慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	力学系・流体力学の応用解析的研究
Sub Title	Research on dynamical systems and fluid mechanics in terms of applied analysis
Author	曽我, 幸平(Soga, Kohei)
Publisher	
Publication year	2024
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2023.)
JaLC DOI	
Abstract	本研究では、応用解析的手法に基づいて、非線型偏微分方程式の弱解を用いてLagrange力学系およびHamilton力学系のレギュラー運動を解析する弱KAM理論に対する新しい近似理論の構築、Tonelliの変分法に対する初等的方法の開発、流体力学の基礎方程式系に対する弱解の存在証明、流体力学の基礎方程式系に対する数値解析的方法の収束証明・誤差評価、計算機流体力学で提案された非線型偏微分方程式の適切性に関する数学解析、に関する研究を行った。 In this research, based on applied analysis, we proposed a new approximation method for weak KAM theory (weak KAM theory is to analyze regular motion of Lagrangin dynamics and Hamiltonian dynamics in terms of nonlinear partial differential equations), demonstrated an elementary proof in Tonelli's calculus of variations, proved existence of weak solutions to systems of fundamental equations in fluid mechanics, analyzed convergence and error estimates for numerical methods for systems of fundamental equations in fluid mechanics, and showed wellposedness of a nonlinear partial differential equations arising in computational fluid mechanics.
Notes	研究種目：若手研究 研究期間：2018～2023 課題番号：18K13443 研究分野：解析学
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_18K13443seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：若手研究
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ１３４４３

研究課題名（和文）力学系・流体力学の応用解析的研究

研究課題名（英文）Reserach on dynamical systems and fluid mechanics in terms of applied analysis

研究代表者
曽我　幸平（Soga, Kohei）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・准教授

研究者番号：８０６２０５５９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、応用解析的手法に基づいて、非線型偏微分方程式の弱解を用いてLagrange力学系およびHamilton力学系のレギュラー運動を解析する弱KAM理論に対する新しい近似理論の構築、Tonelliの変分法に対する初等的方法の開発、流体力学の基礎方程式系に対する弱解の存在証明、流体力学の基礎方程式系に対する数値解析的方法の収束証明・誤差評価、計算機流体力学で提案された非線型偏微分方程式の適切性に関する数学解析、に関する研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究では、「構成的手法を尊重すること」、「厳密な数学解析として数値解析的手法を構築/援用すること」、「解の存在を事前に仮定する必要のない数値解析的理論を展開すること」に力点をおき、古典力学および流体力学に関する諸問題を分野横断的な手法で解明した．「純粋数学が求める厳密さを保ちつつ、極めて初等的な手法を用いて複雑な非線型問題を解析する枠組みを与えた」という意味で、本研究の成果は高い独創性を持ちかつ分野横断的な応用の可能性を有するものである。

研究成果の概要（英文）：In this research, based on applied analysis, we proposed a new approximation method for weak KAM theory (weak KAM theory is to analyze regular motion of Lagrangin dynamics and Hamiltonian dynamics in terms of nonlinear partial differential equations), demonstrated an elementary proof in Tonelli's calculus of variations, proved existence of weak solutions to systems of fundamental equations in fluid mechanics, analyzed convergence and error estimates for numerical methods for systems of fundamental equations in fluid mechanics, and showed wellposedness of a nonlinear partial differential equations arising in computational fluid mechanics.

研究分野：解析学

キーワード：Hamilton力学系　Lagrange力学系　Tonelliの変分法　弱KAM理論　Hamilton-Jacobi方程式　流体力学　Navier-Stokes方程式　数値解析

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

近可積分 Hamilton 力学系の準周期運動の存在を示した Kolmogorov-Arnold-Moser(KAM)理論は，非可積分項が小さいという仮定を必須とする摂動論であり，「摂動が大きい場合はどうなるのか」という自然な疑問が生じる．Aubry-Mather 理論は，近可積分系とは独立の設定の下でこの疑問に答えた．KAM 理論の主要な成果は準周期運動を乗せた KAM トーラスと呼ばれる不変多様体の存在である．KAM トーラスは Lagrange 部分多様体になるため，滑らかな実数値関数の微分のグラフとして表示できる．さらにこの関数は Hamilton-Jacobi(HJ)方程式の大域的古典解になる．HJ 方程式は１階完全非線型偏微分方程式であるため，一般に大域的古典解は期待できない．そこで，偏微分方程式論において「粘性解」と呼ばれる弱解の概念が Crandall-Lions(Trans. A.M.S., '83)によって導入された．1997 年に登場した Fathi の弱 KAM 理論は、HJ 方程式の粘性解の概念を利用して，KAM トーラスと HJ 方程式の古典解の間に成り立つ関係を自然な形で一般化し，Aubry-Mather 理論の帰結を粘性解の言葉で言い換えた．この言い換えにより，力学系と偏微分方程式の相互補完的な取り扱いが可能になる．弱 KAM 理論が登場した後，偏微分方程式に対する近似理論を用いて，弱 KAM 理論の近似理論を構築する研究が発展した．例えば，Gomes(Nonlinearity, '02)は粘性項を付した HJ 方程式に対して弱 KAM 理論を展開し(平滑化近似，確率力学系に対応)，Maro-Sorrentino(Commun. Math. Phys., '17)や Mitake-Soga(Cal. Vari. PDEs, ‘18)は discount 項を付した HJ 方程式に対して弱 KAM 理論を展開した(摩擦力学系に対応)．Soga(Math. Comp. ‘16)は有限差分法によって離散化された空間 1 次元の HJ 方程式に対して弱 KAM 理論を見出す(ランダムウォークに対応)試みを行ったが，結果は部分的なものであった．

流体力学の諸問題において計算機は極めて重要な役割を果たしている．計算機流体力学で利用されている様々な近似法やアルゴリズムの安定性・収束・誤差評価などに関する数学解析は，応用の観点のみならず，純粋数学の観点からも活発に研究されている．流体力学の数値解析では有限要素法および有限体積法に分類される方法が主流であり，厳密な数学としての理論が整備されている．有限差分法は，概念そのものは極めて初等的であるが，その流体力学への応用と数学解析は先に述べた２者と比べてあまり発展していなかった．また，有限要素法・有限体積法・有限差分法とは全くタイプの異なる「粒子法」と呼ばれるタイプの手法が近年注目されているが，その数学解析は発展途上であった．

２．研究の目的

力学系および流体力学の分野では，数学・物理学・工学の全てと密接に関わりながら，今日も活発に研究が行われている．同分野の今後の発展において，強い非線形性に耐え得る数学的方法を構築すると同時に非線形性が生み出す事象を具体的に理解することは非常に重要である．本研究では，応用解析的アプローチによって，すなわち微分方程式論・変分法・種々の近似理論・摂動論・確率論・数値解析などを総合的に駆使することによって，Hamilton 力学系・Lagrange 力学系・Hamilton-Jacobi 方程式・弱 KAM 理論・流体力学・Navier-Stokes 方程式系に関する定性的・定量的な結果を追求することを目的とした．具体的には，解の構成/解の性質/解が成す空間の構造に関する数学解析に加えて，各種近似理論の研究，応用の場面で広く活用されている数値計算法に対する収束証明・誤差評価に関する数学解析を行うことを目指した．また，厳密解の存在をあらかじめ仮定しなくてよい数値解析的枠組み(解の構成的存在証明)を厳密な数学として開発・援用し，計算機援用解析も積極的に行う方針であった．さらに，各研究対象の基礎をなす考え方および数学的手法を比較することを通して，各々を独立に扱っていては見えてこない側面にも迫る計画であった．

３．研究の方法

本研究では，応用解析的アプローチによって，すなわち微分方程式論・変分法・種々の近似理論・摂動論・確率論・数値解析などを総合的に駆使することによって，力学系および流体力学における各種近似理論の研究を行った．弱 KAM 理論の研究では，一般次元の格子空間上の非一様ランダムウォークの諸性質とその双曲型スケール極限を本質的に利用した．流体力学の研究では，Navier-Stokes 型の方程式系に対する全離散・半離散の連続極限を解析するにあたって，Aubin-Lions の補題のアイデアを応用した．また計算機流体力学で提案された非線型偏微分方程式の数学解析では，粘性解理論と特性曲線の方法を応用した．

４．研究成果

[6]では，一般次元の格子空間上で非一様ランダムウォークの族を与え，そこで定義された作用汎関数を最小化する問題を考えることで弱 KAM 理論と類似の構造を見出し，双曲型スケール極限(大数の法則)によって弱 KAM 理論を再現した．この結果は，粘性近似および discount 近似に続く弱 KAM 理論の近似理論としてのみならず，様々な Markov 連鎖の拡散型スケール極限(中心極限定理)によって放物型偏微分方程式に関係する事柄を導出する「流体力学的極限」の諸結果と対比しても興味深い．Lax-Oleinik 作用素を定義する際，作用汎関数の最小値が重要な役割を果たす．18 世紀中頃に Euler らは「最小作用の原理」を提唱したが，作用汎関数の最小化元の存在は 150 年以上たってから Tonelli によって示された．Tonelli は，まず絶対連続曲線のクラスで最小化元の存在を示し，次いで最小化元の C^2-正則性を示した．Tonelli の手法は絶対連続性や弱収束の概念を必要とするため，Euler の発見から 150 年以上の歳月を要した．[4]では，この 150 年のギャップを埋めるべく，常微分方程式に対する Euler 差分法と作用積分の Riemann 和近似を用いた初等的議論によって，最小化元を C^2 級クラスで直接見つける方法を与えた．

非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する有限差分法の厳密な数学解析(Leray-Hopf の弱解の構成)は 1960 年代の Ladyzhenskaya らの研究に始まる．Chorin(Math. Comp., '69)は，計算機への実装も想定しつつ Ladyzhenskaya の方法を改良し，今日「射影法」と呼ばれている非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する数値計算法の原型を有限差分法の枠組で提案した．「射影法」の基本的なアイデアは，ベクトル場の Helmholtz-Hodge 分解の離散版を導入することで，非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を微小時間発展させる議論と非圧縮性(divergence-free)条件を課す議論を別々に交互に行うことである．Chorin は周期境界条件下で十分滑らかな解が存在すると仮定して，射影法の収束を示した． [7]では，一般の有界領域上で Chorin の射影法を定式化し，外力・初期値の大きさや解の存在に関する仮定を一切することなく，Leray-Hopf の弱解に(部分列)収束することを示した．技術的な難しさは，離散 divergence-free 条件を得るために射影を取ると離散 L^2_tH^1_x-評価が失われること，また離散 divergence-free 条件は離散パラメータに依存するため，テスト関数を通常のソレノイダル空間から取ることができないこと，である．[7]では，漸近的 divergence-free 条件という性質と Banach 空間のコンパクト性に関する Aubin-Lions の補題の離散版を新たに導入することで収束証明に成功した．[5]では，[7]の結果を用いて時間周期的な Leray-Hopf 弱解の構成的存在証明を与えた．[1]では，非一様非圧縮性 Navier-Stokes 方程式(密度が未知関数かつ密度依存する粘性係数)に対する有限差分法を定式化し，弱解の構成的存在証明を与えた．ここでは[7]で導入した離散 Aubin-Lions の補題をさらに発展させ，速度場の L^2_x-ノルムを速度場の H^1_x-ノルムと[密度×速度場]の弱ノルムで評価するという不等式を考案することで離散問題の収束を示した．[2]では，[1]の枠組を時間離散空間連続な問題に応用することで，高次の非線形項を簡略化することなく，Kazhikhov-Smagulov モデル(物質拡散を伴う混合流体の基礎方程式系)の時間大域解の存在を示しその長時間挙動を明らかにした．

[3]では，二相流体の自由境界を等高面法によって数値計算するために考案された非線型偏微分方程式の数学的正当性について，粘性解理論を用いて明らかにした．流体運動の Lagrange 記述では，流体を仮想的な粒子の集団とみなして初期位置でタグを付け，その軌跡を追跡する写像を考える．流体運動における単純な移流現象は，この写像または Euler 記述の速度場が定める線形輸送方程式によって解析可能である．水/油などの二相流体の自由境界は線形輸送方程式の解(等高面関数)のゼロ等高面として追跡することができる．計算機流体力学において，等高面関数の変化率をゼロ等高面上で安定化させるために，線形輸送方程式ではなく、元々のゼロ等高面を変えないある HJ 方程式を使う方法が提案された．[3]において，粘性解理論によってこの方程式の粘性解クラスでの適切性とゼロ等高面の不変性が得られ，さらに特性曲線の方法を駆使することで，連続関数として得られる粘性解のゼロ等高面近傍における正則性(C^2 級の滑らかさと 1 階微分の先見的有界性)が得られた．この結果は，粘性解の局所的正則性を示す新たな手法を開発したという意味でも新規性がある．

Reference

[1] K. Soga, Mathematical analysis of a finite difference method for inhomogeneous incompressible Navier-Stokes equations, Numerische Mathematik (in press).
[2] E. Kacedan and K. Soga, Existence of global weak solutions of inhomogeneous incompressible Navier--Stokes system with mass diffusion, Zeitschriftur Angewandte Mathematik und Physik (2024).
[3] D. Bothe, M. Fricke and K. Soga, Mathematical analysis of modified level-set equations, Mathematische Annalen (2024).
[4] K. Soga, A Remark on Tonelli's Calculus of Variations, Russian Journal of Nonlinear Dynamics (2023).
[5] M. Maeda and K. Soga, More on Convergence of Chorin’s Projection Method for Incompressible Navier--Stokes Equations, Journal of Mathematical Fluid Mechanics (2022).
[6] K. Soga, Weak KAM theory for action minimizing random walks, Calculus of Variations and Partial Differential Equations (2021).
[7] H. Kuroki and K. Soga, On convergence of Chorin's projection method to a Leray-Hopf weak solution, Numerische Mathematik (2020).

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計7件（うち査読付論文　7件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　2件）

１．著者名 曽我 幸平	４．巻 32
２．論文標題 Hamilton-Jacobi方程式に対する有限差分法の数学解析―確率論と変分法を用いた枠組―	５．発行年 2022年
３．雑誌名 応用数理	６．最初と最後の頁 127,138
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.11540/bjsiam.32.3_127	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 ―

１．著者名 Soga Kohei	４．巻 60
２．論文標題 Weak KAM theory for action minimizing random walks	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	６．最初と最後の頁 1,49
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-021-02025-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

１．著者名 Maeda Masataka, Soga Kohei	４．巻 24
２．論文標題 More on Convergence of Chorin ' s Projection Method for Incompressible Navier?Stokes Equations	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Journal of Mathematical Fluid Mechanics	６．最初と最後の頁 1, 31
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00021-021-00652-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

１．著者名 Kuroki Hidesato, Soga Kohei	４．巻 146
２．論文標題 On convergence of Chorin ' s projection method to a Leray-Hopf weak solution	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Numerische Mathematik	６．最初と最後の頁 401,433
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00211-020-01144-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

1．著者名 Soga Kohei	4．巻 19
2．論文標題 A Remark on Tonelli's Calculus of Variations	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Russian Journal of Nonlinear Dynamics	6．最初と最後の頁 239,248
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.20537/nd230501	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kacedan Eliott, Soga Kohei	4．巻 75
2．論文標題 Existence of global weak solutions of inhomogeneous incompressible Navier-Stokes system with mass diffusion	5．発行年 2024年
3．雑誌名 Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00033-024-02209-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Bothe Dieter, Fricke Mathis, Soga Kohei	4．巻 -
2．論文標題 Mathematical analysis of modified level-set equations	5．発行年 2024年
3．雑誌名 Mathematische Annalen	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-024-02868-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　2件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 Soga Kohei
2．発表標題 Weak KAM theory for discretized Hamilton-Jacobi equations
3．学会等名 New trends in Hamilton-Jacobi: PDE, Control, Dynamical Systems and Geometry（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

１．発表者名 Soga Kohei(登壇者), Bothe Dieter, Fricke Mathis
２．発表標題 Mathematical analysis of modified level-set equations
３．学会等名 94th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM)（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2024年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Technical University of Darmstadt			