慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	変分解析を中心とした非線形楕円型方程式の解構造の研究
Sub Title	Nonlinear elliptic partial differential equations having variation structure
Author	生駒, 典久(Ikoma, Norihisa)
Publisher	
Publication year	2019
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2018.)
JaLC DOI	
Abstract	本課題では偏微分方程式の１種である非線形楕円型方程式 (連立系) に対し，その方程式に解が存在するのか，また存在したとすればどのような性質を持つのかについて研究を行った．特に変分構造を持つ方程式 (楕円型作用素の分数冪作用素を含む方程式など) を中心に調べ，ある特定の性質を持った解の構成や解が多重に存在することなどを示すことに成功した．また非線形楕円型方程式と深い関係を持つ関数不等式についても研究を行い，不等式を等式として満たす関数が存在するか，という問に対する解答を与えた． In this project, the existence of solutions and their properties were studied for nonlinear elliptic partial differential equations. In particular, we treated equations which have variational structure (for instance, equations with fractional operators of elliptic operators). We proved the existence of solutions satisfying some properties and showed the existence of multiple solutions. We also studied a variant of the Trudinger-Moser inequality and found conditions when the inequality is satisfied as an equality. This inequality is related to a certain nonlinear elliptic partial differential equation.
Notes	研究種目：若手研究(B) 研究期間：2016～2018 課題番号：16K17623 研究分野：偏微分方程式
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_16K17623seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ５ 月 ２８ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１７６２３

研究課題名（和文）変分解析を中心とした非線形楕円型方程式の解構造の研究

研究課題名（英文）Nonlinear elliptic partial differential equations having variation structure

研究代表者
生駒　典久（Ikoma, Norihisa）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・准教授

研究者番号：５０７２８３４２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：本課題では偏微分方程式の１種である非線形楕円型方程式(連立系)に対し，その方程式に解が存在するのか，また存在したとすればどのような性質を持つのかについて研究を行った．特に変分構造を持つ方程式(楕円型作用素の分数冪作用素を含む方程式など)を中心に調べ，ある特定の性質を持った解の構成や解が多重に存在することなどを示すことに成功した．また非線形楕円型方程式と深い関係を持つ関数不等式についても研究を行い，不等式を等式として満たす関数が存在するか，という問に対する解答を与えた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
分数冪作用素を含む方程式に対する成果は，既存研究の結果を拡張し，その証明はこれまでの議論を整理し，様々な場合を統一的に扱えるようにするものである．また，他のテーマの成果は，更なる研究を誘発する研究成果や既存研究の枠組みに収まらないものであり，これらの成果を得るために新たな手法を開発した．このようなことから本研究成果は学術的に意義があるものである．

研究成果の概要（英文）：In this project, the existence of solutions and their properties were studied for nonlinear elliptic partial differential equations. In particular, we treated equations which have variational structure (for instance, equations with fractional operators of elliptic operators). We proved the existence of solutions satisfying some properties and showed the existence of multiple solutions. We also studied a variant of the Trudinger-Moser inequality and found conditions when the inequality is satisfied as an equality. This inequality is related to a certain nonlinear elliptic partial differential equation.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：非線形楕円型方程式　最小化問題　最大化問題　特異摂動問題　幾何解析　臨界点理論

様　式　Ｃ－19、Ｆ－19－1、Ｚ－19、ＣＫ－19（共通）

1. 研究開始当初の背景

非線形楕円型方程式(連立系)は物理学等の様々な分野において現れ，現象の定常状態を記述している．また変分構造を持つ非線形楕円型方程式(連立系)に制限したとしても，それらの多くが物理学等において登場している．しかしながら，一般的に方程式の解を具体的な形として書き下すことはできない．このため，非線形楕円型方程式(連立系)の解の存在を示すこと自体が興味深い問題である．また，方程式(連立系)の解の陽的な表示を得ずに，解の性質(正値性や対称性など)を導き出すことも重要な問題である．

臨界点理論(変分法)は非線形楕円型方程式(連立系)の解構造を調べる強力な方法の１つであり，多くの研究者により理論が発展，整備されてきた．しかしながら変分構造を持つ全ての非線形楕円型方程式に対し適用できる理論を構築することはほぼ不可能である．それ故，個々の非線形楕円型方程式の特性を理解し，それらの特性に合わせた理論を適用，または発展させることが求められてきた．

2. 研究の目的

本研究の目的は非線形楕円型方程式(連立系)の解の存在やその性質(解構造)を明らかにすることにある．上述したように，全ての非線形楕円形方程式(連立系)を取り扱えるような理論を構築することは不可能なため，方程式の種類をある程度絞り，解構造を調べる．具体的には，Laplacian や分数冪作用素を含む方程式(連立系)の解構造の解明，Willmore 型曲面の存在等を考察する．ここでは，いわゆる Sobolev 劣臨界および Sobolev 臨界両方の場合を扱う．なお，これらの方程式(連立系)を解析し理論を構築する際，一般的に扱えるものは，できるだけ一般化するように努め，非線形楕円型方程式(連立系)の性質を明らかにすることも目的とする．

3. 研究の方法

研究の目的欄に記述した課題は変分構造を持っており，方程式(連立系)に対応するエネルギー汎関数を持っている．したがってこのエネルギー汎関数の臨界点を見つけることができれば，その方程式の解を得られるが，臨界点理論を直接適用して，すぐに臨界点を見つけることはできない．そこで個々の方程式の構造を用い，既存の臨界点理論を組み合わせることによって解の存在やその性質を調べる．本研究課題では次のテーマについて研究を実施し，非線形楕円型方程式の解構造を明らかにすることに取り組んだ：

(1) 分数冪作用素と一般非線形反応項を伴う方程式.
(2) Trudinger-Moser 型不等式に伴う最大化元の存在問題.
(3) ３次元 Riemann 多様体における Willmore 型曲面の存在問題.
(4) Sobolev 劣臨界型と Sobolev 臨界型の非線形反応項が含まれる方程式.
(5) 質量制約条件を課した下でのエネルギー最小化問題.
(6) 対数型非線形反応項を伴う特異摂動問題，特に spike 解と呼ばれる解の存在問題.

なお，(2)，(3)，(5)では非線形楕円型方程式との関連性が明らかでないように見えるが，これらのテーマは非線型楕円形方程式を解くことに帰結されたり，方程式を解く際の重要なツールになることに注意し，研究を実施した．

4. 研究成果

(1) 楕円型作用素の分数冪作用素と一般的な非線形反応項を伴う方程式の解析を行った．得られた(証明した)研究成果は次の通りである：

① 弱解と呼ばれる解の減衰評価.
② 球対称解および非球対称解が可算無限個存在すること.

①については，既に出版されていた論文の証明に間違いがあることに気づき，修正を行い，間違いを正すことができた．②については，近年，非球対称解の存在が注目を集めてきているが，本研究成果でも非球対称解の多重存在性を示すことができた．更に証明方法についても，一般化することに成功した．その結果，球対称，非球体称解の多重存在を，統一的な観点から捉えられるようになり，また既存研究の結果に対しても別証明を与えることができた．

(2) 本テーマは，大阪大学の石渡道徳氏，金沢大学の和田出秀光氏と共同研究の成果であり，Trudinger-Moser 不等式と呼ばれる関数不等式の制約条件を一般化したものを考察した．特に，関数不等式を等式として満たす関数が存在するか，という問に対し，制約条件の課し方が強い影響を与えること，またその影響の与え方を明らかにすることができた．その結果，不等式を等式として満たす関数が存在する場合，存在しない場合を考察することができた．近年これらの問は活発に研究され，他のタイプの不等式に対しても解析が進んでいる．本結果はこの研究の流れに沿うものであり，ここで用いた解析手法は，ある非線形楕円型方程式に対する近似列の収束問題等に応用できる可能性がある．

(3) 本テーマは Scuola Normale Superiore の Andrea Malchiodi 氏と Warwick 大学の Andrea Mondino 氏との共同研究であり，曲面に対して定義される Willmore 汎関数を３次元 Riemann 多様体上で考える．この汎関数に対し，曲面積一定という制約条件を与えた下，汎関数の臨界点となる球面型の曲面(Willmore 型曲面と呼ぶ)の存在は示すことができていたが，Riemann 多様体のスカラー曲率が非退化臨界点を持つ場合，その点の周りが球面 Willmore 型曲面で覆い尽く

されることまで証明することができた．ここで Willmore 型曲面を見つけることは，ある４階の非線形楕円型方程式の解を見つけることと同値になっている．ある点の周りを特別な性質を持つ曲面で覆い尽くせるかということは平均曲率一定曲面の場合に示されていた．したがって本成果は Willmore 型曲面の場合に示したことになるが,平均曲率一定曲面は２階の非線形楕円型方程式を解くことに対応し，Willmore 型曲面の場合は４階の非線形楕円形方程式を解くことに対応しているという違いがある．また，ここで得られた成果と同様の結果を，異なる手法によりドイツの研究者グループも独立に証明している．

(4) 本テーマは，静岡大学の赤堀公史氏，Victoria 大学の Slim Ibrahim 氏，津田塾大学の菊池弘明氏，明治大学の名和範人氏との共同研究である．主要項が Laplacian，非線形反応項としては Sobolev の意味で劣臨界冪乗項と臨界冪乗項の和になっているものを考える.さらに，非線形反応項の符号としては両方とも吸引的である場合を考察した．得られた成果は，振動数パラメーターが非常に大きく，５次元以上のとき，基底状態解と呼ばれる方程式の解の中でも最も基本的な正値解が，平行移動を除き，一意的かつ非退化であるというものである．非線形反応項が単独の冪乗型である場合,正値解の一意性や非退化性はよく調べられている.しかし，吸引的な冪乗型非線形項が２つ以上ある場合では，同様のことを示そうとすると困難になり，正値解の一意性や非退化性はあまり知られていない．本成果は，５次元以上かつ基底状態解に絞ってはいるが，この困難な場合に一意性と非退化性を示すことができた．また，基底状態解の一意性と非退化性は，正値解の一意性と非退化性へ向けたステップとみなすことができ，今後の研究につながるものである．

(5) 本テーマは東京大学の宮本安人氏との共同研究であり，ポテンシャル付きの非線形シュレディンガー方程式に対し，質量一定という制約条件を課し，系のハミルトニアンを最小化する関数(最小化元)が存在するかを考察した．そして，全ての最小化列は適切な部分列を取れば収束すること，またその結果，考察している最小化問題の最小化元の存在を示すことに成功した．この最小化元はある非線形シュレディンガー方程式の解となっている．既存の研究では，ポテンシャル関数がない場合が多く考察されており，ポテンシャル関数がある場合は非線形反応項にある程度の制限がかかっていた．本成果では，ポテンシャル関数の効果を考えていること，また冪乗型ではなく，一般的な非線形反応項を扱っていることに特徴がある．これらの結果については現在論文として纏め，学術雑誌に投稿中である．さらに非線形連立シュレディンガー方程式系に対しても同様の問題を考察した．こちらの成果についても現在論文として纏めている段階である．

(6) 本テーマは早稲田大学の田中和永氏，Utah 州立大学および福建師範大学の Zhi-Qiang Wang 氏，中国科学院の Chengxiang Zhang 氏との共同研究である．対数型非線形反応項を伴う非線形シュレディンガー方程式に対する特異摂動問題を扱った．本問題で考えるポテンシャル関数は，下に非有界なものであり，いくつかの点で負の無限大に発散しているものである．得られた研究成果では，ポテンシャル関数が負の無限大になっている点の周りに spike 状に成長する解が存在することを示した．昨今，対数型非線形反応項を含む方程式が多く取り扱われているようになってきたが，ポテンシャル関数は下に有界なものを考えている．一方，本問題では有限個の点において負の無限大になるポテンシャル関数を扱っており,既存の研究と異なる．実際，本成果で得られた spike 解の形状は，既存研究で得られてきた形状と異なっている．また，本研究は劣線形反応項と下に非有界なポテンシャル関数を伴う特異摂動問題の出発点となるようなものであり，更なる研究を促進するものである．なお，本成果については論文として纏め，学術雑誌に投稿中である．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計５件)

① T. Akahori, S. Ibrahim, N. Ikoma, H. Kikuchi and H. Nawa, Uniqueness and nondegeneracy of ground states to nonlinear scalar field equations involving the Sobolev critical exponent in their nonlinearities for high frequencies. Calculus of Variations and Partial Differential Equations(掲載決定), 査読有.

② N. Ikoma, A. Malchiodi and A. Mondino, Foliation by area-constrained Willmore spheres near a non-degenerate critical point of the scalar curvature. International Mathematics Research Notices (IMRN)(採録決定), 査読有, https://doi.org/10.1093/imrn/rny203.

③ N. Ikoma, M. Ishiwata and H. Wadade, Existence and non-existence of maximizers for the Moser-Trudinger type inequalities under inhomogeneous constraints. Mathematische Annalen,査読有, Vol.373, no.1-2, 2019, 831-851, https://doi.org/10.1007/s00208-018-1709-5.

④ P. Felmer and N. Ikoma, Existence and nonexistence of positive solutions to some fully nonlinear equation in one dimension. Journal of Functional Analysis, 査読有, Vol.275, no.8, 2018, 2162-2196, https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.07.009.

⑤ N. Ikoma, Erratum to: Existence of solutions of scalar field equations with fractional operator. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 査読有, Vol.19, no.2, 2017, 1649-1652. https://doi.org/10.1007/s11784-017-0427-z.

〔学会発表〕(計 17 件)

① N. Ikoma, Existence of foliation by area-constrained Willmore spheres, リーマン幾何と幾何解析(筑波大学), 2019.
② N. Ikoma, Existence of infinitely many solutions to fractional scalar field equation, the 3rd Meeting of Young Researchers in PDEs, 2018.
③ N. Ikoma, Existence of infinitely many solutions to equations with fractional Laplacian in the zero mass case, Mini Workshop on Variational Problems, 2018.
④ N. Ikoma, Uniqueness and nondegeneracy of ground states to scalar field equation involving critical Sobolev exponent, 応用解析セミナー(東京大学), 2018.
⑤ N. Ikoma, Existence of infinitely many solutions for equation with fractional Laplacian in the zero mass case, The 12th AIMS Conference, SS60: Recent trends in nonlocal nonlinear PDEs, 2018.
⑥ N. Ikoma, ２つの制約条件を持つ最小化問題の可解性,応用数学セミナー(東北大学), 2018.
⑦ N. Ikoma, Uniqueness and nondegeneracy of ground states to nonlinear Schroedinger equations, UK-Japan Workshop on Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations, 2018.
⑧ N. Ikoma, Uniqueness and nondegeneracy of ground states to scalar field equations, Workshop on Harmonic analysis and Nonlinear Evolution Equations, 2018.
⑨ N. Ikoma, A minimizing problem with two constraint conditions, seminar at Scuola Normalre Superiore di Pisa, 2017.
⑩ N. Ikoma, The existence of solutions of equations with fractional operators, seminar at Karlsruhe Institute of Technology, 2017.
⑪ N. Ikoma, On minimizing problem related to a coupled nonlinear Schroedinger system, PRIMA2017 Nonlinear Elliptic PDEs and Systems, 2017.
⑫ N. Ikoma, Existence of nontrivial solutions for equations with fractional operator, International Conference on Elliptic and Parabolic Problems, 2017.
⑬ N. Ikoma, Existence of positive solution for some nonlinear elliptic equation, HMA セミナー・冬の研究会 2017(広島大学), 2017.
⑭ N. Ikoma, Trudinger-Moser 型不等式に関わる最大化問題の可解性, 非線型現象の数理解析(大阪大学), 2016.

〔その他〕
ホームページ等
https://sites.google.com/site/norihisaikoma/home

６. 研究組織

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。