慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	閉曲面上のグラフにおける因子問題の研究
Sub Title	On factor problems in graph on surfaces
Author	藤沢, 潤(Fujisawa, Jun)
Publisher	
Publication year	2021
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2020.)
JaLC DOI	
Abstract	本研究の主な成果を以下に挙げる。１）閉曲面上の3-連結3-正則2部グラフにおいて、互いに距離が十分離れたマッチングが拡張的となることが示された。２）ハミルトンサイクルを持たない1-toughな平面の三角形分割における分離三角形について、Ozeki-Zamfirescuの提起した問題が肯定的に解決された。３）閉曲面上の5-連結三角形分割からいくつかの頂点を取り除いたグラフにおける完全マッチングの存在について、Kawarabayashi-Plummer-Ozekiの定理を一般化した定理・Aldred-Kawarabayashi-Plummerの定理の短い証明とそれを一般化した定理が得られた。 The following is the main part of the results obtained in this research. Firstly, it turned out that every 3-conncted 3-regular bipartite graph on a surface is distance matchable. Secondly, the problem concerning separating 3-cycles in non-hamiltonian 1-tough triangulation of the plane, posed by Ozeki and Zamfirescu, was solved in the affirmative. Thirdly, as for the existence of the perfect matchings in graphs obtained from 5-connected triangulation of a surface by deleting some vertices, we obtained a generalization of the theorem shown by Kawarabayashi, Plummer and Ozeki. Moreover, we obtaind a short proof and a generalization of the theorem shown by Aldred, Kawarabayashi and Plummer.
Notes	研究種目：基盤研究 (C) (一般) 研究期間：2017～2020 課題番号：17K05349 研究分野：グラフ理論
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_17K05349seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　６ 月　８ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2020
課題番号：１７Ｋ０５３４９

研究課題名（和文）閉曲面上のグラフにおける因子問題の研究

研究課題名（英文）On Factor problems in graph on surfaces

研究代表者
藤沢　潤（Fujisawa, Jun）

慶應義塾大学・商学部（日吉）・教授

研究者番号：００５１６０９９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の主な成果を以下に挙げる。１）閉曲面上の3-連結3-正則2部グラフにおいて、互いに距離が十分離れたマッチングが拡張的となることが示された。２）ハミルトンサイクルを持たない1-toughな平面の三角形分割における分離三角形について、Ozeki-Zamfirescuの提起した問題が肯定的に解決された。３）閉曲面上の5-連結三角形分割からいくつかの頂点を取り除いたグラフにおける完全マッチングの存在について、Kawarabayashi-Plummer-Ozekiの定理を一般化した定理・Aldred-Kawarabayashi-Plummerの定理の短い証明とそれを一般化した定理が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究では1993年にBroersmaが提起したハミルトンサイクルに関する予想、2018年にOzeki-Zamfirescuが提起した平面の三角形分割に関する問題の2つの未解決問題がいずれも肯定的に解決されたため、その学術的な意義は大きい。また、閉曲面上の5-連結グラフのマッチング拡張問題においてはいくつかの既存の結果が一般化されるとともに、これまでに三角形分割でしか得られていなかった結果を三角形分割でないグラフへと拡張することに成功し、得られる知見が格段に広がった。

研究成果の概要（英文）：The following is the main part of the results obtained in this research. Firstly, it turned out that every 3-conncted 3-regular bipartite graph on a surface is distance matchable. Secondly, the problem concerning separating 3-cycles in non-hamiltonian 1-tough triangulation of the plane, posed by Ozeki and Zamfirescu, was solved in the affirmative. Thirdly, as for the existence of the perfect matchings in graphs obtained from 5-connected triangulation of a surface by deleting some vertices, we obtained a generalization of the theorem shown by Kawarabayashi, Plummer and Ozeki. Moreover, we obtaind a short proof and a generalization of the theorem shown by Aldred, Kawarabayashi and Plummer.

研究分野：グラフ理論

キーワード：位相幾何学的グラフ理論　因子問題　完全マッチング　三角形分割

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

１．研究開始当初の背景

近年の情報科学の発展に伴って、グラフ理論研究の重要性は高まっている。その中で、３-連結３-正則平面グラフは四色問題をはじめとする多くの有名な予想がそれらに帰着されることや、fullerene と呼ばれる分子構造を表すグラフの族がそれらに含まれるという理由で、理論面・応用面の双方において重要なグラフの族であり、その構造の解明が大きな意味を持つ状況であった。

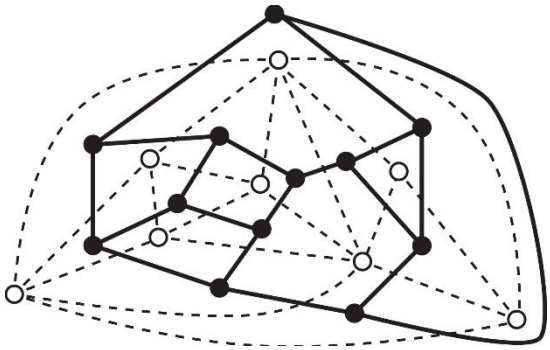

図１：３-連結３-正則平面グラフとその双対

２．研究の目的

四色問題や Barnette 予想など、３-連結３-正則平面グラフに関しては興味深い未解決問題が多く存在する。それらの問題の解決には、３-連結３-正則平面グラフにおける「性質のよい」因子の存在が鍵となる。そこで、３-連結３-正則平面グラフや、その双対となる平面の三角形分割、またそれらに密接に関連するグラフにおける因子問題に取り組むことで、上記の未解決問題の解決の糸口を見つける。

３．研究の方法

（１）グラフＧにおけるｍ辺からなるマッチングＭに対して、Ｍの全ての辺を含む完全マッチングが存在するとき、ＭはＧにおいて拡張的であるという。マッチング拡張性に関する研究は古くから行われており、多くの研究成果があるが、そのほとんどは拡張する辺の本数が元となるグラフの不変量によって制限されている。一方、近年「Ｇがグラフの族Ｘに含まれるならば、ある定数ｄに対して、Ｇにおける距離がｄ以上離れたマッチングが拡張的となる」という性質（距離拡張性）を満たすグラフの族Ｘを求める研究が進展している。この研究は、拡張する辺の本数に上限がないという点で既存のマッチング拡張の研究と一線を画す、新しい切り口での研究となっているものの、得られている研究成果はＸとして閉曲面上の三角形分割を対象とするものがほとんどであった。そこで本研究では、閉曲面上の三角形分割以外のグラフにおいて上記の族Ｘを調査した。

（２）上記のように、閉曲面上の三角形分割のマッチング拡張性については多くの知見が得られていた。そこで、閉曲面上の三角形分割において、マッチング拡張問題を一般化した問題に取り組んだ。

（３）クローフリーグラフやラインググラフにおける因子問題は、snark と呼ばれる３-正則グラフの構造と密接に関連している。本研究では、クローフリーグラフにおけるハミルトンサイクルの存在や性質のよい２-因子の存在について調査した。

（４）グラフの toughness は、因子問題において重要な鍵を握るグラフの不変量である。本研究では、１-tough であるにも関わらずハミルトンサイクルを持たない三角形分割の持つ構造について調査した。

４．研究成果

（１）閉曲面上の３-連結３-正則２部グラフＧにおいて、その最大の面の大きさをｄとする時、Ｇにおける距離がｄ以上離れたマッチングが拡張的となることが示された。また、平面・射影平面上の３-正則２部グラフＧにおいて、各辺ｅに対してｅ∈Ｅ(Ｃ_１)∩Ｅ(Ｃ_２)となる長さ６以下のサイクルＣ_１，Ｃ_２が存在するとき、Ｇにおける距離が６以上離れたマッチングが拡張的となることが示された。

（２）グラフＧにおけるm辺からなるマッチングMに対して、Mの各辺が誘導するＫ_２と同型なグラフをＨ_１，Ｈ_２，…，Ｈ_mとおく。このとき、MがＧにおいて拡張的であることと、ＧからＨ_１，Ｈ_２，…，Ｈ_mを取り除いたグラフが完全マッチングを持つことは同値である。後者の命題において各Ｈ_ｉをＫ_２と同型なものに限らず、一般的なグラフとすることで、閉曲面上の５-連結三角形分割における Kawarabayashi-Plummer-Ozeki の結果を一般化した定理が得られた。

（３）グラフＧにおけるm辺からなるマッチングMに対して、そのm辺が誘導するｍＫ_２と同型なグラフをＨとすると、MがＧにおいて拡張的であることと、ＧからＨを取り除いたグラフが完全マッチングを持つことは同値である。後者の命題において、ＨをｍＫ_２と同型なものに限らず、一般的なグラフとすることで、閉曲面上の５-連結三角形分割における Aldred-Kawarabayashi-Plummer の定理の短い証明を与えるとともに、その定理を一般化することに成功した。

（４）2018 年の論文で Ozeki と Zamfirescu によって「ハミルトンサイクル(=成分数１の２-因子)を持たない１-tough な平面の三角形分割で、どの二つの分離三角形も頂点を共有しないものは存在するか」という問題が提起された。本研究では、その問題を肯定的に解決し、解となるグラフの無限系列を得た。

（５）次数列が３，３，３，１，１，１であるグラフを net と呼び、net における次数１の頂点を端点と呼ぶ。1993 年に Broersma は「頂点数がｎの２-連結クローフリーグラフにおいて、任意の誘導 net のどの端点も次数が(ｎ－２)/３以上であればＧはハミルトンサイクルを持つ」と予想した。本研究では、その予想が肯定的に解決された。

（６）Kaiser と Vrana によって、５-連結で最小次数６以上のラインググラフはハミルトンサイクルを持つことが示されていた。本研究では、同様のグラフにおいて頂点数がｋに対して十分に大きい場合、成分数ｋの２-因子が存在することが示された。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計7件（うち査読付論文　7件／うち国際共著　4件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 J. Fujisawa, C. T. Zamfirescu	４．巻 284
２．論文標題 Non-hamiltonian 1-tough triangulations with disjoint separating triangles	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Discrete Applied Mathematics	６．最初と最後の頁 622-625
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.dam.2020.03.053	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 J. Fujisawa, H. Seno	４．巻 95
２．論文標題 Edge proximity and matching extension in projective planar graphs	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Journal of Graph Theory	６．最初と最後の頁 341-367
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/jgt.22559	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 R. E. L. Aldred,　J. Fujisawa,　A. Saito	４．巻 93
２．論文標題 Distance matching extension and local structure of graphs	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Journal of Graph Theory	６．最初と最後の頁 5-20
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/jgt.22465	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 J. Fujisawa, K. Segawa, Y. Suzuki	４．巻 34
２．論文標題 The matching extendability of optimal 1-planar graphs	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Graphs and Combinatorics	６．最初と最後の頁 1089-1099
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00373-018-1932-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 R. E. L. Aldred, J. Fujisawa, A. Saito	4．巻 90
2．論文標題 Pairs and triples of forbidden subgraphs and the existence of a 2-factor	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Journal of Graph Theory	6．最初と最後の頁 61-82
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/jgt.22368	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 R.E.L. Aldred、 J. Fujisawa、A. Saito	4．巻 340
2．論文標題 Edge proximity and matching extension in punctured planar triangulations	5．発行年 2017年
3．雑誌名 Discrete Mathematics	6．最初と最後の頁 2978-2985
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2017.07.017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Chiba Shuya、Fujisawa Jun、Furuya Michitaka、Ikarashi Hironobu	4．巻 24
2．論文標題 Forbidden pairs with a common graph generating almost the same sets	5．発行年 2017年
3．雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6．最初と最後の頁 Paper P2.13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 0件／うち国際学会 4件）

1．発表者名 R.E.L. Aldred, 藤沢 潤
2．発表標題 閉曲面上のグラフにおけるマッチング拡張問題の一般化
3．学会等名 日本数学会 2021年度年会
4．発表年 2021年

１．発表者名 藤沢　潤
２．発表標題 ハミルトンサイクルを持たない 1-tough な三角形分割とその分離三角形
３．学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA-2019)
４．発表年 2019年

１．発表者名 千葉　周也, 藤沢　潤
２．発表標題 A proof of Broersma's conjecture on Hamiltonicity of claw-free graphs
３．学会等名 2019年度応用数学合同研究集会
４．発表年 2019年

１．発表者名 Jun Fujisawa
２．発表標題 Induced Nets and Hamiltonian Cycles in Claw-free Graphs
３．学会等名 Bucharest Graph Theory Workshop on How to Span a Graph（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 藤沢　潤, R.E.L. Aldred, 斎藤　明
２．発表標題 3-正則グラフにおけるdistance matchable なグラフのクラスについて
３．学会等名 離散数学とその応用研究集会2018
４．発表年 2018年

１．発表者名 Jun Fujisawa
２．発表標題 On distance matching extension in graphs
３．学会等名 2018 SCMS Workshop on Extremal and Structural Graph Theory（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 藤沢　潤, C. T. Zamfirescu
２．発表標題 ハミルトンサイクルを持たない1-tough な三角形分割とその分離三角形について
３．学会等名 日本数学会　2019年度年会
４．発表年 2019年

１．発表者名 Jun Fujisawa
２．発表標題 Induced nets and hamiltonicity of claw-free graphs
３．学会等名 CXL Workshop（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 藤沢　潤
２．発表標題 Distance matching extension in cubic bipartite graphs
３．学会等名 日本数学会 2018年度年会
４．発表年 2018年

１．発表者名 Jun Fujisawa
２．発表標題 Edge proximity condition and matching extension in cubic bipartite graphs
３．学会等名 The 5th Taiwan-Japan Conference on Combinatorics and its Applications（国際学会）
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ニュージーランド	University of Otago			
ベルギー	Ghent University			