慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	長距離相互作用系の確率解析
Sub Title	Stochastic calculus for systems with long range interaction
Author	種村, 秀紀(Tanemura, Hideki)
Publisher	
Publication year	2019
Jtitle	科学研究費補助金研究成果報告書 (2018.)
JaLC DOI	
Abstract	近年の長田氏との共同研究により、長距離相互作用をもつ拡散型無限粒子系に対して、無限次元確率微分方程式に対する解の存在と一意性を導いた。この拡散系の結果を飛躍型無限粒子系(江崎氏との共同研究)、および無限剛体球系に対して一般化することに成功した。無限次元確率微分方程式の一意性の応用として、対応するディリクレ形式の一意性を導いた（長田氏、河本氏との共同研究）Rahul Roy 氏との共同研究により、ユークリッド空間上に中心がポアッソン配置されたstick の繋がりから定まる浸透模型を導入し、stick の方向分布とクラスターの形状の関連を調べ、ある種の相転移現象を導いた。 We studied infinite dimensional stochastic differential equations (ISDEs) representing infinite particles systems with long range interaction. We proved the existence and uniqueness of solutions of ISDEs for systems of interacting diffusion processes (joint work with H. Osada). We generalized the result to systems of jump type process including Levy process (joint work with S. Esaki) and those of hard core balls. As an application of these results, we showed the uniqueness of Dirichlet forms associated the systems (joint work with Y. Kawamoto and H. Osada). We also studied on percolation models composed by sticks whose centers are arranged by a Poisson point process and directions are i. i. d. We examined the relation between the distribution of direction of sticks and the shape of cluster, and obtained a kind of phase transition (joint work with R. Roy).
Notes	研究種目：基盤研究 (C) (一般) 研究期間：2015～2018 課題番号：15K04916 研究分野：確率論
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KAKEN_15K04916seika

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４９１６

研究課題名（和文）長距離相互作用系の確率解析

研究課題名（英文）Stochastic calculus for systems with long range interaction

研究代表者
種村　秀紀（Tanemura, Hideki）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・教授

研究者番号：４０２１７１６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：　近年の長田氏との共同研究により、長距離相互作用をもつ拡散型無限粒子系に対して、無限次元確率微分方程式に対する解の存在と一意性を導いた。この拡散系の結果を飛躍型無限粒子系(江崎氏との共同研究)、および無限剛体球系に対して一般化することに成功した。無限次元確率微分方程式の一意性の応用として、対応するディリクレ形式の一意性を導いた（長田氏、河本氏との共同研究）
　Rahul Roy 氏との共同研究により、ユークリッド空間上に中心がポアッソン配置されたstick の繋がりから定まる浸透模型を導入し、stick の方向分布とクラスターの形状の関連を調べ、ある種の相転移現象を導いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
　物理学、生物学、経済学、工学などで観察されている現象を確率過程で表しその性質を調べる研究は確率論の分野では盛んに行われている。無限粒子系に対しても確率過程での表現が行われているが、多くの場合、有限粒子系からの近似で得られており、極限確率過程の一意性が重要な問題として残る。本研究期間中での研究成果により、対象となる確率過程を無限次元確率微分方程式の解として表現し、その一意性を示すための一般論が構築された。この成果により無限粒子系に対する確率解析の適用を可能にすることができる。さらに、この理論は頑強であり、多くの現象に対しても応用可能であることから、学術的意義や社会的意義は高いと思われる。

研究成果の概要（英文）：We studied infinite dimensional stochastic differential equations (ISDEs) representing infinite particles systems with long range interaction. We proved the existence and uniqueness of solutions of ISDEs for systems of interacting diffusion processes (joint work with H. Osada). We generalized the result to systems of jump type process including Levy process (joint work with S. Esaki) and those of hard core balls. As an application of these results, we showed the uniqueness of Dirichlet forms associated the systems (joint work with Y. Kawamoto and H. Osada).
 We also studied on percolation models composed by sticks whose centers are arranged by a Poisson point process and directions are i. i. d. We examined the relation between the distribution of direction of sticks and the shape of cluster, and obtained a kind of phase transition (joint work with R. Roy).

研究分野：確率論

キーワード：無限次元確率微分方程式　ランダム行列　相互作用系　干渉ブラウン運動　干渉レヴィ過程　スコロホッド方程式　浸透模型　行列式点過程

１．　　研究開始当初の背景

互いに影響を与えながらランダムに動く粒子の系を確率過程で表しその性質を調べる研究は、確率論の中心的主題の１つであり、20 世紀前半から現在に至るまで国内外において行われており、物理学、生物学、経済学、工学などの分野で広範囲にわたり応用されている。扱われる粒子系は、粒子が動く空間、粒子数、粒子間の相互作用等の設定により様々なものが考えられる。近年、ランダム行列理論に代表される長距離相互作用系の研究が盛んであり、特に確率可積分系と呼ばれる可積分系の理論を用いた方向からの発展が目覚ましく、その結果は多くの分野にインパクトを与えている。

２．　　研究の目的

本研究課題での目的は、様々な分野において重要な問題で扱われている長距離相互作用を持つ粒子系を確率解析の立場から研究することであり、特に粒子の数が無限である場合を主としている。系を表す無限次元確率過程の構成・表現はいくつかの方法があるが、本研究では厳密に設定された無限次元確率微分方程式の解として表し、その強解の存在と一意性を示し、、厳密に定義された確率過程を用いて、確率論的手法によりエルゴード性、極限定理等を導くことを目標の一つとしている。確率可積分系の理論に基づいて得られた結果は、可積分系であるという設定からモデルが制限される。これらの結果を確率解析の手法を用いて、より一般的な確率過程に対しても成り立つかどうかを調べる。

３．研究の方法

両立条件を持つ有限粒子系の列と無限粒子系を対応させる方法により有限系の性質でどのようなのもが無限系にも遺伝するかを調べる。有限系での結果を係数がランダムな環境に依存する場合に拡張するとともに、末尾に関する情報についても詳しく調べ、無限遠点からの影響を解明する。平衡状態での解析では、無限次元空間でのディリクレ形式理論がによる解析が有効であり、より一般的な設定の下での系の構成、また各々の粒子の振る舞いを評価には特に効果的である。また、どのような粒子配置が実現するかを調べることが、無限粒子系の解析では重要であるが、浸透過程のクラスターの幾何的性質を調べるという方向からのアプローチを試みる。

４．研究成果

(1) 無限次元確率微分方程式、及びその関連の研究においていくつかの研究成果が得られた。近年の長田氏との共同研究により、係数が滑らかな拡散型無限粒子系に対して一般的な枠組みで、系を表す無限次元確率微分方程式の解の存在と一意性について研究が進んでいる。この結果により、一般の短距離相互作用系、多項式相互作用系はもちろん、ランダム行列理論で扱われている対数相互作用系に対する無限次元確率微分方程式の解の存在と一意性を示すことができる。研究期間中に従来の証明の厳密化，そして応用への一般化を行った。有限次元確率微分方程式の解は、弱解、強解などがあり、それらの相違は一意性をはじめ様々な設定のもとで重要な役割をする。研究期間中に無限次元確率微分方程式に対する解の厳密な定義を確定し、その定義に基づき一意性をより明確化し、可測性に関する曖昧さを取り除くことができた（発表論文丸②、学会発表⑥、⑧、⑨)。

(2) 確率微分方程式の一意性の応用として、ディリクレ形式の一意性導出を行った。無限粒子系に対応するディリクレ形式は、滑らかに局所関数上で定義された二次形式の閉拡張となるものが典型例である。このディリクレ形式により構成された無限粒子系は、有界領域での有限粒子系の極限として表すことができるが、領域の境界では粒子の流入・流出がある。一方、境界

では流入・流出がなく、すべて反射する有限系を考えても、ある条件のもとで極限が存在して、無限粒子系に収束する。この二つの極限無限粒子系は一般には同じではないが、（１）で得られた確率微分方程式の一意性から、対応するディリクレ形式の一意性を導くことができた。(長田氏、河本氏との共同研究、学会発表③、④) ディリクレ形式の一意性は、ポテンシャル論の観点から重要なものと言える。また、この結果は、長田氏と河本氏による無限粒子系に関する極限定理を証明するうえで重要な役割を果たしている。もう一つの応用として、ランダム行列理論で扱われている、多時刻相関関数により構成された、正弦行列式過程、エアリー行列式過程、ベッセル行列式過程がディリクレ形式から構成された拡散過程と同等なものであることを示した（長田氏との共同研究、発表論文③)。

(3)（１）での無限次元確率微分方程式の強解の存在と一意性の証明において基盤となる理論は頑強であり、広いクラスの無限次元確率微分方程式に対して一般化することが可能である。研究期間中にそのいくつかの重要な例を与えることができた。飛躍型無限粒子系に対しては、各々の粒子がレヴィー過程により駆動する場合を含むクラスに対して、長距離相互作用系を表す無限次元確率微分方程式の解の存在と一意性を示した（江崎氏との共同研究、学会発表⑤)。拡散過程に対する結果を合わせることにより、一般の強マルコフ過程に対しても拡張できたことになる。また、係数の滑らかであるという条件を外して、剛体球の系のようにドリフト項に反射項が付け加えられたスコロホッド型確率微分方程式の場合に対しても一般化することに成功した（学会発表①、②)。

(4) Poisson 点過程で中心が分布されている stick がどの様に繋がり、クラスターを形成するかについて研究を行った。Poisson 点過程の密度を高くして stick が多数集まる様にすると共に、クラスターの stick 数が一定になる様に制限した時に、クラスターの形がどの様になるかを調べた。stick の方向が 2 種類である場合は、その長さが長い方が 1 本、そのほかの stick は全て長さの短い方向の stick によりクラスターが形成される。そして、同じ方向のものは重なる様に集まる。 そしてクラスターの形は、2 種類の方向を持つ stick が重なっていれさえすれば、どの重なり方であっても等確率で存在しうることが示された。これはエントロピーが最小になる stick の分布である。次に stick の方向が 3 種類である場合は、クラスターを形成する stick の方向は 2 種類であり、3 種類全てが現れることはない。その 2 種類の選ばれ方は、stick の長さと方向により決定する。またクラスターの形は、2 方向の様に 2 次元的に自由度を持つ場合、1 次元的な自由度を持つ場合、全て中心で重なる場合の 3 つ の相に分別される。つまり相転移現象が現れる(Rahul Roy 氏との共同研究、発表論文①)。独立である Poisson 点過程に基づく比較的簡単な模型で相転移が現れることは興味深い。長距離相互作用を持つ場合の相転移現象との関連の有無について議論の価値がある。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計　３件)

① Rahul Roy, Hideki Tanemura, Percolation clusters as generators for orientation ordering, *Journal of Statistical Physics*, **168**, (2017), 1259-1275. 査読有
② Hirofumi Osada, Hideki Tanemura, Stochastic differential equations related to random matrix theory, *RIMS Kokyuroku Bessatsu,* **59**, (2016), 203-214. 査読有
③ Hirofumi Osada, Hideki Tanemura, Strong Markov property of determinantal processes with extended kernels, *Stochastic Processes and their Applications*, **126**, (2016), 186-208. 査読有

〔学会発表〕（計　9件）

① 種村秀紀, Infinite particle systems with hard core and long range interactions, 17th International Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting systems, 2018年

② 種村秀紀、Systems of infinitely many hard balls with long range interaction, Random matrices and their applications, 2018年

③ 種村秀紀、On uniqueness of Dirichlet forms related to interacting systems with an infinite number of particles, 16th Workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting systems, 2017年

④ 種村秀紀、Uniqueness of Dirichlet forms related to infinite systems of interacting Brownian motions, 39th Conference on Stochastic Processes and their Applications, 2017年

⑤ 種村秀紀、On uniqueness of solutions of SDEs related to infinite particle systems with jumps, 15th Workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting systems, 2016年

⑥ 種村秀紀、Stochastic differential equations related to random matrix theory, 14th Workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting systems, 2015年

⑦ 種村秀紀、無限粒子系に対応したティリクレ形式の芯集合、2015年度日本数学会総合分科会、2015年

⑧ 種村秀紀、Systems of infinitely many Brownian motions with long ranged interaction, German-Japanese conference on Stochastic Analysis and Applications, 2015年

⑨ 種村秀紀、Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail σ-fields, 38th Conference on Stochastic Processes and Their Applications, 2015年

〔図書〕（計　3件）

① 種村秀紀、日本評論社、数学セミナー6月号　ランダム行列　確率力学とランダム行列、2019年、6ページ

② 種村秀紀、サイエンス社、数理科学10月号　確率論の力　確率模型と極限定理、2017年、7ページ

③ 種村秀紀、サイエンス社、数理科学6月号　自然界を支配する偶然の構造　統計力学と確率論（ブラウン運動からSLEとKPZ方程式へ）、2016年、総ページ数：7ページ

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.keio.ac.jp/~tanemura/index.html

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。