Title	多変量保険リスク管理への共単調性アプローチ : ヒューマンセキュリティへの基盤研究
Sub Title	
Author	小暮, 厚之(Kogure, Atsuyuki)
Publisher	慶應義塾大学大学院政策・メディア研究科
Publication year	2005
Jtitle	総合政策学ワーキングペーパーシリーズ (Policy and governance working paper series). No.59
JaLC DOI	
Abstract	従来の保険リスク管理は、多数の保険契約を集めることによる、いわゆるリスク・プーリング効果を前提としていた。しかし、金利リスクのように、各保険契約間に同方向的な依存関係をもたらす要因が存在する場合には、従来のアプローチでは全体のリスクを過小に見積もってしまう。このような同方向的リスクを扱う新たなアプローチとして,「共単調性」という概念が最近注目されている。共単調性とは、同方向へ動く多変量リスクの数学的モデル化であり、金利リスクのみならず地震や天候といった広範囲に同時的な被害をもたらすリスクの評価への応用が期待されている。本論文では、ヒューマンセキュリティを支える基盤研究として、共単調性の理論による多変量リスクの評価と管理について展望する。
Notes	21世紀COEプログラム「日本・アジアにおける総合政策学先導拠点」
Genre	Technical Report
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=BA76859882-00000059-0001

総合政策学ワーキングペーパーシリーズ　No.59

多変量保険リスク管理への
共単調性アプローチ
―ヒューマンセキュリティへの基盤研究―

小暮厚之 *

2005 年 4 月

21 世紀 COE プログラム
「日本・アジアにおける総合政策学先導拠点」
慶應義塾大学大学院 政策・メディア研究科

本稿は、当該 COE プログラム「金融工学による保険・保証の分析」グループによって 2004 年 3 月 5 日、6 日に開催された「保険・年金リスク研究会」における報告に基づく。尚、本稿の内容を短くしたものが森平爽一郎・小暮厚之共編「保険とヒューマンセキュリティ（仮題）」（朝倉書店より刊行予定）に収録される予定である。

* 慶應義塾大学大学院 政策・メディア研究科／総合政策学部（kogure@sfc.keio.ac.jp）

多変量保険リスク管理への共単調性アプローチ
—ヒューマンセキュリティへの基盤研究—

小暮厚之

【概要】

従来の保険リスク管理は、多数の保険契約を集めることによる、いわゆるリスク・プーリング効果を前提としていた。しかし、金利リスクのように、各保険契約間に同方向的な依存関係をもたらす要因が存在する場合には、従来のアプローチでは全体のリスクを過小に見積もってしまう。このような同方向的リスクを扱う新たなアプローチとして ,「共単調性」という概念が最近注目されている。共単調性とは、同方向へ動く多変量リスクの数学的モデル化であり、金利リスクのみならず地震や天候といった広範囲に同時的な被害をもたらすリスクの評価への応用が期待されている。本論文では、ヒューマンセキュリティを支える基盤研究として、共単調性の理論による多変量リスクの評価と管理について展望する。

キーワード：多変量保険リスク、アクチュアリアル・サイエンス、共単調性、アジアン・オプション

1　はじめに

保険ポートフォリオのように多変量のリスクを考えるとき，各個別リスクの周辺分布だけでなく，それらの間の従属関係を規定する必要がある．最も簡単でしばしば有効なアプローチは独立性を仮定することである．しかし，例えば，同一グループに対する保険契約のように何らかの共通リスク要因が存在するようなケースでは，独立性の仮定は実態から乖離しており，トータルなリスクを過小に評価してしまう恐れがある．

より現実的と思われるアプローチは個別リスク間の相関係数を計算することであろう．しかし，相関係数は線形的な従属性しか捕捉することができない．保険リスクで扱う損失分布や寿命分布の間に存在する非線形的な従属性を把握するためには，同時分布全体の知識が必要となってくる．

非線形的な従属性のモデリングの標準的手法は，コピュラを用いて各個別リスクの周辺分布を結びつけるアプローチである1)．最近では，コピュラは保険リスクのみならず，信用リスクのモデリングにおいても盛んに用いられるようになってきた2)．しかし，このコピュラ・アプローチには，いかなるコピュラ関数を選択すべきかという困難な問題が伴う．コピュラ関数を選択することは，結局のところ同時分布の推定を行うことに他ならない．しかし，同時分布の次元の増大とともに，有効な推定に必要とされるデータの大きさは加速度的に増していく3)．同時分布に関する事前情報やそれを推定すべきデータが十分でない場合，コピュラ関数の選択はアドホックにならざるをえないであろう．

本稿では，共単調性という新たな視点からの多変量保険リスク管理の理論を展望する．共単調性は，完全相関を一般化した概念である．実際の個別リスクが共単調関係にあるケースは少なく，そのような理論の有用性は極めて限定されるように思われるかもしれない．しかし，共単調性の理論を用いると，従属性を明示的にモデル化することなく，個別リスクの総和に対する有用な上限と下限を求めることができる．従属性に関する事前情報やそれを推測するデータに乏しい状況において，直面するリスクを管理し評価する有用な手段を与える．

以下，本稿では，2 節でリスク・プーリング（大数の法則）では対処できない従属性について注意し，3 節で共単調性の概念を導入する．4 節以降では，共単調性によっていかに非独立な確率変数の和のリスクを評価するかに関する基本的な考え方と手法を説明する．いくつかの重要な定理を与えるが，証明はスケッチ程度に留める．最後に，8 節において，共単調性の重要な応用であるアジアン・オプションの評価問題を取り上げる．

1） 保険数理への応用は，例えば Frees and Valdez (1998) を参照されたい．

2） CreditMetrics[1997] はその代表的な例である．また，2006 年度から適用が開始される新 BIS 規制においては信用リスクだけでなくオペレーショナル・リスクを含む統合的なリスク管理においても，コピュラに基づく「先進的手法」によるリスク計量化が提唱されている．

3） 統計学では，そのような事実を「次元の呪い」と呼ぶ．

2　保険リスクと従属性

n 個の保険契約からなる保険ポートフォリオを考える．その第 i 番目の保険の満期時点における不確実な保険支払い額を X_i (≥ 0) と表すとき，この保険ポートフォリオは n 変量ベクトル

$$\boldsymbol{X} \equiv \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

によって表される．この保険ポートフォリオの支払い総額は

$$S \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2.2}$$

である．しばしば $\{X_i\}$ は互いに独立に同一の分布に従うと仮定する．このとき，n を増加させることによって一契約当たりのリスク

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{\mathrm{Var}(X)}{n}$$

はゼロに近づく．いわゆるリスク・プーリングによるリスク低減効果である．実際には，個別リスクは互いに独立ではないかも知れない．例えば損害保険であれば地震や台風のような自然災害リスク，生命保険であればインフレや金利のような経済リスクが保険ポートフォリオ全体に共通の影響を与えるかもしれない．そのような共通リスク・ファクターを Y とし，

$$X_i = Z_i Y \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.3}$$

となる場合を想定しよう．但し $\{Z_i\}$ は互いに独立な非負値確率変数であり，また Y に対しても独立に分布すると仮定する．この場合，X_i と X_j という 2 つの保険支払いの共分散は

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{E}[Z_i]\mathrm{E}[Z_j]\mathrm{Var}(Y), \quad i \neq j$$

となり，正の相関関係が生じる．また分散は

$$\mathrm{Var}\left(X_i\right) = \mathrm{Var}(Z_i)\mathrm{E}[Y^2] + \mathrm{Var}(Y)\left(\mathrm{E}[Z_i]\right)^2$$

と表せるから，共通ファクター Y が存在する場合の一契約当たりのリスクは

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(Z_i)}{n}\right)\mathrm{E}[Y^2] + \left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}[Z_i]\mathrm{E}[Z_j]\right)\mathrm{Var}(Y)$$

と計算される．分かりやすいように，各 Z_i の平均と分散が等しい

$$\mathrm{E}[Z_i] = \mu, \quad \mathrm{Var}(Z_i) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

の場合を考えると

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}\mathrm{E}[Y^2] + \mu^2\mathrm{Var}(Y)$$

となる．この式の右辺第 1 項はリスク・プーリングによって減少していく保険リスクを表す．第 2 項は Y に起因する非保険リスクを表す．保険契約数 n をいくら増やしても第 2 項の非保険リスクは低減しない．

以下では，共単調性によって，このような従属性のある非独立な確率変数の和で表現されるリスクを評価する基本的な考え方を説明する．特に断らない限り，各確率変数の分布はすべて連続型であり，その分布関数は厳密な意味で単調増加であると仮定する．この仮定により，多くの結果の導出が簡単となる．

3 共単調性

共単調性とは comonotonicity に充てた邦語である．それは文字通り共通の (common) 単調性 (monotonicity) であり，同一方向へ変動するリスクを意味する．別の言い方をすれば，それはリスク・プーリングによってヘッジできないリスクを表す．

3.1 共単調性とは何か

この節では $n=2$ のケースを取り上げ，共単調性とは何かを説明する．$i=1,2$ に対して，$F_{X_i}(\cdot)$ を X_i の分布関数，U_i を $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数とするとき

$$X_1 \stackrel{d}{=} F_{X_1}^{-1}(U_1), \quad X_2 \stackrel{d}{=} F_{X_2}^{-1}(U_2)$$

と表せる．ここで，$\stackrel{d}{=}$ は分布の意味での等号を表す．もしも U_1 と U_2 が独立ならば，X_1 と X_2 も独立となる．対極的に，もしも $U_1=U_2$ ならば

$$X_2 \stackrel{d}{=} F_{X_2}^{-1}(F_{X_1}(X_1))$$

となる．F_{X_1} と $F_{X_2}^{-1}$ は単調増加であるから，X_2 と X_1 は一方が増加（減少）すれば他方も増加（減少）するいう単調関係になる．

最も分かりやすい例として，X_1 と X_2 が同時正規分布に従うケースを考える．X_i の周辺分布の平均を μ_i，分散を σ_i^2 とし，Φ を標準正規分布の分布関数とするとき，

$$F_{X_i}^{-1}(u) = \mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(u) \quad 0<u<1; \quad i=1,2$$

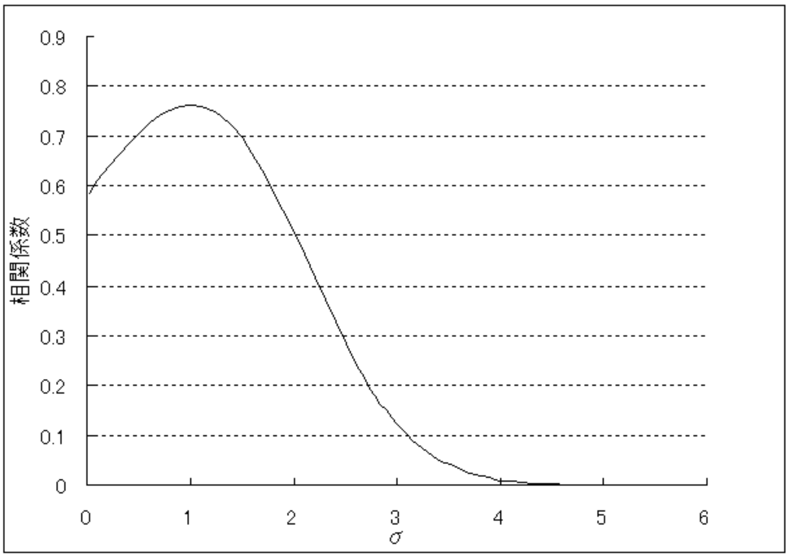
と表せるから

$$X_i \stackrel{d}{=} \mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(U_i), \quad i=1,2$$

となる．もしも $U_1=U_2$ ならば

$$\begin{aligned} S &= X_1 + X_2 \\ &\stackrel{d}{=} \mu_1+\mu_2+(\sigma_1+\sigma_2)\Phi^{-1}(U_1) \sim N\left(\mu_1+\mu_2,\ (\sigma_1+\sigma_2)^2\right) \end{aligned}$$

図 1　周辺分布が対数正規分布である共単調同時分布の相関係数



となる．このケースは，相関係数が 1 であるから X_1 と X_2 は正の直線関係にあり，明らかに共単調関係のケースである．

より興味深い例として，X_1 と X_2 が対数正規分布に従う場合

$$\log X_1 \sim N(0,1), \quad \log X_2 \sim N(0,\sigma^2)$$

を取り上げる．このとき，Embrechts, McNeil and Straumann (2001) で証明されたように，$X_1 \overset{d}{=} F_{X_1}^{-1}(U)$ と $X_2 \overset{d}{=} F_{X_2}^{-1}(U)$ の相関係数は

$$\rho(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U)) = \frac{e^{\sigma}-1}{\sqrt{e^{\sigma^2}-1}\sqrt{e-1}}$$

となる．図 1 で示されているように．σ が大きくなるとき，この相関係数の値はゼロに近づく．

以下の 4 節で示す定理 2 から，一般に

$$\rho(X_1, X_2) \leq \rho(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_1}^{-1}(U)) \tag{3.4}$$

であることが証明できる．従って，特に X_1 と X_2 が独立である場合を考えれば,

$$\rho(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_1}^{-1}(U)) \geq 0$$

となる．すなわち共単調関係ならば常に相関係数は正である．しかし，上で見たように，周辺分布が対数正規分布の場合には，2 つの資産間の関係が非線形な共単調関係であれば，相関係数がゼロに近い値を取ることもありうる．

3.2 コピュラと共単調性

共単調性は，コピュラの特別な場合である．コピュラ関数とは，一般に 2 つの一様確率変数 U_1 と U_2 の同時分布関数

$$C(u_1, u_2) \equiv \Pr(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2), \quad 0 < u_1, u_2 < 1$$

のことをいう．コピュラ関数を用いると，X_1 と X_2 の同時分布関数は

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

と表せる．従って，周辺分布が所与ならば，同時分布はコピュラ関数によって完全に特定化できる．X_1 と X_2 が共単調の場合は，コピュラは

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= \Pr(U \le u_1, U \le u_2) \\ &= \Pr(U \le \min(u_1, u_2)) = \min(u_1, u_2) \end{aligned}$$

となる．

よく知られているように，いかなるコピュラ関数も

$$\max(u_1 + u_2 - 1, 0) \le C(u_1, u_2) \le \min(u_1, u_2)$$

という関係（Frechet-Hoffding の不等式) を満たす．コピュラ関数として共単調性を選択することは，$\{U_1 \le u_1\}$ と $\{U_2 \le u_2\}$ という 2 つのイベントが同時に起きる確率が最も大きくなる状況を想定していることになる．

3.3 共単調性の例

ここでは保険とファイナンスの分野で共単調性が成立する例をあげておく．

3.3.1 年金

x 歳の人 (x) に対する年金を考える．この年金の毎年の受取額を α 円とし，T を (x) の余命時間を表す確率変数とする．連続リスクフリーレートを δ，$I_{\{\cdot\}}$ を指示関数とすると，この年金の現在価値は

$$S \equiv \sum_{i=1}^{n} e^{-\delta\, i} I_{\{T>i\}}\alpha = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

と表せる．但し，$X_i \equiv e^{-\delta\, i} I_{\{T>i\}}\alpha$ であり

$$n \equiv \lceil \omega - x \rceil - 1$$

とする．ここで，ω は生命表の最終年齢であり，$\lceil \cdot \rceil$ は天井関数とする．このとき，$\{X_i\}$ は共単調関係にある．

3.3.2　オプション

危険資産（例えば配当支払いのない株式）の1年後の株価を A とする．任意の定数 d に対して，2つの確率変数 X_1 と X_2 を

$$X_1 \equiv (A-d)_+, \quad X_2 \equiv (A-d)_- = (d-A)_+$$

と定義する．ここで，$(A-d)_+$ と $(A-d)_-$ はそれぞれ $A-d$ の正部分と負部分である．このとき，X_1 は危険資産に対する行使価格 d のコールオプションのペイオフ，X_2 は行使価格 d のプットオプションのペイオフを表す．原資産とコールオプションを同時に保有するポートフォリオ

$$\{A,\ X_1\}$$

は共単調である．また，原資産とコールオプション，プットオプションの売りのポートフォリオ

$$\{A,\ X_1,\ -X_2\}$$

も共単調である．

4　非独立な確率変数の和の評価

共単調性理論の有用性は，従属性をモデル化することなく，個別リスクの総和に対する「上限」と「下限」を求めることができる点にある．本節では，凸順序によるリスクの順序付けを説明し，共単調性の理論に基づいて，「上限」を導く．

4.1　凸順序

X を保険リスクを表す確率変数とするとき，任意の定数 d に対して

$$X-d = (X-d)_+ - (X-d)_- = (X-d)_+ - (d-X)_+$$

と表せる．$(X-d)_+$ は分布の上裾であり，その期待値

$$\mathrm{E}[(X-d)_+] = \int_d^\infty (1-F_X(x))\,dx$$

は X の上方リスクを表す．$(d-X)_+$ は分布の下裾であり，その期待値

$$\mathrm{E}[(d-X)_+] = \int_{-\infty}^d F_X(x)dx$$

は X の下方リスクを表す[4)]．

4）　X を将来の保険支払金額とするとき，$(X-d)_+$ は d をリテンションとするストップロス再保険の支払額を表し，$\mathrm{E}[(X-d)_+]$ はその保険料，すなわちストップロス・プレミアムを表す．

定義：凸順序

2つのリスク X，Y は，任意の定数 d に対して

$$\mathrm{E}[(X-d)_+] \leq \mathrm{E}[(Y-d)_+]$$

かつ

$$\mathrm{E}[(d-X)_+] \leq \mathrm{E}[(d-Y)_+]$$

が成立するならば，「Y は X より凸順序の意味で大きい」といい

$$X \leq_{cx} Y$$

と記す．

凸順序 $X \leq_{cx} Y$ は

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y]$$

かつ，任意の非減少な凹関数 u に対して

$$\mathrm{E}[u(-X)] \geq \mathrm{E}[u(-Y)]$$

が成立することと同値である．u は危険回避的な主体の効用関数を表すから， $X \leq_{cx} Y$ はすべての危険回避的な投資家が Y より X を好むこを意味する[5)]．

4.2　共単調和

(2.1) の形の n 変量のポートフォリオを考える．U を $[0,1]$ 上の一様分布とし，

$$X_i^c \equiv F_{X_i}^{-1}(U) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

とおくとき，n 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}^c$ を

$$\boldsymbol{X}^c = \begin{pmatrix} X_1^c & X_2^c & \cdots & X_n^c \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

と定義する．$\boldsymbol{X}^c$ のサポート D は，次の性質を満たす：

$\boldsymbol{y} \equiv (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，$\boldsymbol{z} \equiv (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ を D に属する任意の 2 点とする．このとき，$y_i < z_i$ となる i が存在すれば，すべての $1 \leq j \leq n$ に対して $y_i \leq z_i$ が成立する．

この性質が成立する集合を共単調集合という．一般に，ある確率ベクトルのサポートが共単調であれば，その確率ベクトルを共単調であると定義する．

5）ファイナンスの用語では，$-X$ は $-Y$ に第 2 次確率的優越 (second-order stochastic dominance) と呼ぶ．

共単調確率ベクトル $\boldsymbol{X}^c$ の和

$$S^c \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i^c = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) \tag{4.6}$$

を (2.1) の共単調和 (comonotonic sum) という．S^c の確率分布は，個別リスク $\{X_i\}$ の周辺分布のみに依存する．

4.3 共単調和の裾確率

任意の定数 d に対して

$$d_i \equiv F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)) \tag{4.7}$$

と定義すると

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = d$$

となる．また，点 $\{d_i\}$ は $\boldsymbol{X}^c$ のサポートに属することが証明できる．従って

$$(S^c - d)_+ \quad = \quad \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^c - d\right)_+ = \sum_{i=1}^{n} (X_i^c - d_i)_+$$

が成立する．この両辺の期待値を取ると，次の定理を得る：

定理 1

共単調和 S^c の裾確率は

$$\mathrm{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[(X_i - d_i)_+\right] \tag{4.8}$$

と与えられる

この結果は，$\sum_{i=1}^{n} K_i = d$ となる任意の $\{K_i\}$ に対して成立する

$$\mathrm{E}[(S^c - d)_+] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[(X_i - K_i)_+\right] \tag{4.9}$$

と比較すべきである．

4.4 S の上限

共単調和 S^c は凸順序の意味で S の上限である：

定理 2

$$S \leq_{cx} S^c$$

これを示すために，任意の d に対して，d_i を (4.7) のように定めると

$$S - d = \sum_{i=1}^{n}(X_i - d_i) \leq \sum_{i=1}^{n}(X_i - d_i)_+$$

となるから

$$(S-d)_+ \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - d_i)_+\right)_+ = \sum_{i=1}^{n}(X_i - d_i)_+$$

が成立する．この式の両辺の期待値を取ると

$$\mathrm{E}[(S-d)_+] \leq \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left[(X_i - d_i)_+\right] = \mathrm{E}[(S^c - d)_+]$$

となり，定理 2 が得られる．

定理 2 は，個別リスク間の同時分布が不明であったり，仮に分かっていたとしても複雑な場合には，S の代わりに S^c の分布を考えることによって，S のリスクを上から抑えることができるということを意味する．

4.5 凸順序と分散

定理 2 から，

$$\mathrm{Var}(S) \leq \mathrm{Var}(S^c)$$

が示される．また

$$\mathrm{Var}(S^c) - \mathrm{Var}(S) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{E}[(S^c - t)_+] - \mathrm{E}[(S-t)_+]\right| dt$$

が成立する [6)] から，もしも $\mathrm{Var}(S^c) = \mathrm{Var}(S)$ ならば，任意の t に対して

$$\mathrm{E}[(S^c - t)_+] = \mathrm{E}[(S-t)_+]$$

となる．この式の両辺を t に関して微分すれば

$$F_{S^c}(t) = F_S(t), \quad -\infty < t < \infty$$

を得る．すなわち，分散が等しければ，S^c の分布は S の分布に一致する．

6) Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas, Vyncke [2002a] の (9) 式を参照されたい．

4.6 例：支払備金

将来時点 $\{1, 2, \cdots, n\}$ において $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 円の支払義務が生ずるとしよう．期間 $[0, i]$ の割引ファクターを v_i とすれば，それらの現在価値は

$$S = \sum_{i=1}^{n} v_i \alpha_i$$

となる．S は，将来の損失に対する支払備金と解釈できる．ここで，α_i は正の定数であるが v_i は金利変動などと連動して変化する確率変数であるとする．このとき，S も確率変数となるが，そのリスクは共単調和によって抑えられる．いま

$$v_i \equiv e^{-(Y_1+Y_2+\cdots+Y_i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

と仮定する．ここで，例えば，$\{Y_i\}$ は互いに独立に同一分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする．このとき $X_i \equiv v_i \alpha_i$ は平均が $\mathrm{E}[X_i] = \alpha_i e^{i\left(-\mu+(1/2)\sigma^2\right)}$，分散が $\mathrm{Var}(X_i) = \alpha_i^2 e^{2(\mu+(1/2)\sigma^2)}[e^{i\sigma^2} - 1]$ の対数正規分布に従う．3.1 節と同様にして

$$F_{X_i}^{-1}(p) \quad = \quad \alpha_i e^{-i\mu - \sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(1-p)} = \alpha_i e^{-i\mu + \sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(p)}$$

が示される．従って

$$S^c = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-i\mu + \sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(U)}$$

となる．

5 共単調和の確率分布

X_i の周辺分布からその和 S の分布を計算することは，仮に個別リスク X_i が独立であっても，必ずしも容易ではない．しかし，共単調和 S^c の分布は比較的簡単に導出できる：

5.1 逆分布関数

S^c の逆分布関数は以下のように与えられる：

定理 3

共単調和 S^c の逆分布関数は

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p), \quad 0 < p < 1 \tag{5.10}$$

と与えられる．

なぜならば

$$g(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(u)$$

という関数を考えると：

$$F_{S^c}(x) = \Pr(g(U) \le x) = \Pr(U \le g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$$

であり，この逆写像を考えれば，(5.10) が得られるからである．

5.2 リスク測度

代表的なリスク尺度として，バリューアットリスク

$$\mathrm{Q}_p[X] \equiv F_X^{-1}(p)$$

とテイル・バリューアットリスク

$$\mathrm{TVaR}_p[X] \equiv \frac{1}{1-p}\int_p^1 Q_q[X]dq = \mathrm{E}[X|X > Q_p(X)]$$

を考えてみよう．定理 3 より明らかに

$$\mathrm{Q}_p[S^c] = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Q}_p[X_i^c] = \sum_{i=1}^n \mathrm{Q}_p[X_i]$$

となる．同様に，

$$\mathrm{TVaR}_p[S^c] = \sum_{i=1}^n \mathrm{TVaR}_p[X_i]$$

が成立する．Dhaene, Vanduffel, Tang, Goovaerts, Kaas, Vyncke [2003] は，この性質がより一般に distortion measure

$$\rho_g \quad \equiv \quad -\int_{-\infty}^0 (1 - g(1 - F_X(x)))\,dx + \int_0^\infty g(1 - F_X(x))\,dx$$

に対して成立することを示している．ここで, $g(\cdot)$ は distortion function と呼ばれる, $g(0) = 0, \quad g(1) = 1$ となる $[0, 1]$ 上で定義される非減少関数である．例えば，テイル・バリューアットリスク $\mathrm{TVaR}_p[X]$ の場合，

$$g(x) = \min\left(\frac{x}{1-p}, 1\right), \quad 0 \le x \le 1$$

である．この場合のように，g が凸関数の場合には

$$\rho_g(S) \le \rho_g(S^c)$$

であることが示される．従って，

$$\mathrm{TVaR}_p[S] \le \sum_{i=1}^n \mathrm{TVaR}_p[X_i]$$

が成立する．

5.3　分布関数

定理 3 より，共単調和の分布関数 $F_{S^c}(x)$ は

$$\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}\left(F_{S^c}(x)\right) = x, \quad -\infty < x < \infty$$

によってインプリシットに与えられる．

例えば，各 X_i の周辺分布がワイブル分布

$$F_{X_i}(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\phi_i}\right)^{\gamma_i}\right], \quad x \geq 0$$

と与えられる場合を考える．ここで，$\phi_i > 0$, $\gamma_i > 0$ はパラメータである．その逆分布関数は

$$F_{X_i}^{-1}(p) = \phi_i \left[\log\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{1/\gamma_i}$$

と与えられる．従って，共単調和 S^c の逆分布関数は

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \left[\log\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{1/\gamma_i}$$

となる．もしも $\gamma_i = \gamma$ ならば

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i\right) \left[\log\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{1/\gamma}$$

となるから，S^c はパラメータが $\sum_{i=1}^{n} \phi_i$，γ のワイブル分布に従う．

6　上限の改善

個別リスクの周辺分布だけでなく，同時分布に関して追加的な知識が与えられれば，共単調和よりシャープな上限が導出可能である．

6.1　条件付け

ある確率変数 Λ に対して，$\Lambda = \lambda$ を所与としたときの各 X_i の条件付周辺分布 $F_{X_i|\lambda}(\cdot)$ が分かっていると仮定する．$\Lambda = \lambda$ を所与としたときの S の条件付き分布を表す確率変数を $S|\lambda$ とし，その共単調和を

$$\sum_{i=1}^{n} F_{X_i|\lambda}^{-1}(U)$$

と表す．ただし，$F_{X_i|\lambda}^{-1}(\cdot)$ は，$F_{X_i|\lambda}(\cdot)$ の逆関数であり，U は Λ と独立に分布する $[0, 1]$ 上の一様確率変数とする．いま

$$S^u \equiv \sum_{i=1}^{n} F_{X_i|\Lambda}^{-1}(U)$$

と定義するとき，定理 2 から，任意の凸関数 v に対して

$$\mathrm{E}[v(S)|\Lambda=\lambda] \leq \mathrm{E}[v(S^u)|\Lambda=\lambda]$$

が成立する．ここで，両辺の Λ に関する期待値を取ると，

$$\mathrm{E}[v(S)] \leq \mathrm{E}[v(S^u)]$$

となる．明らかに，$\mathrm{E}[S]=\mathrm{E}[S^u]$ であるから，S^u は凸順序の意味で S の上限となる．すなわち

$$S \leq_{cx} S^u$$

が成立する．さらに，

$$F_{X_i}(x) \quad = \quad \mathrm{E}[\Pr(X_i \leq x|\Lambda)] = \mathrm{E}[F^{-1}_{X_i|\Lambda}(U) \leq x] = \Pr\left(F^{-1}_{X_i|\Lambda}(U) \leq x\right)$$

より，$F^{-1}_{X_i|\Lambda}(U)$ の周辺分布は X_i の周辺分布に一致する．従って：

$$S^u \leq_{cx} S^c$$

が成立する．以上の結果は次の定理にまとめられる：

定理 4

S^u は S の上限として S^c を改善する．

$$S \leq_{cx} S^u \leq_{cx} S^c$$

S^u の改善の程度を見るには，S 及び S^c の分散と比較すればよい．もしも Λ が S と独立ならば，$\mathrm{Var}(S^u)=\mathrm{Var}(S^c)$ となり改善はゼロである．逆に，Λ の条件付で S が共単調ならば

$$\mathrm{Var}(S|\Lambda=\lambda) = \mathrm{Var}(S^u|\Lambda=\lambda)$$

が成立するから

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(S|\Lambda)] + \mathrm{Var}\left(\mathrm{E}[(S|\Lambda)]\right) \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(S^u|\Lambda)] + \mathrm{Var}\left(\mathrm{E}[(S^u|\Lambda)]\right) \\
&= \mathrm{Var}(S^u)
\end{aligned}$$

となり，最大限の改善が実現される．

6.2　例：正規分布と対数正規分布

簡単な例で S^u を説明する．

6.2.1　正規分布

Y_1 と Y_2 を互いに独立な標準正規確率変数とし，

$$X_1 = Y_1, \quad X_2 = Y_1 + Y_2$$

とする．このとき

$$S = X_1 + X_2$$

の分布を考える．

$$X_1^c = F_{X_1}^{-1}(U) \stackrel{d}{=} Z, \quad X_2^c = F_{X_2}^{-1}(U) \stackrel{d}{=} \sqrt{2}Z$$

と表せる．ここで，U は一様分布，Z は標準正規分布に従う．また，任意の定数 a に対して $\Lambda = Y_1 + aY_2$ とすると，(Y_1, Y_2, Λ) は 3 変量正規分布

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \Lambda \end{pmatrix} \sim N_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & 1+a^2 \end{pmatrix} \right]$$

に従う．ここで，$N_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ は，平均ベクトルが $\boldsymbol{\mu}$，分散共分散行列が $\boldsymbol{\Sigma}$ の m 変量正規分布を表す．従って，Λ を条件付としたときの $X_1 = Y_1$ と $X_2 = Y_1 + Y_2$ の同時分布は

$$\left. \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right| \Lambda \sim N_2 \left[\frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+a \end{pmatrix} \Lambda, \ \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} a^2 & -a \\ -a & (1-a)^2 \end{pmatrix} \right]$$

となる．このとき，

$$X_1^u = F_{X_1|\Lambda}^{-1}(U) \stackrel{d}{=} \frac{1}{1+a^2}\Lambda + \frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}Z$$

$$X_2^u = F_{X_2|\Lambda}^{-1}(U) \stackrel{d}{=} \frac{1+a}{1+a^2}\Lambda + \frac{|1-a|}{\sqrt{1+a^2}}Z$$

であり

$$\mathrm{Cov}(X_1^u, X_2^u) = \frac{1 + a + |a(1-a)|}{1+a^2}$$

となる．従って，$a \leq 0$ または $a \geq 1$ のとき，S と S^u の分布は一致する．

6.2.2　対数正規分布

Y_1 と Y_2 を互いに独立に標準正規分布に従うリスクとするとき

$$X_1 = e^{Y_1}, \quad X_2 \ e^{Y_1+Y_2}$$

として，$S = X_1 + X_2$ の分布を考える．このとき

$$X_1^c = F_{X_1}^{-1}(U) \stackrel{d}{=} e^Z, X_2^c = F_{X_2}^{-1}(U) \stackrel{d}{=} e^{\sqrt{2}Z}$$

と表せる．また，$\Lambda = X_1 + aX_2$ とすると，

$$X_1^u = F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) \stackrel{d}{=} \exp\left(\frac{1}{1+a^2}\Lambda + \frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}Z\right)$$

$$X_2^u = F^{-1}_{X_2|\Lambda}(U) \stackrel{d}{=} \exp\left(\frac{1+a}{1+a^2}\Lambda + \frac{|1-a|}{\sqrt{1+a^2}}Z\right)$$

が成立する．

6.3　例：支払備金

4.6 節の支払備金の例を再び考えよう．

$$\Lambda \equiv \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i$$

とすると，$\Lambda = \lambda$ を与えたときの $-\sum_{j=1}^{i} X_j$ の条件付分布は

$$-\sum_{j=1}^{i} X_j \middle| \Lambda = \lambda \sim N\left(-\mu i - \rho_{(i)}\sigma\sqrt{i}\left(\frac{\lambda - \mathrm{E}[\Lambda]}{\sqrt{\mathrm{Var}(\Lambda)}}\right), (1-\rho_{(i)}^2)\sigma^2 i\right)$$

となる．ここで

$$\rho_{(i)} \equiv \frac{\mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^{i} X_j, \Lambda\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{i} X_j\right)\mathrm{Var}(\Lambda)}}$$

従って

$$F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(p) \quad = \quad \alpha_i \exp\left\{-\mu i - \rho_{(i)}\sigma\sqrt{i}\left(\frac{\lambda - \mathrm{E}[\Lambda]}{\sqrt{\mathrm{Var}(\Lambda)}}\right) + \sqrt{1-\rho_{(i)}^2}\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(p)\right\}$$

が示される．ここで，V を U と独立に $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数とすれば

$$\Phi^{-1}(V) \stackrel{d}{=} \frac{\lambda - \mathrm{E}[\Lambda]}{\sqrt{\mathrm{Var}(\Lambda)}}$$

となる．従って

$$F^{-1}_{X_i|\Lambda}(U) \quad \stackrel{d}{=} \quad \alpha_i \exp\left\{-\mu i - \rho_i\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(V) + \sqrt{1-\rho_{(i)}^2}\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(U)\right\}$$

と表せる．

6.4　S^u の分布とストップロス

$\Lambda = \lambda$ の条件付で考えるとき，S^u は S の共単調和である．従って，その逆分布関数と分布関数は

$$F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(p) = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(p), \quad 0 < p < 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}\left(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)\right) = x, \quad -\infty < x < \infty$$

により与えられる．この結果，Λ の周辺分布を $F_\Lambda(\lambda)$ とすると，S^u の分布関数は

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x) dF_\Lambda(\lambda)$$

ストップロス・プレミアムは

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left[(S^u - d)_+ | \Lambda = \lambda\right] dF_\Lambda(\lambda)$$

により計算できる．

7 非独立な確率変数の和の下限

リスク評価のためには，S の上限だけでなく下限を求める必要もある．この節では，凸順序の意味の下限を導出する．

7.1 条件付期待値

S に対して，その条件付期待値

$$S^l \equiv \mathrm{E}[S|\Lambda] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i|\Lambda]$$

を考える．当然

$$\mathrm{E}\left[S^l\right] = \mathrm{E}[S], \quad \mathrm{Var}\left(S^l\right) \le \mathrm{Var}(S)$$

となる．ジェンセンの不等式を用いれば任意の凸関数 v に対して

$$v\left(S^l\right) = v(\mathrm{E}[S|\Lambda]) \le \mathrm{E}[v(S)|\Lambda]$$

が成立する．ここで，Λ に関する両辺の期待値を取れば

$$\mathrm{E}[v\left(S^l\right)] \le \mathrm{E}[v(S)]$$

となる．以上の結果は次のように述べられる：

定理 5

S^l は凸順序の意味で S の下限である：

$$S^l \le_{cx} S$$

一般に

$$\mathrm{Var}(\mathrm{E}[X_i|\Lambda]) \le \mathrm{Var}(X_i)$$

であるから，X_i^c とは異なり，$X_i^l \equiv \mathrm{E}[X_i|\Lambda]$ の周辺分布は X_i の周辺分布に一致しない点に注意されたい．

7.2 例：正規分布と対数正規分布

簡単な例で S^l を説明する．

7.2.1 正規分布

6.2.1 節の例を再び考える．このとき

$$X_1^l = \frac{1}{1+a^2}\Lambda, \quad X_2^l = \frac{1+a}{1+a^2}\Lambda$$

であったから

$$\mathrm{Var}(X_1^l) = \frac{1}{1+a^2}, \quad \mathrm{Var}(X_2^l) = \frac{(1+a)^2}{1+a^2}, \quad \mathrm{Cov}(X_1^l, X_2^l) = \frac{1+a}{1+a^2}.$$

となる．従って

$$\mathrm{Var}\left(S^l\right) = \frac{(2+a)^2}{1+a^2}.$$

と計算される．

7.2.2 対数正規分布

6.2.2 節の例を再び考える．このとき

$$X_1^l = \mathrm{E}[X_1|\Lambda] = \exp\left\{\frac{1}{1+a^2}\Lambda + \frac{1}{2(1+a^2)}\right\},$$

$$X_2^l = \mathrm{E}[X_2|\Lambda] = \exp\left\{\frac{1+a}{1+a^2}\Lambda + \frac{(1-a)^2}{(1+a^2)}\right\}.$$

となる．

7.3 例：支払備金

6.3 節の支払備金の例を再び考えよう．前と同様に

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i$$

とすると，各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$X_i^l \quad = \quad \mathrm{E}[X_i|\Lambda] = \alpha_i \exp\left\{-\mu i - \rho_i \sigma \sqrt{i}\Phi^{-1}(V) \ +(1/2)(1-\rho_{(i)}^2)\sigma\sqrt{i}\right\}$$

が示される．従って

$$S^l = \sum_{i=1}^{n} X_i^l$$

は共単調和となり，4 節-6 節の結果が適用できる．例えば，S^l のストップロス・プレミアムは

$$\mathrm{E}[(S^l - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[\left(X_i^l - F_{X_i^l}^{-1}(F_{S^l}(d))\right)_+\right]$$

と計算される．

8 アジアン・オプションの評価

この節では，これまでに述べたきた共単調性の理論を用いて，アジアン・オプションの解析的な評価を行う．通常のオプションが満期時点の原資産価格を対象とするのに対して，アジアン・オプションは，満期時点及びそれ以前の複数時点の原資産価格の算術平均値を対象とする．よく知られているように，原資産価格が幾何ブラウン運動に従う場合であっても，アジアン・オプションの無裁定価格の解析解は導出できない．以下では，共単調性の理論に基づいて，アジアン・オプションの無裁定価格の上限と下限を求める．

8.1 アジアン・オプション

ある危険資産（例えば配当支払いのない株式）を考える．この資産の時点 t 価格を $A(t)$ とする．現時点を 0 とするとき，満期時点 $T(>0)$ において

$$AC(T) \equiv \left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i) - K\right)_+ = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i - d\right)_+$$

を支払うオプションをアジアン・オプションという．ここで，$X_i \equiv A(T-i)$，$d \equiv nK$ とする．いま任意の $t \geq 0$ に対して

$$\mathrm{E}^Q[e^{-\delta t}A(t)] = A(0), \quad t \geq 0$$

となる確率測度 Q が一意に存在するものとする．ここで，δ は連続複利リスクフリーレートである．このとき，ペイオフが (8.11) であるアジアン・オプションの無裁定価格は

$$AC(0) = e^{-\delta T}\mathrm{E}^Q[AC(T)] \tag{8.11}$$

によって与えられる．しかし，その解析解を求めることは一般には不可能である．例えば，$A(t)$ が（ブラック＝ショールズ・モデルが前提とする）幾何ブラウン運動

$$dA(t) = \mu A(t)dt + \sigma A(t)dB(t) \tag{8.12}$$

に従う場合を考えよう．ここで，$B(t)$ は標準ブラウン運動とする．このとき，(8.11) を求めることは，対数正規分布に従う確率変数の和の期待値を取ることに帰着する．よく知られているように，対数正規分布に従う確率変数の和は，たとえ各確率変数が互いに独立であっても，解析的表現を得ることはできない．

8.2　上限

満期時点が $T-i$，行使価格が K_i の通常のコール価格の無裁定価格を

$$C(K_i, T-i) \equiv e^{-\delta(T-i)}\mathrm{E}^Q\left[(A(T-i)-K_i)_+\right]$$

と表すと，定理 1 及び定理 2 より，共単調による上限は

$$\frac{e^{-\delta T}}{n}\mathrm{E}^Q\left[(S^c-d)_+\right] = \sum_{i=0}^{n-1} w_i C(d_i, T-i)$$

と与えられる．ここで，$w_i \equiv e^{-\delta i}$ であり，d_i は (4.7) で与えられるものとする．このとき (4.9) より $\sum_{i=0}^{n-1} K_i = K$ となる任意の $\{K_i\}$ に対して

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i C(d_i, T-i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} w_i C(K_i, T-i) \tag{8.13}$$

が成立する．

(8.13) の右辺は 0 時点で満期時点が $T-i$，行使価格が K_i の n 個のコールオプションを $e^{-\delta}/n$ 単位購入し時点 T まで保有するというスーペー・ヘッジ戦略[7] のペイオフを表す．従って，(8.11) は，通常のコール・オプションの組み合わせによってアジアン・オプションのヘッジを行おうとする場合，共単調和による権利行使価格の選択 (4.7) が，最も低いコストを与えることを示している．

具体的な上限の値を求めるために，例えば，$A(t)$ が幾何ブラウン運動 (8.12) に従うとしよう．このとき，よく知られたブラック＝ショールズのオプション公式から共単調による上限は

$$\frac{A(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i}\Phi(\sigma\sqrt{T-i}-\Phi^{-1}(F_{S^c}(nK))) - e^{-\delta T}K(1-F_{S^c}(nK))) \tag{8.14}$$

と計算される．

8.3　下限

$A(t)$ が幾何ブラウン運動 (8.12) に従うと仮定して，(8.11) の下限を求める．Q 測度の下で，S の分布は

$$S = A(0)\sum_{i=1}^{n-1} e^{(\delta-\sigma^2/2)(T-i)+\sigma B(T-i)}$$

と与えられる．Λ を

$$\Lambda \equiv \sum_{j=1}^{n-1} e^{(\delta-\sigma^2/2)(T-j)}B(T-j)$$

7）　スーパー・ヘッジ戦略 (superhedging) は，満期時点のペイオフを既存の資産で完全には複製できない場合に，満期時点のペイオフを保証するような投資戦略のことである．その概説については，例えば，Baxter(1998) を参照されたい．

とすると

$$S^l \quad = \quad \mathrm{E}^Q\left[S|\Lambda\right] = A(0)\sum_{i=0}^{n-1} e^{\left(\delta-(\sigma^2/2)r_{T-i}^2\right)(T-i)+\sigma r_{T-i}\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(U)}$$

と与えられる．このように，S_l も共単調和となるため，7 節の結果が適用可能となり，(8.11) の下限

$$\frac{A(0)}{n}\sum_{i=1}^{n-1} e^{-\delta i}\Phi\left[\sigma r_{T-i}\sqrt{T-i}-\Phi^{-1}(F_{S^l}(nK))\right]-e^{-\delta T}K(1-F_{S^l}(nK))$$

が得られる．ただし，r_{T-i} は

$$r_{T-i} \equiv \frac{\mathrm{Cov}(B(T-i),\Lambda)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\Lambda)(T-i)}}$$

であり，$F_{S_l}(nK)$ は

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{E[A_{T-i}|\Lambda]}(F_{S^l}(nK)) = nK$$

により与えられるものとする．

8.4 数値例

共単調和アプローチの具体的なパフォーマンスを見るために，Dhaene et al (2002b) からの数値例を掲げておく．表 1 は，$A(0) = 100$, $T = 60$ 日，$n = 30$ 日，$e^\delta - 1 = 0.09$, $\sigma = 0.3$ としたときの，アジアン・オプションの上限 (8.14) と下限 (8.15) とモンテカルロ法によるシミュレーション結果との比較である．シミュレーションは 5000 本のサンプルパスに基づき，分散減少法が使われた．行使価格が 80

表 1　アジアン・オプションの価格評価の比較

行使価格	下限	モンテカルロ法	上限
80	20.8122	20.8055	20.8268
		(0.0441)	
90	11.4929	11.5160	11.6017
		(0.0410)	
100	4.5063	4.4711	4.7221
		(0.0289)	
110	1.1516	1.1458	1.3134
		(0.0150)	
120	0.1915	0.1945	0.2503
		(0.0059)	

注意：() 内は標準偏差

円と 100 円の場合には，モンテカルロ法による評価値は下限を下回っている．また，行使価格が 80 円と 90 円の場合には，上限と下限の区間幅は，モンテカルロ法の 95 パーセント信頼区間より短い．

9 終わりに

本論文では共単調性という多変量リスク評価のための新たな概念を概観した．ここで述べたような理論的発展を背景にして，様々な共単調性の応用研究が現在進行中のようである．例えば Dhaene et al [2004] においては伝統的なマーコビッツ流に代わるポートフォリオ最適化問題が扱われている．また，Albrecher [2004] では原資産価格が Levy 過程に従う場合のアジアンオプションの評価問題が述べられている．さらに，Deelstra, Liinev and Vanmaele[2004] では，バスケット・オプションへの応用が議論されている．現時点での応用はモデリング段階に止まっているが，今後は実証研究へと応用範囲も広がっていくであろう．既に標準ツールとなりつつ感のあるコピュラや EVT（極値理論）に加え，共単調性の考え方が保険やファイナンスのリスク管理の現場に登場する時も近いかもしれない．

参考文献

Albrecher[2004]. "The valuation of asian options for market models of exponential Levy type", Technical Paper.

Baxter[1998]. "Hedging in financial markets", *Astin Bulletin*, Vol. 28, pp.5-16.

CreditMetrics [1997]. Technical Document. JP Morgan.

Deelstra, Liinev and Vanmaele[2004]. "Pricing of arithmetic basket options by conditioning," *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol.34, pp.55-77.

Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas and Vyncke[2002a]. "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory," *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol.31, pp.3-33.

Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas and Vyncke[2002b]. "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Applications," *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol.31, pp.133-161.

Dhaene, Vanduffel, Tang, Goovaerts, Kaas and Vyncke[2003]. "Solvency capital, risk measures and comonotonicity: a review", Technical Paper.

Embrechts, McNeil and Straumann[2001]. "Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls," in *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, edited by Dempster and Moffatt, Cambridge University Press.

Frees and Valdez[1998]. "Understanding relationships using copulas," *North American Actuarial Journal*, Vol.2, pp.1-25.

既刊「総合政策学ワーキングペーパー」一覧 *

番号	著者	論文タイトル	刊行年月
1	小島朋之 岡部光明	総合政策学とは何か	2003 年 11 月
2	Michio Umegaki	Human Security: Some Conceptual Issues for Policy Research	November 2003
3	藤井多希子 大江守之	東京圏郊外における高齢化と世代交代 ―高齢者の安定居住に関する基礎的研究―	2003 年 11 月
4	森平爽一郎	イベントリスクに対するデリバティブズ契約	2003 年 11 月
5	香川敏幸 市川　顕	自然災害と地方政府のガバナンス ～ 1997 年オーデル川大洪水の事例～	2003 年 12 月
6	厳　網林 松崎　彩 鳴原美可子	地域エコシステムのマッピングとエコシステムサービスの評価 ―地域環境ガバナンスのための GIS ツールの適用―	2003 年 12 月
7	早見　均 和気洋子 吉岡完治 小島朋之	瀋陽市康平県における CDM（クリーン・デベロプメント・メカニズム）の可能性と実践：ヒューマンセキュリティに向けた日中政策協調の試み	2003 年 12 月
8	白井早由里	欧州の通貨統合と金融・財政政策の収斂 ―ヒューマンセキュリティと政策対応―	2003 年 12 月
9	岡部光明	金融市場の世界的統合と政策運営 ―総合政策学の視点から―	2003 年 12 月
10	駒井正晶	PFI 事業の事業者選定における価格と質の評価方法への総合政策学的接近	2003 年 12 月
11	小暮厚之	生命表とノンパラメトリック回帰分析 ―我が国生保標準生命表における補整の考察―	2004 年 1 月
12	Lynn Thiesmeyer	Human Insecurity and Development Policy in Asia: Land, Food, Work and HIV in Rural Communities in Thailand	January 2004
13	中野　諭 鄭　雨宗 王　雪萍	北東アジアにおけるヒューマンセキュリティをめぐる多国間政策協調の試み：日中韓三国間の CDM プロジェクトの可能性	2004 年 1 月

* 各ワーキングペーパーは、当 COE プログラムのウエブサイトに掲載されており、そこから PDF 形式で全文ダウンロード可能である（但し一部の例外を除く）。ワーキングペーパー冊子版の入手を希望される場合は、電子メールで当プログラムに連絡されたい（coe2-sec@sfc.keio.ac.jp）。また当プログラムに様々なかたちで関係する研究者は、その研究成果を積極的に投稿されんことを期待する（原稿ファイルの送信先：coe2-wp@sfc.keio.ac.jp）。なお、論文の執筆ならびに投稿の要領は、当プログラムのウエブサイトに掲載されている。
当プログラムのウエブサイト　<http://coe21-policy.sfc.keio.ac.jp/>

14	吉岡完治 小島朋之 中野　諭 早見　均 桜本　光 和気洋子	瀋陽市康平県における植林活動の実践： ヒューマンセキュリティの日中政策協調	2004 年 2 月
15	Yoshika Sekine, Zhi-Ming YANG and Xue-Ping WANG	Air Quality Watch in Inland China for Human Security	February 2004
16	Patcharawalai Wongboonsin	Human Security and Transnational Migration: The Case in Thailand	February 2004
17	Mitsuaki Okabe	The Financial System and Corporate Governance in Japan	February 2004
18	Isao Yanagimachi	Chaebol Reform and Corporate Governance in Korea	February 2004
19	小川美香子 梅嶋真樹 國領二郎	コンシューマー・エンパワーメント技術 としての RFID ―日本におけるその展開―	2004 年 2 月
20	林　幹人 國領二郎	オープンソース・ソフトウェアの開発メカニズム ―基幹技術開示によるヒューマンセキュリティ―	2004 年 2 月
21	杉原　亨 國領二郎	学生能力を可視化させる新しい指標開発 ―経過報告―	2004 年 2 月
22	秋山美紀	診療情報の電子化、情報共有と個人情報保護に ついての考察―ヒューマンセキュリティを実現 する制度設計に向けて―	2004 年 3 月
23	飯盛義徳	地域活性化におけるエージェントの役割 ―B2B システムによる関係仲介とヒューマン セキュリティ―	2004 年 3 月
24	山本悠介 中野　諭 小島朋之 吉岡完治	太陽光発電のユーザーコストと CO_2 削減効果： 大学におけるヒューマンセキュリティへの具体的 取組みに向けて	2004 年 3 月
25	Jae Edmonds	Implications of a Technology Strategy to Address Climate Change for the Evolution of Global Trade and Investment	March 2004
26	Bernd Meyerab Christian Lutza Marc Ingo Woltera	Economic Growth of the EU and Asia. A First Forecast with the Global Econometric Model GINFORS	March 2004
27	Wei Zhihong	Economic Development and Energy Issues in China	March 2004
28	Yoginder K. Alagh	Common Futures and Politics	March 2004

29	Guifen Pei Sayuri Shirai	China's Financial Industry and Asset Management Companies—Problems and Challenges—	April 2004
30	Kinnosuke Yagi	Decentralization in Japan	April 2004
31	Sayuri Shirai	An Overview of the Growing Local Government Fiscal Problems in Japan	April 2004
32	Sayuri Shirai	The Role of the Local Allocation Tax and Rerorm Agenda in Japan—Implication to Developing Countries—	April 2004
33	山本　聡 白井早由里	経済安定の基盤としての地方自治体の財源問題 —地方交付税のフライペーパー効果とその実証分析—	2004年4月
34	岡部光明 藤井　恵	日本企業のガバナンス構造と経営効率性 —実証研究—	2004年4月
35	須子善彦 國領二郎 村井　純	知人関係を用いたプライバシ保護型マッチングシステムの研究	2004年4月
36	渡部厚志	「移動の村」での生活史：「人間の安全」としての移動研究試論	2004年4月
37	厳　網林	自然資本の運用による環境保全と社会発展のためのフレームワークの構築—チンハイ・チベット高原を事例として—	2004年4月
38	榊原清則	知的メインテナンス・システムの構築をめざすアメリカの産学官連携プロジェクト	2004年5月
39	白井早由里 唐　成	中国の人民元の切り上げについて —切り上げ効果の検証と政策提言—	2004年5月
40	草野　厚 岡本岳大	対中国ODAに関するメディア報道の分析 —新聞報道の比較を中心に—	2004年5月
41	草野　厚 近藤　匡	政策決定過程におけるマスメディアの機能 —イージス艦派遣をめぐる議論における新聞報道の影響—	2004年5月
42	草野　厚 古川園智樹 水谷玲子	視聴率の代替可能性—メディア検証機構に焦点を当てて—	2004年5月
43	中川祥子	「信頼の提供」に基づいたNPOと行政のパートナーシップ・モデルの提示	2004年5月
44	安西祐一郎	ヒューマンセキュリティへの総合政策学アプローチ	2004年5月
45	小倉　都	日本における再生医療ビジネスの課題とベンチャー企業の取り組み—ジャパン・ティッシュ・エンジニアリングの事例分析について—	2004年7月
46	伴　英美子	高齢者介護施設における従業員のバーンアウトに	2004年7月

47	伊藤裕一	「開かれた政策協調手法」の発展とその評価 — EU 雇用政策分野における取組みを中心に—	2004 年 7 月
48	Hideki Kaji Kenichi Ishibashi Yumiko Usui	Human Security of the Mega-cities in East and South-East Asia	July 2004
49	Takashi Terada	Thorny Progress in the Institutionalization of ASEAN+3: Deficient China–Japan Leadership and the ASEAN Divide for Regional Governance	July 2004
50	Sayuri Shirai	Recent Trends in External Debt Management Practices, Global Governance, and the Nature of Economic Crises —In Search of Sustainable Economic Development Polices—	September 2004
51	Sayuri Shirai	Japan, the IMF and Global Governance —Inter-Disciplinary Approach to Human Security and Development—	September 2004
52	Sarunya Benjakul	Equity of Health Care Utilization by the Elderly Population in Thailand during the Periods of the Economic Bubble and after the Economic Crisis: Human Security and Health Policy Options	September 2004
53	中林啓修	先進国の治安政策と「人間の安全保障」 — EU 司法・内務政策を巡る考察—	2004 年 9 月
54	Yuichi Ito	Globalisation, Regional Transformation and Governance — The Case of East Asian Countries —	January 2005
55	孫　前進 陳　宏 香川敏幸	东北亚经济空间形成中的流通环境分析 [中国語論文]	2005 年 1 月
56	厳　網林 小島朋之 早見　均	运用京都协议书清洁开发机制 (CDM) 构筑可持续的 植树造林机制—日本庆应义塾大学与中国沈阳市 林业局合作造林的实践经验—[中国語論文]	2005 年 1 月
57	白井早由里	開発援助（ODA）のもたらすマクロ経済問題 —総合政策学アプローチに向けて—	2005 年 1 月
58	白井早由里	援助配分・供与についての新しいアプローチ —ヒューマン・セキュリティとミレニアム開発 目標の達成に向けて—	2005 年 1 月
59	小暮厚之	多変量保険リスク管理への共単調性アプローチ —ヒューマンセキュリティへの基盤研究—	2005 年 4 月
60	枇々木規雄	動的投資決定のための多期間ポートフォリオ 最適化モデル—ヒューマンセキュリティへの 基盤研究—	2005 年 4 月
61	松山直樹	変額年金保険のリスク管理（現状と課題） —ヒューマンセキュリティへの基盤研究—	2005 年 4 月
62	工藤康祐 小守林克哉	EIA（株価指数連動型年金）に含まれるオプション性 について—ヒューマンセキュリティへの基盤研究—	2005 年 4 月

63	田中周二	第三分野保険（医療、就業不能、介護）の経験表の作成について―ヒューマンセキュリティへの基盤研究―	2005 年 4 月
64	田中周二	大論争「現行アクチュアリー実務は間違っているのか」―ヒューマンセキュリティへの基盤研究―	2005 年 4 月
65	厳　網林 宮坂隆文	衛星データによる砂漠化進行の時系列分析と農業政策による影響の考察―中国内蒙古自治区ホルチン砂地を事例として―	2005 年 4 月
66	中林啓修	司法・内務分野における EU の対中東欧支援政策―「人間の安全保障」実現にむけた国際協力構築の一形式―	2005 年 4 月
67	青木節子	宇宙の軍事利用を規律する国際法の現状と課題	2005 年 4 月
68	青木節子	適法な宇宙の軍事利用決定基準としての国会決議の有用性	2005 年 4 月
69	岡部光明 光安孝将	金融部門の深化と経済発展―多国データを用いた実証分析―	2005 年 4 月
70	森平爽一郎 神谷信一	日本の家計はバブル崩壊以降危険回避的であったのか？	2005 年 4 月
71	小暮厚之 長谷川知弘	将来生命表の統計モデリング：Lee-Carter 法とその拡張―ヒューマンセキュリティへの基盤研究―	2005 年 4 月

「総合政策学ワーキングペーパー」投稿要領

2004 年 12 月 22 日改訂

1.（シリーズの目的） 当ワーキングペーパーシリーズは、文部科学省 21 世紀 COE プログラム「日本・アジアにおける総合政策学先導拠点 --- ヒューマンセキュリティの基盤的研究を通して」の趣旨に沿って行われた研究成果をタイミングよく一般に公開するとともに、それに対して幅広くコメントを求め、議論を深めていくことにあります。このため編集委員会は､同プログラム事業推進担当者 30 名（以下 COE 推進メンバーという。当 COE ウエブページに氏名を掲載）またはその共同研究者等（下記の 4 を参照）による積極的な投稿を期待しています。なお、主として研究論文を集録する当シリーズとは別に、専ら研究資料を集録するために「総合政策学研究資料シリーズ（Policy and Governance Research Data and Document Series)」を 2004 年 6 月に新たに創設しました。当 COE の研究領域や研究内容等はウエブページ（本稿末尾）をご参照ください。

２.（集録論文の性格） シリーズに集録する論文は、原則として日本語、英語、または中国語で書かれた論文とします。集録対象は、未発表論文だけでなく、学会報告済み論文、投稿予定論文、研究の中間報告的な論文、当 COE 主催ワークショップ等における報告論文、シリーズの趣旨に合致する既発表論文（リプリント）など、様々な段階のものを想定していますが、性格的には原則として研究論文といえるものとします。集録論文のテーマは比較的広く設定しますが、上記趣旨に鑑み、原則として総合政策学ないしその方法論、あるいはヒューマンセキュリティに関連するものとします。このため、論文主題、論文副題、あるいは論文概要のいずれかにおいて原則として「総合政策学」または「ヒューマンセキュリティ」という用語のいずれか（または両方）が入っていることを当シリーズ採録の条件とします。

３.（投稿の方法） 投稿は、論文の文書ファイル（図表等が含まれる場合はそれらも含めて一つのファイルにしたもの）を電子メールによって下記にあてて送信してください。文書ファイルは、原則として MS-Word または LaTeX で書かれたものとします。後者による場合には、既刊ワーキングペーパーの様式に準じて作成していただき、そのまま印刷できる様式のもの（camera-ready manuscript）をご提出ください。なお、投稿の締切り期限は特に設けず、随時受け付けます。

４.（投稿資格） 当 COE 推進メンバーおよび慶應義塾大学湘南藤沢キャンパスの専任教員は直接投稿できるものとしますが、それ以外の研究協力者（共同研究者あるいは当 COE リサーチアシスタント等）は必ず当 COE 推進メンバーを経由して投稿してください。この場合、経由者となる COE 推進メンバーは、論文の内容や形式等を十分に点検するとともに必要な修正を行い、責任が持てる論文にしたうえで提出してください。投稿論文は、その著者としてＳＦＣ修士課程学生やＳＦＣ学部学生を含む共著論文であってもかまいません（ただし学部学生は第一著者にはなれません)。著者としてＳＦＣ大学院以外の大学院生を含む場合には、修士課程学生は第一著者になれず、また博士課程学生も原則として第一著者になれません。研究協力者がＳＦＣの内部者、外部者のいずれの場合でも、投稿論文の著者（複数著者の場合はそのうち少なくとも１名）は博士課程在籍中の学生またはそれ以上の研究歴を持つ研究者（当 COE 推進メンバーおよび慶應義塾大学湘南藤沢キャンパスの専任教員はこれに含まれる）であることを条件とします。

５.（論文査読の有無） シリーズの趣旨に鑑み、一般の学術専門誌のような論文査読は行わず、できるだけ幅広く集録してゆく方針です。ただし、シリーズの趣旨に合致する論文とは言いがたいと編集委員会が判断する場合には、編集委員会は、１）当該論文の採録を見送る、２）掲載するうえで必要な改訂（体裁その他の点）を著者にお願いする、３）当シリーズではなく「総合政策学研究資料シリーズ」への採録に回す、などの対応をとることがあります。編集委員会が投稿原稿を受理した場合、通常 10 日以内に必要な改訂の有無を執筆者に電子メールで直接ご連絡します。なお、集録が決定した場合、鮮明な印刷原紙作成のために図表等の原データ（例えば Photoshop EPS など）の提出をお願いする場合があります。

６.（投稿料・原稿執筆料） 投稿料は不要です。一方、原稿執筆料は支払われません。集録論文の著者には当該ワーキングペーパーを原則として 40 部進呈いたします（それ以上の場合も十分対応できますので申し出て下さい）。

７.（著作権） ワーキングペーパーの著作権は、当該論文の執筆者に帰属します。

８.（公開方法） 本シリーズに含まれる論文は、編集委員会が統一的な様式に変換したうえで冊子体に印刷して公開します（既刊論文をご参照。なお提出原稿にカラー図表等が含まれていても構いませんが、それらは冊子印刷に際しては全てモノクロとなります）。またウエブ上においても、原則としてすべての論文を PDF ファイル形式でダウンロード可能なかたちで掲載し、公開します。

９.（原稿執筆要領） 提出原稿の作成にあたっては、次の点に留意してください。

１）A4 版、横書き、各ページ１列組み（２列組みは不可）。

２）活字サイズは、日本語または中国語の場合 10.5 ～ 11 ポイント、英語の場合 11~12 ポイントとする。１ページあたりの分量は、日本語または中国語の場合１ページ 40 字 30 行、英語の場合１ページ 30 行をそれぞれ目安とする。（これら３つの言語以外の言語による場合は適宜読み替える。以下同様。）

３）タイトルページ（１枚目）には、論題、著者名、著者の所属と肩書き（大学院生に場合には修士課程在学中か博士課程在学中かを明記のこと）、著者の電子メールアドレスのほか、必要に応じて論文の性格（学会発表の経緯など）や謝辞を記載。「COE の研究成果である」といえる場合には必ずその旨を記載する。なお、日本語論文の場合は、論題（メインタイトルおよびサブタイトル）ならびに著者名の英語表示もページ下方に適宜記載する（当該論文には印刷しないが、英文ワーキングペーパー末尾に付ける既刊一覧表で必要となるため）。

４）その次のページ（２枚目）には、論題、著者名、概要、キーワード（4-6 つ程度）を記載。概要は必須とし、一つのパラグラフで記載する。その長さは 7-12 行（日本語論文または中国語論文の場合は 250 字 -400 字程度、英文論文の場合は 150 語程度）を目安とし、単に論文の構成を記述するのではなく分析手法や主な結論など内容面での要約も必ず記述する。なお、中国語論文の場合の概要は、中国語に加え、英語または日本語でも付けること。

５）本文は、その次のページ（３枚目）から始める。

６）タイトルページを第１ページとし、論文全体に通しページ（下方中央）を付ける。

７）注は、論文全体として通し番号をつけ、該当ページの下方に記載する（論文の最後にまとめて記載するのではなく）。

８）図と表は区別し、それぞれ必ずタイトルをつける。またそれぞれ通し番号をつける。それぞれの挿入箇所を明示する（図表自体は論文末尾に一括添付する）か、あるいは本文中に直接はめ込むか、いずれでもよい。

９）引用文献は、本文の最後にまとめて記載する。その場合、日本語文献、外国語文献の順。日本語文献は「あいうえお」順、外国語文献は「アルファベット」順。

10）文献リストには、引用した文献のみを記載し、引用しなかった文献は記載しない。

11）論文の長さは、特に制約を設けないが、研究論文として最も一般的な長さと考えられるもの（本文が 15-30 ページ程度）を目安とする。

10.（投稿要領の改訂） 投稿要領の最新時点のものは、随時、当 COE のウエブページに掲載します。

論文の投稿先： coe2-wp@sfc.keio.ac.jp
論文冊子の入手その他： coe2-sec@sfc.keio.ac.jp
論文の PDF 版（COE ウエブページ）： http://coe21-policy.sfc.keio.ac.jp/