した作用素において  $q = e^{-t}$  ( $\text{Re } t > 0$ ) と変数変換し, それらの Mellin 逆変換型積分表示を求め, この表示から,  $t$  が  $\text{arg } t \in \pi/2$  内を  $t \rightarrow 0$  となるときの完全漸近展開を導出する. 一方,  $Gau(s)$  の超幾何関数の  $q$  類似である Heine の  $q$  超幾何関数  $\phi(q^a, q^b; q^c; q, z)$  は, ある種の二階  $q$  微分方程式を満たすことが知られているが, 上記の漸近展開の応用として, この  $q$  超幾何微分方程式に付随する  $q$  微分作用素の  $q \rightarrow 1$  における漸近展開も解明する.

## 4. 研究成果

(1) 非正則 Eisenstein 級数の漸近展開: 研究代表者は, 既にその形が明らかになっている  $E_0(s; z)$  の漸近展開に,  $Maa(s)$  の微分作用素を逐次作用させる手法により,  $E_k(s; z)$  の  $\text{Im } z \rightarrow \infty$  における完全漸近展開の導出した. この展開からは, 扇状領域  $0 < \text{arg } z < \pi$  内を  $z \rightarrow 0$  とするときの  $E_k(s; z)$  の完全漸近展開を始め,  $E_k(s; z)$  の Fourier 級数展開や種々の特殊値の閉じた形の明示公式, また (準) 正則 Eisenstein 級数の  $q$ -series による展開, さらに  $E_k(s; z)$  が重み  $k$  の非ユークリッド Laplacian の固有関数になることの直接的証明など, 数多くの有用な新知見が得られている.

(2)  $q$  多重積分・ $q$  多重微分の漸近展開: 以下,  $|q| < 1$  を満たす複素パラメータ  $q$  に対し,  $q = e^{-t}$  ( $\text{Re } t < \pi/2$ ) とおく. 研究代表者は古典的な Thomae-Jackson 型  $q$  積分および  $q$  微分について, それらに重みを付加し多重化し

た作用素を導入した。さらにこれらの作用素をかなり一般的なクラスの正則関数に作用させ、作用素の順像に対し、そのパラメタ  $s$  が扇状領域  $|\arg t| < \pi/2$  内を  $s \rightarrow 0$  となるときの  $s$  の増大オーダーの完全漸近展開を導出した。 $s \rightarrow 1$  における  $s$  多重積分や  $s$  多重微分の完全漸近展開の研究はこれまで全く着手されて来ておらず、上記はこの方面における最初の成果といえる。結果は論文 "Complete asymptotic expansions for certain multiple  $s$ -integrals and  $s$ -differentials of Thomae-Jackson type" として纏められており、欧文学術雑誌に投稿中である。

(3) Lerch ゼータ関数の高階導関数の積平均：本研究代表者は、Lerch ゼータ関数の(階数が同一とは限らない)高階導関数のある種の積平均について、この方面の最終的成果とも言うべき、 $s \rightarrow \infty$  となるときの  $s$  の減少オーダーの完全漸近展開を導いた。結果を論文 "An application of Mellin-Barnes type integrals to the mean square of Lerch zeta-functions III" として執筆中で、欧文学術雑誌に投稿予定である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

Masanori Katsurada, Asymptotic expansions for certain multiple  $s$ -integrals and  $s$ -differentials of Thomae and Jackson type, in "Proceedings of Diophantine Analysis and Related Fields 2010," A.I.P. Press, (in press). 査読無

Masanori Katsurada and Takumi Noda, On generalized Lipschitz formulae and applications, in "Proceedings of Diophantine Analysis and Related Fields 2010," A.I.P. Press, (in press). 査読無

Masanori Katsurada, Complete asymptotic expansions for the product averages of higher derivatives of Lerch zeta functions, in "R.I.M.S. Kokyuroku," (in press). 査読無

Takumi Noda, An explicit formula for the zeros of the Rankin-Selberg  $L$ -functions, in "R.I.M.S. Kokyuroku," No. 1639 (2009), 164-171. 査読無

Takumi Noda, Some asymptotic

expansions of the Eisenstein series, in "R.I.M.S. Kokyuroku," No. 1659 (2009), 106-115. 査読無

Masanori Katsurada and Takumi Noda, Differential actions on the asymptotic expansions of non-holomorphic Eisenstein series, Int. J. Number Theory 5 (2009), 1061-1088. 査読有

Takumi Noda, An explicit formula for the zeros of the Rankin-Selberg  $L$ -function via the projection of  $\infty$ -modular forms, Kodai Math. J. 31 (2008), 120-132. 査読有

Masanori Katsurada, Complete asymptotic expansions associated with Epstein zeta-functions, Ramanujan J. 14 (2007), 249-275. 査読有

Takumi Noda, A note on the non-holomorphic Eisenstein series, Ramanujan J. 14 (2007), 405-410. 査読有

[学会発表](計13件)

Masanori Katsurada, Asymptotic expansions for certain multiple  $s$ -integrals and  $s$ -differentials of Thomae-Jackson type, Diophantine Analysis and Related Fields, Seikei University, Tokyo, March 4-5, 2010.

Masanori Katsurada and Takumi Noda, On generalized Lipschitz-type formulae and applications, Diophantine Analysis and Related Fields, Seikei University, Tokyo, March 4-5, 2010.

Masanori Katsurada and Takumi Noda, 非正則 Eisenstein 級数の漸近展開における微分作用, 日本大学工学部学術研究報告会, 日本大学工学部, 郡山市, 平成21年12月5日.

Masanori Katsurada, Asymptotic expansions for the mean square of higher derivatives of Lerch zeta-functions, Analytic Number Theory 2009, R.I.M.S. Kyoto University, Kyoto, October 14-16, 2009.

野田 工, アイゼンシュタイン級数の漸近

展開, 保型表現と保型  $L$  関数の数論的研究, 京都大学数理解析研究所, 京都市, 平成 21 年 1 月 19 日 - 23 日.

野田 工, Rankin-Selberg  $L$ -関数の零点に関する明示公式, 日本大学工学部学術研究報告会, 郡山市, 平成 20 年 12 月 6 日.

Takumi Noda, An explicit formula for the zeros of the Rankin-Selberg  $L$ -function, New Aspects of Analytic Number Theory, R.I.M.S. Kyoto University, Kyoto, October 27-29, 2008.

野田 工, Rankin-Selberg  $L$ -関数の零点に関する明示公式, 日本数学会, 代数学分科会, 東京工業大学理工学研究科, 東京都, 平成 20 年 9 月 27 日.

野田 工, Eisenstein 級数の積分変換と直交性, 第 16 回整数論サマースクール「保型  $L$ -関数」幕張メッセ国際会議場, 千葉市, 平成 20 年 8 月 18 日.

Takumi Noda, Laplace-Mellin transform of the non-holomorphic Eisenstein series, Analytic Number Theory and Related Areas, R.I.M.S. Kyoto University, Kyoto, October 17-19, 2007.

Masanori Katsurada and Takumi Noda, Differential actions on the asymptotic expansions of non-holomorphic Eisenstein series, Analytic Number Theory and Related Areas, R.I.M.S. Kyoto University, Kyoto, October 17-19, 2007.

Masanori Katsurada and Takumi Noda, Differential actions on the asymptotic expansions of non-holomorphic Eisenstein series, 日本数学会, 代数学分科会, 東北大学理学研究科, 仙台市, 平成 19 年 9 月 24

日.  
野田 工, Eisenstein 級数の Laplace-Mellin 変換, 日本数学会, 代数学分科会, 東北大学理学研究科, 仙台市, 平成 19 年 9 月 24 日.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

桂田 昌紀 (KATSURADA MASANORI)  
慶應義塾大学・経済学部・教授  
研究者番号: 90224485

### (2) 研究分担者

野田 工 (NODA TAKUMI)  
日本大学・工学部・准教授  
研究者番号: 10350034

### (3) 連携研究者

なし