

Title	エルゴード理論と測度論的数論
Sub Title	Ergodic theory and metric number theory
Author	仲田, 均(NAKADA, HITOSHI) 前島, 信(MAEJIMA, MAKOTO) 田村, 要造(TAMURA, YOZO) 宮崎, 琢也(MIYAZAKI, TAKUYA) 田中, 孝明(TANAKA, TAKAAKI) 厚地, 淳(ATSUJI, ATSUSHI) 安田, 公美(YASUDA, KUMI) 石井, 一平(ISHII, IPPEI) 勝良, 健史(KATSURA, TAKESHI) 夏井, 理恵(NATSUI, RIE)
Publisher	
Publication year	2009
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2008. )
JaLC DOI	
Abstract	エルゴード理論と深い係わり合いを持ついくつかの数論の問題について新しい研究成果を得た。また、近年数値計算のための準乱数生成などと係わり合いの深い非アルキメデス数体上のディオファントス近似についてその測度論的性質をエルゴード理論や確率論の手法を用いて解の個数の評価についていくつかの研究結果を得た。また、このような問題に係わり合いの深い記号力学系の座標交換についてその不変確率の特徴づけを行った。
Notes	研究種目：基盤研究(B)  研究期間：2006～2008  課題番号：18340032  研究分野：数物系科学  科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
Genre	Research Paper
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_18340032seika">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_18340032seika</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18340032

研究課題名（和文） エルゴード理論と測度論的数論

研究課題名（英文） Ergodic theory and metric number theory

研究代表者

仲田 均 (NAKADA HITOSHI)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：40118980

研究成果の概要：エルゴード理論と深い係わり合いを持ついくつかの数論の問題について新しい研究成果を得た。また、近年数値計算のための準乱数生成などと係わり合いの深い非アルキメデス数体上のディオファントス近似についてその測度論的性質をエルゴード理論や確率論の手法を用いて解の個数の評価についていくつかの研究結果を得た。また、このような問題に係わり合いの深い記号力学系の座標交換についてその不変確率の特徴づけを行った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2007 年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2008 年度	2,700,000	810,000	3,510,000
年度			
年度			
総計	8,500,000	2,550,000	11,050,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：連分数、非アルキメデス数体、測度論的数論、国際研究者交流

## 1. 研究開始当初の背景

1950 年代に David Rosen により Hecke 群に付随した nearest 型連分数展開、あるいは本研究代表者により 1980 年代に定義された連分数展開など多くの連分数展開が個別に研究されていた。1990 年代にオランダの Cor Kraaikamp を中心とするグループがこれらの連分数に関する理論を精力的に研究した。一方、その間本研究代表者は連分数とモジュラー平面上の幾何学的構造との関係を利用することでエルゴード理論として新しい側面に着目した研究を行っていた。2000 年代に入りこれらの研究が結びつき、また研究対象を多次元連分数変換に広げることでこれらの

変換のエルゴード理論についていくつかの新しい問題提起がされていた。また、非アルキメデス数体上のディオファントス近似論に関しても国外で急に新しい研究成果が現れるようになった。当初の結果は実数の場合と同様に連分数展開を利用した研究が行なわれていたが、本研究代表者を中心とした研究により、非アルキメデス数体の場合にも古典的な方法を改良することでこれまでの制約条件を取り除くことに成功していた。これらの流れと別に、座標交換可能測度の研究が従来知られていた有限マルコフ型に限らず問題が数論的変換の作る記号力学系を切り口に始められていた。これら異なった三つの

研究の流れの中で本研究代表者は(1)様々な連分数変換のエルゴード理論、(2)非アルキメデス数体上のディオファントス近似の測度論的性質、(3)座標交換可能不変測度の特徴づけ、の三つの研究を単に平行して行うだけでなく、相互の連携の必要性を実感していた。そこで国内外の共同研究者との新しい研究グループを作りながら新しい総合的研究計画を立案した。

## 2. 研究の目的

(1) 連分数、Jacobi-Perron アルゴリズムなどの広い意味での連分数変換の持つ性質をエルゴード理論の立場から研究する。

(2) 非アルキメデス数体上のディオファントス近似論の確率論的研究をエルゴード理論の手法を用いて研究する。

(3) 記号力学系に対して横断的な変換の不変測度の特徴づけを座標交換の変換として捉えて研究する。

以上の研究を通してエルゴード理論・確率論の数論との係わり合いを基にエルゴード理論の新たな体系的視点を与えることを研究目的とした。

## 3. 研究の方法

三つのテーマを平行して行いながら、相互の連携を密にするためのセミナーを定期的に行った。個別の研究では、まず、過去の研究の資料を集め、これまでの方法論の精細な検討を行いながらその有効性と限界を吟味し新たな方法論を模索した。海外研究者(イスラエル、フランス、オランダ、イタリア)との個々の研究連絡は e-mail によりながらも重要な節目には招聘、あるいは訪問することで集中的かつ効率的な研究を行った。国内の研究者の間では年1回は研究集会を行い、互いの研究状況を理解し、得られた結果方法論を共有することに務めた。また、分担者ごとに異なった専門分野で間接的に本研究に関連する研究情報を常に提供しあうことで研究の進展を図った。

## 4. 研究成果

(1) 連分数変換に関連する研究としては特に下記4件の成果を得た：

Jacobi Perron アルゴリズムの作る同時近似分数の数論的一様分布性がほとんどすべての実ベクトルについて成立することをエルゴード的変換の群拡大の方法を用いて証明した。この問題は1980年代後半に H. Jager と P. Liardet が連分数について示している結果を多次元に拡張したものである。これまで、多くの研究者が部分集合上でしか分布しないと思われた問題を全体で一様分布していることを示したもので、ユークリッドアルゴリズムを群の中に導入して予期しな

かった結果を得ることに成功した。発表論文に公表されている。

1990年代に3-interval exchange mapsの解析のために S. Ferenczi 等によって考案された negative slope アルゴリズムに対してその絶対連続不変測度をエルゴード理論の natural extension の方法を用いて具体的に求め、その弱ベルヌーイ性を証明し同時にエントロピーの値を決定した。この研究とほぼ同時期に S. Ferenczi 達も本研究と独立に同じ絶対連続不変測度を求めエルゴード性を証明したが、本研究の成果ではエルゴード性よりはるかに強い弱ベルヌーイ性を示したことで大きく評価されている。発表論文に成果が公表されている。また、natural extension を構成したことでアルゴリズムの周期点の代数的性質を完全に記述することが出来る。この点でも S. Ferenczi の研究を前進させている。これらの成果は発表論文の共著者と他の研究者により、さらに研究が続けられている。

2005年頃イタリアの研究グループにより連分数変換の絶対連続不変測度に関するエントロピーがパラメーターについて連続に変化することが証明された。また、パラメーターが0に近づくときのエントロピーの値が0に近づくことを証明した。同時に、コンピューターによる数値計算でその変化が単調ではないことが予測された。本研究では、エントロピーの0への近づき方が早くないことを証明するとともに、イタリアグループによるコンピューター数値実験による予想が正しいことを証明した。実際、パラメーターについて増加、定常、減少がそれぞれ無限個の区間で起こることを証明した。この成果は発表論文に公表されている。この結果は連分数研究者の間で高く評価されており、オランダ、フランス、イタリアなどのグループによりさらに詳細な研究が続けられている。

Rosen 型連分数に対する Legendre 定数については J. Lehner, T. Schmidt, D. Rosen らによって議論されているが、定数の正確な値は求められていなかった。本研究において、幾何学的方法とエルゴード理論的方法を組み合わせることで、その定数が Lenstra 定数として知られているものと一致していることを証明した。この方法はまったく新しいもので、これにより多くのタイプの連分数に関して Lenstra 定数を求めることで Legendre 定数を求める方法が確立された。また、数論的定数が測度論的定数から求まるという結果は国外の多くの研究者からも評価されている。この成果は発表論文で公表されてい

る。また、Rosen 連分数の中間近似分数に対する研究が本研究代表者、C. Kraaikamp、T. Schmidt により共同で行われている。

(2) 非ユークリッド数体上のディオファントス近似の研究では下記3件の成果を得た：

有限体を係数に持つ形式的べき級数の有理関数による近似の問題で、有理関数を二つの互いに素な多項式の比で表す場合に解の個数に対して中心極限定理や重複対数の法則などを含む不変原理が成立することを証明した。そのために、ディオファントス不等式から 2-dependent 確率過程を構成するという新しい手法を見出した。この手法は非ユークリッド数体上の問題で他の問題にも適用できる可能性がある。この成果は発表論文に公表されている。

上記の問題に対して分母、分子の多項式が互いに素である必要がないとした場合の解の個数について研究を行った。この場合、有理関数としての解の個数については大数の強法則が成立することを Cassels の方法によって証明した。一方、多項式の対としての解の個数についてはその方法が有効でないことが判明した。この場合については連分数展開のベルヌーイ性を利用し、評価関数に関するある条件の下で大数の強法則を証明した。しかし後者の場合、誤差の評価を得ることはできなかった。この成果は発表論文に公表された。最近、M. Fuchs が W. Schmidt の方法を用いて評価関数に関する条件を除くことに成功し、また誤差の評価も与えた。しかしこの方法で得られる誤差は Cassels の方法で得られる誤差よりは弱い。

上の、と同様な問題で有理関数として分母の多項式に条件をつけた場合の問題についていくつかの成果を得た。特に、分母を既約多項式と制限をつけた場合、Cassels の方法が有効で大数の強法則が成り立つことを証明した。また、同様なことが既約多項式の冪と条件を変えても成り立つことを示した。この場合、Cassels の方法を用いるため組み合わせ論的な性質を示した。この成果は発表論文に公表されている。また、その後、組み合わせ論的な性質は M. Fuchs により精密化され非同次近似の問題などに拡張されている。

(3) 記号力学系における横断的な変換の不変測度の特徴づけの研究では下記2件の成果を得た：

この問題は de Finetti 以来古典的な問題として知られており、有限状態を持つ Markov 連鎖の場合には Diaconis によりその特徴づけがなされている。本研究では可算無限の状

態を持つ場合や Markov 性を持たない場合についての研究を行った。ここでもエルゴード理論における群拡大の方法を活用し、不変測度の特徴づけに成功した。その成果は発表論文に公表されている。その後、の共著者の一人 O. Sarig はこの成果を幾何学的問題に応用し、foliation の構造の研究などに目覚ましい成果を挙げている。

上の の成果から自然に多次元記号力学系の座標交換に対する拡張が考えられる。本研究では、多次元の場合に座標交換に関する不変性を Gibbs 測度や equilibrium 測度との同値性の観点から研究し、いくつかの成果を得た。それらは発表論文に公表されている。この問題はその後、空間に対する不変性との関係を明らかにすべく継続して研究が続けられている。

以上の三つの研究は問題意識、方法論においてそれぞれ相互に深くかかわっている。特に、エルゴード理論の natural extension method, 数論における Cassels method, 確率論の Renyi-Lamperti method の総合的取り扱いから多くの結果が得られた。この中からアルゴリズムのダイナミクスという観点からテーマをしぼり、現在新たなプロジェクトとして研究を継続している。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 17 件)

Hitoshi Nakada,  
On the Lenstra constant associated to the Rosen continued fractions, to appear in J. Eur. Math. Soc., 査読有,  
<http://front.math.ucdavis.edu/0705.3756>

Valerie Berthe, Hitoshi Nakada,  
Rie Natsui, Asymptotic behavior of the number of solutions for non-archimedean diophantine approximations with restricted denominators. Finite Fields Appl. 14 (2008), no. 4, 849-866. 査読有

Hitoshi Nakada, Rie Natsui,  
The non-monotonicity of the entropy of  $\beta$ -continued fraction transformations. Nonlinearity 21 (2008), no. 6, 1207-1225. 査読有

Koshiro Ishimura, Hitoshi Nakada, Some ergodic properties of the negative slope algorithm. Osaka J. Math. 44 (2007), no. 3, 667-683. 査読有

Eveyth Deligero, Michael Fuchs, Hitoshi Nakada, Invariance principles for Diophantine approximation of formal Laurent series over a finite base field. Finite Fields Appl. 13 (2007), no. 3, 535 -545. 査読有

Jon Aaronson, Hitoshi Nakada, Exchangeable, Gibbs and equilibrium measures for Markov subshifts. Ergodic Theory Dynam. Systems 27 (2007), no. 2, 321 -339. 査読有

Valerie Berthe, Hitoshi Nakada, Rie Natsui, Arithmetic distributions of convergents arising from Jacobi Perron algorithm. Indag. Math. (N.S.) 17 (2006), no. 2, 169 -185. 査読有

Hitoshi Nakada, Rie Natsui, Asymptotic behavior of the number of solutions for non Archimedean Diophantine approximations. Acta Arith. 125 (2006), no. 3, 203 -214. 査読有

Jon Aaronson, Hitoshi Nakada, Omri Sarig, Exchangeable measures for subshifts. Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. 42 (2006), no. 6, 727 -751. 査読有

〔学会発表〕(計 8 件)

仲田 均,

Entropy of a class of continued fraction maps, UK Japan Winter School, 2009年1月10日, The university of Bath 大学 (UK)

夏井 利恵,

Asymptotic behavior of the number of solutions for non Archimedean Diophantine approximation with restricted denominators, エルゴード理論とその周辺, 2008年11月29日, 日本大学

仲田 均,

Fully subtractive algorithm の dynamics について, Dynamics of complex systems 2008, 2008年9月3日, 北海道大学

夏井 利恵,

On the entropy of  $\alpha$ -continued fraction transformations, エルゴード理論とその応用, 2007年12月21日, 慶應義塾大学

仲田 均,

On the non monotonicity of the entropy of  $\alpha$ -continued fraction transformations, Workshop on Dynamical systems and Number Theory 2007, 2007年7月2日, Storbl (Austria)

仲田 均,

On the Lenstra constant associated to continued fractions, Renormalization small divisors continued fractions and geodesic flows, 2007年4月26日, SNS at Pisa (Italy)

仲田 均,

$Z^d$  上の位相的マルコフシフトの位置交換可能測度と平衡状態について, エルゴード理論の展望, 2006年12月7日, 三重大学

夏井 利恵,

On generalized Brjuno functions associated to  $\alpha$ -continued fractions, エルゴード理論の展望, 2006年12月5日, 三重大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

仲田 均 (NAKADA HITOSHI)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号: 40118980

### (2) 研究分担者

前島 信 (MAEJIMA MAKOTO)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号: 90051846

田村 要造 (TAMURA YOZO)

慶應義塾大学・理工学部・准教授

研究者番号: 50171905

宮崎 琢也 (MIYAZAKI TAKUYA)

慶應義塾大学・理工学部・准教授

研究者番号: 10301409

田中 孝明 (TANAKA TAKAAKI)

慶應義塾大学・理工学部・助教

研究者番号: 60306850

厚地 淳 (ATSUJI ATSUSHI)

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号: 00221044

安田 公美 (YASUDA KUMI)

慶應義塾大学・商学部・准教授

研究者番号: 40284484

石井 一平 (ISHII IPPEI)

慶應義塾大学・理工学部・准教授

研究者番号: 90051929

勝良 健史 (KATSURA TAKESHI)

慶應義塾大学・理工学部・講師

研究者番号: 50513298

### (3) 連携研究者

夏井 理恵 (NATSUI RIE)

日本女子大学・理学部・助教

研究者番号: 60398633