

Title	無限分解可能過程及び無限分解可能分布の諸問題に関する総合的研究
Sub Title	Studies on several problems on infinitely divisible processes and infinitely divisible distributions
Author	前島, 信(Maejima, Makoto) 仲田, 均(Nakada, Hitoshi) 田村, 要造(Tamura, Yozo) 安田, 久美(Yasuda, Kumi) 鈴木, 由紀(Suzuki, Yuki)
Publisher	
Publication year	2010
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2009. )
JaLC DOI	
Abstract	無限分解可能分布の多くのサブクラスは、レヴィ過程による確率積分で定義される無限分解可能分布から無限分解可能分布への写像によって、その像として特徴づけられる。その写像を繰り返し施すことによって得られる入れ子のクラスの極限が多くの場合安定分布のクラスの閉包に一致するであろうという予想の証明に成功した。さらに半自己分解可能分布のクラスを、レヴィ過程の確率積分で特徴付けるといふ永年の問題も解決した。その他、多くの関連する問題を解決し、今後の研究に必要なアイデアも多く見つけた。
Notes	研究種目：基盤研究(B)  研究期間：2007～2009  課題番号：19340025  研究分野：数物系科学  科研費の分科・細目：数学・数学一般
Genre	Research Paper
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_19340025seika">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_19340025seika</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

研究種目：基盤研究（B）  
 研究期間：2007～2009  
 課題番号：19340025  
 研究課題名（和文） 無限分解可能過程及び無限分解可能分布の諸問題に関する総合的研究  
 研究課題名（英文） Studies on several problems on infinitely divisible processes and infinitely divisible distributions  
 研究代表者  
 前島 信 (MAEJIMA MAKOTO)  
 慶應義塾大学・理工学部・教授  
 研究者番号：90051846

研究成果の概要（和文）：無限分解可能分布の多くのサブクラスは、レヴィ過程による確率積分で定義される無限分解可能分布から無限分解可能分布への写像によって、その像として特徴づけられる。その写像を繰り返し施すことによって得られる入れ子のクラスの極限が多くの場合安定分布のクラスの閉包に一致するであろうという予想の証明に成功した。さらに半自己分解可能分布のクラスを、レヴィ過程の確率積分で特徴付けるという永年の問題も解決した。その他、多くの関連する問題を解決し、今後の研究に必要なアイデアも多く見つけた。

研究成果の概要（英文）：Subclasses of infinitely divisible distributions are characterized as ranges of stochastic integral mappings with respect to Levy processes. There was a conjecture that the limiting classes obtained by the iteration of such mappings are identical to the closure of the class of stable distributions for many mappings. We succeeded to show that the conjecture is true. Further, we solved one problem unsolved for long time that is a characterization of semi-selfdecomposable distribution by a stochastic integral mapping with Levy processes. In addition to those, we solved many related problems and found many new ideas for the further studies.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	2,500,000	750,000	3,250,000
2008年度	2,100,000	630,000	2,730,000
2009年度	1,600,000	480,000	2,080,000
年度			
年度			
総計	6,200,000	1,860,000	8,060,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：無限分解可能過程、無限分解可能分布、レヴィ過程、レヴィ測度、オルンシュタイン・ウーレンベック過程

1. 研究開始当初の背景

時間と共に変化する偶然現象を数学的に定式化した確率過程の中で、レヴィ過程とは、重なり合わない時間間隔における増分が独立で、しかも時間的一様性をもっている確率過程として定義され、長く研究されてきた。また、増分の時間的一様性を仮定しない場合は、加法過程と呼ばれ、さらに広い確率過程のクラスになる。一方、加法過程の(従ってレヴィ過程も)有限個の時点での同時確率分布は、無限分解可能分布になる。無限分解可能分布は、確率論の中で最も重要な役割をもつ分布族である。それらは独立確率変数族の和の極限として特徴づけられるからである。一般に任意の有限個の時点の同時確率分布が無限分解可能分布である確率過程を無限分解可能過程と呼ぶ。

前島は、当初無限分解可能分布のレヴィ過程による確率積分表現による特徴づけに積極的に取り組んでいた。前島が名古屋大学名誉教授佐藤、デンマークのBarndorff-Nielsenと共同でまとめた論文は、国際専門誌に掲載され、無限分解可能分布のクラスとしてのうち、多次元のクラスBとクラスTが取り上げられた。次の問題として、それらの「自然な」サブクラスの構成と特徴づけが問題になり、そのためには、レヴィ過程による広義確率積分の理論の構築が必要になっていた。また、前島と佐藤はレヴィ過程の概念を弱め、加法過程のうち、増分がすべて時間的一様とは限らず、周期的に一様な確率過程を提唱し、半レヴィ過程と命名していたが、半レヴィ過程は無限分解可能過程の中で重要な例であると認識しているが、その研究はほとんど進展していなかった。さらに自由確率論という枠組みの中で無限分解可能分布及びレヴィ過程に関する研究がデンマークの研究者を中心に急速に発展してきていた。

## 2. 研究の目的

(1) 確率積分表現、レヴィ測度表現によるク

ラスBのサブクラスの特徴づけ。

- (2) ランジュヴァン方程式とブラック・ショールズ方程式を含む確率微分方程式で、ノイズが半レヴィ過程である方程式について、解の存在や性質を調べる。これは現在ノイズをレヴィ過程として考えている問題の拡張となる。
- (3) 一般化オルンシュタイン・ウーレンベック過程という名前のもとで研究が始まった分野について、その極限分布の無限分解可能性について調べる。
- (4) タイプG分布のクラスと自己分解可能分布のクラスの共通集合に含まれる分布の特徴づけ。
- (5) レヴィ過程による確率積分で定義される確率積分写像について詳しく調べる。具体的には、その写像の繰り返しによる極限(それは、サブクラス列の極限を決める)や、その写像の不動点の決定など。
- (6) 今までほとんど手がけられていない、自由確率論の枠組みの中での極限定理の問題を、無限分解可能過程・無限分解可能分布に関連づけて研究すること。

## 3. 研究の方法

- (1) 研究代表者、研究分担者による共同研究。
- (2) 研究組織には属さない、慶應義塾大学大学院理工学研究科所属の大学院生との共同研究。
- (3) 研究組織には属さない、名古屋大学名誉教授佐藤健一、メキシコCIMATのPerez-Abreu、ドイツブラウンシュバイグ工科大学のLindner、フランスパリ大学のTudorらとの共同研究。
- (4) キシコCIMATのPerez-Abreu、スイス連邦工科大学のEmbrechts、台湾国立大学のShiehを招聘し、専門知識の提供を受ける。
- (5) 国際会議での研究成果の発表、研究討論。

#### 4. 研究成果

- (1) 無限分解可能分布のサブクラスであるJurekクラス、Goldie-Steutel-Bondesonクラス、自己分解可能分布のクラス、Thorinクラス、タイプG分布のクラス、それぞれ収束する減少部分列の構成には成功していたが、それぞれの極限の関係についてこの5年くらい考え続けてきた。その問題に対して、全てが安定分布のクラスの閉包に一致するという事実を証明することができた。これは、名古屋大学名誉教授佐藤健一の協力によった。
- (2) 平成19年8月にコペンハーゲンで開催された「第5回レヴィ過程に関する国際会議」に前島が出席し、具体的に名前がについて知られている無限分解可能分布が、どの小さいクラスに属しているかについて文献調査した結果を総合報告した。
- (3) 無限分解可能分布のサブクラスの構成についてさらに詳細な研究を進めた。今まで知られているいくつかのクラスを、連続パラメータを持つサブクラス群で繋ぐ新しいサブクラスの族を構成し、その特徴づけを、レヴィ測度、レヴィ積分のふたつの方法で行った。その結果、無限分解可能分布のクラス全体の構造が従来よりより鮮明になった。
- (4) フラクショナルブラウン運動のブラウン運動の部分レヴィ過程で置き換えたフラクショナルレヴィ過程について、その自己分解可能性を考え、どのような場合にそうになっているかについて、例の構成を含めて研究した。
- (5) 逆正弦密度による変換で実現される無限分解可能分布のクラスを新たに構成し、無限分解可能分布の問題に変形ベッセル関数やウィタッカー関数が深く関係していることを見つけ、さらに、タイプGのクラスの新しい解釈を与えた。
- (6) フラクショナルブラウン運動を拡張したバイフラクショナルブラウン運動について、その極限がどのような確率過程になるかを調べた。
- (7) 半自己分解可能分布のクラスを、レヴィ過程の確率積分で特徴付けるという永年の問題を解決した。その際の確率積分写像の被積分関数は不連続なものを使うことで成功した。その写像を繰り返し施すことによってできる入れ子のクラスの極限が不安定分布のクラスの閉包であることも示した。
- (8)  $\alpha$ -自己分解可能分布という概念を導入し、よく知られている自己分解可能分布のクラスやその他の知られているクラスを特別な場合として含む、クラスの連続パラメータ群を構成し、知られている結果との関係を明確にした。それらと関連するオルンシュタイン・ウーレンベック型過程の極限動向を調べ、知られている結果を拡張した。
- (9) 確率積分の積分するレヴィ過程を固定し、被積分関数を動かすというアイデアを使い、新しいクラスの構成、知られているクラスの新しい特徴づけに成功した。
- (10) 無限分解可能分布の写像の不動点の概念を定義し、いくつかの写像について、その不動点のクラスの特徴づけに成功した。それはまた、安定分布のクラスの新しい意味づけを与えることにもなった。
- (11) メキシコCIMATのPerez-Avreuを毎年招聘して、自由確率論に関する最近の発展や新しい確率積分写像の構成などについて、知識を提供してもらい、この補助金にかかわる研究者にとって貴重な知識を得、次の研究へのステップとした。

- (12) 台湾国立大学のShiehを招聘し、短期ではあったが、一般化オルンシュタイン・ウーレンバック過程についての研究を前進させた。
- (13) スイス連邦工科大学のEmbrechtsを招聘し、レヴィ過程の危機管理問題への応用について知識の提供を受けた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 22 件) (すべて査読あり)

- (1) M. Maejima and G. Nakahara, A note on new classes of infinitely divisible distributions on  $\mathbb{R}^d$ , *Electr. Commun. Probab.* 14 (2009), 358-371
- (2) M. Maejima and Y. Ueda, Stochastic integral characterizations of semi-selfdecomposable distributions and related Ornstein-Uhlenbeck type processes, *Commun. Stoch. Anal.* 3 (2009), 349-367.
- (3) M. Maejima and K. Sato, The limits of nested subclasses of several classes of infinitely divisible distributions are identical to the closure of the class of stable distributions, *Probab. Th. Rel. Fields* 145 (2009), 119-142.
- (4) C. Kraaikamp, H. Nakada, T. Schmidt, Metric and arithmetic properties of mediant-Rosen maps, *Acta Arith.* 137 (2009), 295-324.
- (5) M. Maejima and S. Suzuki, Limit theorems for weighted sums of infinite variance random variables attracted to integrals of linear fractional stable motions, *Tokyo J. Math.* 31 (2008) 259-271.
- (6) T. Aoyama, M. Maejima and J. Rosinski, A subclass of type G selfdecomposable distributions on  $\mathbb{R}^d$ , *J. Theoret. Probab.* 21 (2008), 14-34.
- (7) M. Maejima and C.A. Tudor, Limits of bifractional Brownian noises, *Comm. Stoch. Anal.* 2 (2008), 369-383.
- (8) O.E. Barhdorff-Nielsen and M. Maejima, Semigroups of Upsilon transformations, *Stoch. Proc. Appl.* 118 (2008), 2334-2343.
- (9) H. Nakada, The non-monotonicity of the entropy of  $\alpha$ -continued fraction transformations, *Nonlinearity* 21 (2008), 1207-1225.
- (10) V. Berthe and H. Nakada, Asymptotic behavior of the number of solutions for non-Archimedean Diophantine approximations with restricted denominators, *Finite Fields Appl.* 14 (2008), 849-866.
- (11) Y. Suzuki, A diffusion process with a random potential consisting of two self-similar processes with different indices, *Tokyo J. Math.* 31 (2008), 511-532.
- (12) M. Maejima, Subclass of Goldie-Steutel-Bondeson class of infinitely divisible distributions on  $\mathbb{R}^d$  by Upsilon-mapping, *ALEA* 3, (2007), 50-66.
- (13) M. Maejima and R. Shah, Operator-semistable, operator semi-selfdecomposable probability measures and related nested classes on p-adic vector spaces, *Monatshefte fur Matheamtik* 151 (2007), 293-318.
- (14) M. Maejima and C.A. Tudor, Wiener integrals with respect to the Hermite Processes and a non-central limit theorem, *Stoch. Anal. Appl.* 25 (2007), 1043-1056.
- (15) J. Aaronson and H. Nakada, Exchangeable, Gibbs and equilibrium measures for Markov subshifts, *Ergodic Th. Dynamical Systems* 27 (2007), 535-545.
- (16) E. Deligero, M. Fuchs, and H. Nakada, Invariance principles for Diophantine approximation of formal Laurent series over a finite base field, *Finite Fields Appl.* 13 (2007), 535-545.
- (17) Y. Tamura and H. Tanaka, On a formula on the potential operators of absorbing Levy processes in the half space, *Stoch. Proc. Appl.* 118 (2007), 199-212.

[学会発表] (計 10 件)

- (1) 青山 崇洋, A. Lindner, 前島 信, A new family of mappings of infinitely divisible distributions related to the

Goldie-Steutel-Bondesson class, 日本数学会年会 2010年3月25日, 慶應義塾大学.

- (2) H. Nakada, Entropy of a class of continued fraction maps, UK-Japan Winter School, 2009年1月10日, 英国 バース大学
- (3) 前島 信, 無限分解可能分布のサブクラスの極限について, 日本数学会2008年度秋季総合分科会, 2008年9月24日, 東京工業大学.
- (4) 仲田 均, Fully subtractive algorithmの dynamics について, Dynamics of complex systems 2008 -- 数学的予測方式の可能性と諸分野からのニーズ --, 2008年9月3日, 北海道大学.
- (5) M. Maejima, The limits of nested subclasses of several classes of infinitely divisible distributions, 7<sup>th</sup> World Congress in Probability and Statistics, 2008年7月16日, Singapore.
- (6) H. Nakada, On the metric Diophantine approximations in positive characteristic, Journee corps finis at LIRMM, 2007年11月28日, Montpellier, France.
- (7) 仲田 均, 夏井理恵,  $\alpha$ -連分数変換から作られる確率過程の1-parameter family の entropy の変化について, 日本数学会秋季総合分科会, 2007年9月21日, 東北大学.
- (8) M. Maejima, To which class do known real valued infinitely divisible distributions belong to? 5<sup>th</sup> International Conference on Levy Processes and Applications, 2007年8月16日, Copenhagen, Denmark.
- (9) H. Nakada, On the non-monotonicity of the entropy of alpha-continued fraction transformations, Workshop on Dynamical systems and Number Theory 2007, 2007年7月2日, Strobl, Austria
- (10) H. Nakada, On the Lenstra constant associated to continued fractions, Workshop at Special Trimester on Dynamical Systems and Number Theory, 2007年4月26日, Scuola Normale Superiore at Pisa, Italy.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

前島 信 (MAEJIMA MAKOTO)  
慶應義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号: 90051846

### (2) 研究分担者

仲田 均 (NAKADA HITOSHI)  
慶應義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号: 40118980  
田村 要造 (TAMURA YOZO)  
慶應義塾大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 50171905  
安田 久美 (YASUDA KUMI)  
慶應義塾大学・商学部・准教授  
研究者番号: 40284484  
鈴木 由紀 (SUZUKI YUKI)  
慶應義塾大学・医学部・講師  
研究者番号: 30286645

### (3) 連携研究者

該当なし