慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	応用解析としての非線形問題の研究
Sub Title	Applied analysis for nonlinear problems
Author	曽我, 幸平(Soga, Kōhei)
Publisher	
Publication year	2019
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2018.)
JaLC DOI	
Abstract	(1) Hamilton力学系とHamilton-Jacobi方程式について、弱KAM理論の観点から研究した。弱KAM理論で重要な役割を果たすdiscount近似されたHamilton-Jacobi方程式に対して、弱KAM理論に類似の理論を構築すると同時に、それを用いてdiscount項を 0 にする極限の定量的解析を行った。また、差分近似されたHamilton- Jacobi方程式に対して同様の理論を構築する上で必要となる数学的道具を整備した。 (2) 圧縮性流体の二相問題について、最大正則性原理に基づく数学解析を行った。また、非圧縮性流体に対する数値解析的方法の提案とその収束証明を行った。 (1) We studied Hamiltonian dynamics and Hamilton-Jacobi equations in terms of weak KAM theory. We formulated a version of weak KAM theory for discounted Hamilton-Jacobi equations and applied it to quantitative analysis of the vanishing discount limit. We also prepared necessary mathematical concepts in order to construct a version of weak KAM theory for discretized Hamilton-Jacobi equations. (2) We did mathematical analysis on two phase flows of compressible fluids in terms of the maximal regularity. We also presented a numerical method of incompressible fluids and proved its convergence.
Notes	研究種目：若手研究 (B) 研究期間：2015～2018 課題番号：15K21369 研究分野：力学系・非線形偏微分方程式・数値解析
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_15K21369seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ２１３６９

研究課題名（和文）応用解析としての非線形問題の研究

研究課題名（英文）Applied analysis for nonlinear problems

研究代表者
曽我　幸平（SOGA, Kohei）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・専任講師

研究者番号：８０６２０５５９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：(1) Hamilton力学系とHamilton-Jacobi方程式について、弱KAM理論の観点から研究した。弱KAM理論で重要な役割を果たすdiscount近似されたHamilton-Jacobi方程式に対して、弱KAM理論に類似の理論を構築すると同時に、それを用いてdiscount項を０にする極限の定量的解析を行った。また、差分近似されたHamilton-Jacobi方程式に対して同様の理論を構築する上で必要となる数学的道具を整備した。

(2) 圧縮性流体の二相問題について、最大正則性原理に基づく数学解析を行った。また、非圧縮性流体に対する数値解析的方法の提案とその収束証明を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
(1) discount近似および差分近似されたHamilton-Jacobi方程式に対して弱KAM理論の枠組みを与えることで、同研究分野の理論的・数値解析的方法のさらなる発展に貢献した。

(2) 自由境界を持つNavier-Stokes方程式の厳密な数学解析行うと同時に、流体力学における数値計算の数学的正当性を保証する理論を構築することで、同研究分野の理論的・数値解析的方法のさらなる発展に貢献した。

研究成果の概要（英文）：(1) We studied Hamiltonian dynamics and Hamilton-Jacobi equations in terms of weak KAM theory. We formulated a version of weak KAM theory for discounted Hamilton-Jacobi equations and applied it to quantitative analysis of the vanishing discount limit. We also prepared necessary mathematical concepts in order to construct a version of weak KAM theory for discretized Hamilton-Jacobi equations.

(2) We did mathematical analysis on two phase flows of compressible fluids in terms of the maximal regularity. We also presented a numerical method of incompressible fluids and proved its convergence.

研究分野：力学系・非線形偏微分方程式・数値解析

キーワード：Hamilton力学系　Hamilton-Jacobi方程式　粘性解　弱KAM理論　Navier-Stokes方程式　最大正則性　Leray-Hopfの弱解　差分法

1. 研究開始当初の背景

非線形問題の研究において、強い非線形性に耐えうる解析方法を構築すると同時に非線形性固有の事象を具体的に明らかにすることは非常に需要な課題である。既存の理論解析だけでは限界が有り、数値解析的アプローチも必要となる。数値解析的方法を厳密な数学として開発し、計算機の援用も交えて、

(1) 保存則方程式(CL)/Hamilton-Jacobi方程式(HJ)/Hamilton力学系(HS) の相互補完的研究、

(2) 流体現象の数理モデリングとその数学解析/数値解析に関する研究、

を進めた。

(1)の背景: CL/HJは連続体力学や最適制御理論などの諸分野でよく現れる。これらの局所的古典解は「特性曲線の方法」で得られる。ここにHSが現れる。CL/HJは大域的古典解を一般には持ち得ないため、「エントロピー解/粘性解」と呼ばれる弱解のクラスで研究される。近年では、解の長時間挙動や解の成す空間の詳細な解析あるいは数値解析的方法の開発などが中心的課題である。HSは散逸の無い力学系の代表例であり古くから研究されている。その中心的課題は、個々の軌道の運動を特徴付ける(“レギュラー”、 “カオス”)と同時に、これらの軌道が複雑に分布した相空間の大域的構造(不変トーラスの有無など)を明らかにすることである。可積分な HS の相空間は不変トーラスで埋め尽くされ,運 動は全てレギュラーである。Kolmogorov (‘54)-Arnold (‘63)-Moser (‘62) の著しい結果「古典 KAM 理論」は、可積分なHS に非可積分な摂動を加えても、摂動が小さい限り、不変トーラス(KAMトー ラス)が測度的に多数存在することを保証する。非可積分な摂動が大きくなると不変トーラスは消滅しカオス運動が広がっていくことが数値計算で容易に確認される。しかしその詳細な数学解析は発展途上である。Fathi氏の「弱KAM理論(‘97)」は、「不変トーラスの存在」と「CL/HJの大域的古典解の存在」の同等性に注目し、常に存在が保証されるCL/HJの大域的弱解とHSの関連を明らかにした。弱KAM理論は、摂動問題であるか否かによらず、不変トーラスを一般化した概念である「Aubry-Mather集合」が存在することを主張する。弱KAM理論は,「特性曲線の方法」の一般化としてCL/HJの解析に大きく貢献する。古典KAM理論と弱KAM理論は基本的に独立しており、両者を結びつける結果は無い。CL/HJの数値解析は、弱KAM理論への応用の観点からも、重要なテーマである。研究代表者は、弱KAM理論の数値解析的方法を既存の差分法の議論の拡張として構築し、HSの相空間のカオス領域に潜む複雑な構造を可視化した。しかし「特性曲線の近似」が不可能なことなど限界が有る。そこで研究代表者は、確率論および変分法に基づく全く新しい方法を差分法の安定性/収束に関する議論に取り入れ、従来の差分法で「CL/HJ/特性曲線を同時に近似できること」を空間 1 次元問題に対して示した。これは数値粘性による拡散効果を持つ差分方程式をランダムウォークとその双曲型スケール極限で現れる大数の法則によって特徴づけるものであり、Fleming(‘69) に始まる放物型方程式を確率過程で特徴づける方法のアナロジーである。これによって、粘性解理論に似た議論を差分Hamilton-Jacobi方程式に対して展開することが可能となり、差分法に関する数学解析を本質的に拡張させた他、弱KAM理論の近似理論を構築する基礎を与えた。このような背景を踏まえて、本研究課題(1)が計画された。

(2)の背景: 流体数学では、平衡状態から離れて非線形性が支配的になる状況に関する数学解析はあまり進んでいない。また、自由表面問題で流体がちぎれるような状況(しぶき)は、非常に素朴な現象でありながら、数学解析はほぼ皆無である。さらに、相転移や化学反応などを伴う問題に対しては、解くべき方程式系すら定かでない場合が多い。液体中の気泡がガス成分の溶解/分離によって伸縮する現象は、相転移を伴う二相流体の自由表面問題としてモデリングされる。そこでは、液相/気相の自由境界面を介した構成物質の行き来(相転移)を境界面の曲率の効果も考慮して熱力学的に厳密に定式化すると同時に、混合物が満たすべき基礎方程式を熱力学の基本原理 (エネルギー散逸/エントロピー非減少)に沿うよう定式化することが重要である。このような議論の物理学的基礎がBothe-Dreyer(‘14) によって与えられた。研究代表者は、 Bothe 氏とともに、炭酸水などを念頭に置いた二相流体の自由表面問題の数理モデリングを行った。また、ここで得られた方程式系の可解性(適切性)を証明する第一歩として、柴田氏及び久保氏とともに、非圧縮性-圧縮性流体からなる二相流のモデル問題に関する数学解析を行った。泡の現象では、泡の生成/消滅/上昇/合体など、位相が変わるような激しい運動を伴う。このような流体の激しい運動を直接数値シミュレーションする画期的な方法として、粒子法の一種である「MPS 法」がKoshizuka-Oka (‘96) によって提案され、ポンプや内燃機関における流体の運動などを含む極めて広範な流体現象のシミュレーションに応用されている。しかしながら、MPS法に対する収束証明/誤差評価などの数学的基礎は与えられていない。このような背景を踏まえて、本研究課題(2)が計画された。

2. 研究の目的

本研究期間を通して、主に以下の項目について、その周辺の問題及び準備的課題について解明することを目的とした。

① 差分法に基づいた弱KAM理論の数値解析的方法の構築とHSの計算機援用解析: 差分法の確率論変分法的取り扱いの整備・拡張; 弱KAM理論の構造そのものの差分近似; 収束証明; 誤差評価; Aubry-Mather集合とそれに付随した安定/不安定集合などの数値計算; 相空間の構造の可視化; 構造のパラメータ依存性; 粘性近似あるいはdiscount近似に対する同様の問題
② 古典KAM理論・弱KAM理論の関連性の解明: 一方から他方の導出; 古典KAM理論から弱KAM理論への移行; 両理論の拡張
③ 研究目的(1)に基づいたCL/HJ(単独, 連立)の解析: 解の長時間挙動における収束先(周期解)の多重性と初期値の関係; 差分法による周期解の近似とその収束の際に現れる選択問題; カオス的漸近挙動(乱流)の有無; 粘性近似あるいはdiscount近似に対する同様の問題
④ 流体現象の数理モデリングとその解析: rational mechanicsに基づくモデリング; 可解性の証明; 数値解析
⑤ 流体力学における数値解析的方法(例えば差分法, MPS法など)に対する数学理論の構築: 収束証明/誤差評価; 他の近似法との比較; 数値解析的方法に基づく流体方程式系の解の構成的存在証明

3. 研究の方法

研究代表者が、本研究に関わる近似理論の構築・その援用(理論/計算機)・理論解析へのフィードバックについて全体を見通しつつ遂行した。研究課題(1)、(2)を並行して進め、相互補完できる部分は最大限活用した。差分法の確率論変分法的取り扱いを基本としてCL/HJ/弱KAM理論の近似理論を構築し、計算機援用解析も行った。その結果も参考にしつつ弱KAM理論と古典KAM理論の統合に取り組んだ。数理モデリングを通して解析すべき方程式系を明確にし、数学解析/数値解析へと進んだ。既存の近似法および研究代表者が得た差分法に関する一連の結果も参考にしつつ、流体力学における数値解析的方法に関する数学理論を構築し援用した。

4. 研究成果

研究課題(1)に関する成果: Hamilton-Jacobi方程式の粘性解理論及び弱KAM理論で重要な役割を果たす近似方法として、粘性近似法、差分近似法、discount近似法が知られている。差分近似に関して論文[1]を、discount近似について論文[2]を得た。

論文[2]では、discount近似されたHamilton-Jacobi方程式とそれに付随する摩擦項のついたHamiltonian/Lagrangian力学系に対する弱KAM理論を構築し、それを応用して、近似の収束率について議論した。また、discount近似の測度論的な側面も明らかにした。これらは、discount近似に関してなされた最初の定量的解析結果である。また、弱KAM理論の構造を保ちながら、それに類似の理論を構築したことは、粘性近似法及び差分近似法に対して同様の研究を行う際に重要な指針となる。

論文[1]では、論文[2]と同様の解析を差分近似されたHamilton-Jacobi方程式に対して行う上で必須となる概念及び数学的道具を整備した。そこでは、空間1次元問題について研究代表者が開発した方法を、一般の空間次元の問題に拡張した。これにより、真のHamilton-Jacobi方程式の粘性解/その微分/その特性曲線を同時に近似することが可能となった。また、弱KAM理論で重要な役割を果たすLax-Oleinik型作用素の類似物も得られた。以上の道具を用いて離散Hamilton-Jacobi方程式に対する弱KAM理論を構築する研究が現在進行中である。

論文にまとめる段階には至っていないが、古典KAM理論の方法にdiscount近似の方法を取り入れることで、いわゆる「小分母の問題」をこれまでにない手法で処理する着想も得た。これは古典KAM理論と弱KAM理論をつなげる研究を進める基礎となり得る。

研究課題(2)に関する成果: 2つの圧縮性粘性流体からなる二相流のモデル方程式系に関して、その初期値問題の可解性に関する論文[3]をえた。また、非圧縮性粘性流体の数値解析的方法に関して本節最後に記載したプレプリントを得た。

論文[3]では、厚み0の自由境界でつながった2つの圧縮性Navier-Stokes方程式をLagrange変換によって固定境界の問題に変換し、最大正則性理論に基づいて時間局所解の一意存在を証明した。

プレプリントでは、論文[3]で行われたような線形解析に基づく解の存在証明とは異なり、非線形問題を直接解く数学的方法を発展させた。そこでは、3次元有界領域上の非圧縮性Navier-

Stokes方程式を差分法によって直接離散化し、Helmholts-Hodge分解を格子空間上の関数に対して定式化することを通してLeray-Hopfの弱解を構成した。また、離散問題の収束に関して、L^2-弱収束からL^2-強収束を示す新たな方法を提案した。これらの結果を二相流の問題に適用し、Lagrange変換で固定境界問題に変化することなく、自由境界問題を直接解く方法を現在考案中である。プレプリントの結果は、流体力学における数値解析的方法を発展させる上で、基本となるものである。

プレプリント: Hidesato Kuroki and Kohei Soga, On convergence of Chorin's projection method to a Leray-Hopf weak solution, arXiv:1809.04383 (投稿中).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 3 件）

[1] Kohei Soga, Stochastic and variational approach to finite difference approximation of Hamilton-Jacobi equations, Mathematics of Computation (掲載決定). 査読有

[2] Hiroyoshi Mitake and Kohei Soga, Weak KAM theory for discounted Hamilton-Jacobi equations and its application, Calculus of Variations and Partial Differential Equations (2018) 57:78. 査読有

[3] Takayuki Kubo, Shibata Yoshihiro and Kohei Soga, On some two phase problem for compressible and compressible viscous fluid flow separated by sharp interface, Discrete and Continuous Dynamical Systems **36** No. 7 (2016), pp. 3741-3774. 査読有

〔学会発表〕（計 15 件）

[1] Kohei Soga, A Finite Difference Method in Hamilton-Jacobi Equations and Weak KAM Theory, 12th AIMS Conference in Taipei, Taiwan, 2018.7.5.

[2] Kohei Soga, On convergence of Chorin's projection method to a Leray-Hopf weak solution -Bounded Lipschitz domain case-, Conference on Mathematical Fluid Dynamics Bad Boll, Germany, 2018.5.7.

[3] Kohei Soga, On convergence of Chorin's projection method to a Leray-Hopf weak solution, 第15回日独流体数学国際研究集会, 早稲田大学, 2018.1.9.

[4] Kohei Soga, Selection problems of periodic entropy solutions and viscosity solutions, Classic and Stochastic Geometric Mechanics, UK-Japan Winter School, Imperial College London, 2016.1.4.

[5] Kohei Soga, Local well-posedness and global well-posedness of two-phase flows: compressible-compressible case, RIMS研究集会「非圧縮性粘性流体の数理解析」, 京都大学数理解析研究所, 2015.11.18.

[6] Kohei Soga, Numerical methods of weak KAM theory, DYNAMICS, TOPOLOGY AND COMPUTATIONS, Bedlewo, Poland, 2015.6.19.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）
○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
無し

6．研究組織

(1)研究分担者　　無し
(2)研究協力者　　無し

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。