Title	イベントリスクに対するデリバティブズ契約
Sub Title	
Author	森平, 爽一郎(Moridaira, Sōichirō)
Publisher	慶應義塾大学大学院政策・メディア研究科
Publication year	2003
Jtitle	総合政策学ワーキングペーパーシリーズ (Policy and governance working paper series). No.4
JaLC DOI	
Abstract	伝統的なデリバティブズ理論は、市場で取引が活発になされている資産の「価格変動」リスクを対象とした契約の価格決定理論を議論してきた。これに対し本稿では、政治、社会、災害などに関するイベント（出来事）が発生するかどうか、またその発生回数が不確実であることをリスクとしてとらえ、そうしたリスクに関するデリバティブズ契約の均衡価格を検討した。このために、1）イベント発生リスクを計数過程ととらえ、2）イベント自身が市場で取引されていないことによる非完備市場性を考慮した価格決定原理としてEsscher 変換を用いた。この結果、オプション価格決定理論として有名なブラック＝ショールズ・モデルとは大きく異なる結果を得た。また、この新しいモデルを用いて、銀行や上場企業のデフォルト件数、天候に関する現物、先物、オプション価格を、実際のデータを用いて示した。
Notes	21世紀COEプログラム「日本・アジアにおける総合政策学先導拠点」
Genre	Technical Report
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=BA76859882-00000004-0001

総合政策学ワーキングペーパーシリーズ　No. 4

イベントリスクに対するデリバティブズ契約

森平爽一郎 *

2003 年 11 月

21 世紀 COE プログラム
「日本・アジアにおける総合政策学先導拠点」
慶應義塾大学大学院 政策･メディア研究科

*　慶應義塾大学大学院 政策･メディア研究科／総合政策学部（mori@sfc.keio.ac.jp）

イベントリスクに対するデリバティブズ契約

森平爽一郎

【概要】

　伝統的なデリバティブズ理論は、市場で取引が活発になされている資産の「価格変動」リスクを対象とした契約の価格決定理論を議論してきた。これに対し本稿では、政治、社会、災害などに関するイベント（出来事）が発生するかどうか、またその発生回数が不確実であることをリスクとしてとらえ、そうしたリスクに関するデリバティブズ契約の均衡価格を検討した。このために、1）イベント発生リスクを計数過程ととらえ、2）イベント自身が市場で取引されていないことによる非完備市場性を考慮した価格決定原理として Esscher 変換を用いた。この結果、オプション価格決定理論として有名なブラック＝ショールズ・モデルとは大きく異なる結果を得た。また、この新しいモデルを用いて、銀行や上場企業のデフォルト件数、天候に関する現物、先物、オプション価格を、実際のデータを用いて示した。

キーワード：イベントリスク、Esscher 変換、デリバティブズ、オプション、先物、ポアソン分布、混合分布、デフォルトオプション、天候デリバティブズ

はじめに [1)]

株、債券、為替など多くの金融資産は、その価格あるいは収益率の確率変動の大きさでリスクを表現する。価格や収益率は連続的な確率変量である。確率ボラティリティー・モデルのように不連続なジャンプ過程を議論する場合もあるが、あくまでもその基本は価格や収益率水準の変動をリスクと考える。これに対し、多くの経済・社会・政治変数においては、イベントの発生が不確実なことがリスクと認識される場合が多々ある。これをイベント発生によって引き起こされたリスク（Event Driven Risk）とよぶ。

たとえばアジア経済危機といわれている広範な政治危機があり、それを反映して、アジア各国における株価暴落、為替レートの切り下げ、商品価格の急落があった。また、不動産市場では、最近の空室数の増加が賃料の下落を招き、さらには賃料、したがって不動産価格の下落を招いている。

この論文では、こうしたイベントが発生するかどうか、とりわけ、イベント発生回数の不確実性を確率過程論における計数過程（Counting Process）としてとらえ、その不確実性に対して保証金の支払いがなされるような、イベントリスクに注目したデリバティブズ契約の評価問題を議論する。具体的にはイベントリスクを保証する現物、先渡（先物）、オプション契約の均衡価格決定問題を考える。

しかし、こうしたイベント発生回数に対するデリバティブズの評価に当たって、デリバティブズ価格決定の標準理論ともいうべきブラック＝ショールズ＝マートン流の方法論を用いることはできないことに注意する必要がある。なぜならば、1）イベント発生回数は離散的な確率変数と考えるべきである。株価、金利、為替レートといった連続確率変数ではない、2）株や債券あるいはそのデリバティブズと異なり、こうしたイベントリスクの多くは市場で取引されていないし、またそのデリバティブズの取引もほとんど行なわれていない。このような場合市場は、不(非)完備（Incomplete）になり、デリバティブズ契約からのペイオフは原資産と安全資産で合成することができない。そのため、無リスク・ヘッジポートフォリオを作成できないし、その結果、完備市場での測度変換に依拠するブラック＝ショールズ＝マートン流の価格決定方法を用いることができない。

われわれはこの二つの問題に対して、1）イベント発生回数を計数過程（Counting Process)、とりわけポアソン過程と考え、2）リスク中立評価方法として Esscher 測度にもとづき評価することを考える。

この論文の構成は以下のとおりである。第 1 節で、なぜイベントリスクを考慮したデリバティブズ契約が必要であるかをいくつかの事例を通して考える。第 2 節で、イベント発生回数のモデリングに必要となる、ポアソン過程と Esscher 測度変換について説明する。第 3 節で、こうした仮定のもとで、イベント発生回数に対する保証金の支払いを行なう現物、先渡し、オプション契約の均衡価格を導く。第 4 節で、イベント発生過程を記述する標準的なポアソン過程の基本的な仮定を緩めたときにどのようなことがいえるのかを説明する。最後に、要約とさらなる拡張モデルの可能性を示すことにする。

---

1) 2003 年 6 月武蔵大学における日本ファイナンス学会発表において寄せられた武蔵大学、神楽岡優昌教授からのコメントに感謝する。もちろん、ありうるべきあやまりは筆者のものである。なお本稿では、イベント数がポアソン分布に従うときの現物、先物、オプション価格決定モデルについて議論した。イベント数が二項分布に従う時の結果については、森平（2003）を参照されたい。

1　イベント･オプション契約の事例

1.1　不動産ファイナンス

不動産投資あるいはその証券化資産への投資において、金融資産の場合とは異なるリスクに期前償還、空室、デフォルトリスクなどがある。これらはいずれもイベントリスクと考えることができる。

期前償還は不動産を担保とする融資の満期前償還に関するリスクである。期前償還は約定金利と借換え市場金利との差によって引き起こされる債券オプションとみなし分析することも可能であるが、金利以外のさまざまなマクロ経済、社会・人口学的要因によって引き起こされる。そのため、たとえば Tarous and Schwartz(1993)のように、住宅ローンの融資ポートフォリオ中の期前償還した融資数がポアソン分布に従うと仮定して、期前償還権の分析が行なわれる。空室は不動産投資に特有のリスクであるが、特定の不動産物件を考えたときに、空室リスクは、保有戸数中に何件の空室数があるかで測定できる。空室保証、サブリース、賃料保証などとよばれる空室リスク保証の価値は、森平(2003)に示されたように空室数が離散分布、たとえば、ポアソン、二項分布、負の二項分布などに従うと考えて分析を行なうことができる。不動産ポートフォリオにおける保有あるいは融資物件の倒産もまたイベントリスクであると考えることができる。

1.2　信用リスク

信用リスクは、不確実なデフォルトの件数と、デフォルトが生じたという条件の下での損害額の大きさによって測定することができる。損害額の見積もりは、回収率の測定が困難であることにともない容易ではない。そのため、店頭市場における信用リスクデリバティブズのなかには、倒産件数のみに注目して、その不確実性に対するヘッジあるいは投機目的のための取引が行なわれている。たとえば、「東証 1 部上場の流通業に属する企業の倒産数がある一定数（行使数）を超えたときに、1 社あたりの倒産に対してあらかじめ決められた保証金額を支払う」といった倒産件数オプション契約である。従来の信用保険では倒産が生じたときに、売掛金や保証人による保証額の一定割合を支払うものが多かった。しかし、倒産時損失額は、回収に伴う法規制や回収努力、回収期間、担保物権の市場価値の不確実性などにより、その見積もりが困難である。そのため、大型の倒産にあっては、倒産というイベントに注目したリスク管理が重要になろう。

1.3　カントリー（ソブリン）リスク

国際的な事業展開にともなうカントリーリスク、あるいは国際分散投資におけるソブリンリスクをどう測定するかはきわめて困難である。なぜならばこうしたリスクは異なる国の経済状況の違いだけでなく、政治体制や文化の違いによって生じると考えることができるからである。そのため、多様な要因を考慮したカントリーリスク指数が開発されている[2)]。こうした指数の上に書かれたデリバティブズ契約も、カントリーリスクをヘッジするための重要な手段となろう。しかし、カントリーリスク

2) たとえば、Erb 他「1996」を参照のこと。

指数は、データ収集上の問題から、その発表が実態より遅れること、さらにはすべてのカントリーリスクを網羅できないことから生じる信頼性に問題がある。このことから、その適用は実際には困難である。これに対し、ストライキ、暴動数、政体（政権）の変化回数で捕らえることができる政治的イベントはその特定が容易であり、メディアを通じた速報性がある。そのためこうした特定の政治的イベントの発生可能性、回数に注目したデリバティブズ契約を考えて、その評価を行なうことのほうが意味があると考えられる。

1.4　大災害リスク（CAT Risk）と天候リスクのデリバティブズ

台風、地震、竜巻などにともなうリスクは従来損害保険の分野でそのリスクの引き受けが行なわれてきたが、最近、デリバティブズ契約による処理がなされるようになってきた。いわゆる大災害デリバティブズ（CATastrophic Derivatives）である。その取引はシカゴ商品取引所で標準化されたものがすでになされている。また、その均衡価格に関する研究は盛んに行なわれているが、他方市場での取引は活発とはいえない。これは、大災害が生じたのちのマクロ的な被害額算定のための評価時間が設定されており、その後初めてデリバティブズ契約で決められた保証額が支払われる。そのため、風水害、火災に対する支払いが適切かつ迅速に行なわれる伝統的な損害保険契約に対して競争力が無いことが原因であると思われる。この点を克服するためには、被害額算定にかかわる部分を捨象し、ある一定の規模の範囲の大災害の発生件数（イベント発生件数）のみに注目したデリバティブズ契約を考える必要があるであろう。

こうした点は、最近取引が活発に行なわれている天候デリバティブズについてもいえる。日本における天候デリバティブズ取引は、そのほとんどが、特定の天候状態が何回生じたかを状態変数としている。たとえば、「8 月の最高気温が 32 度を超えた日数」、「8 月と 9 月の特定のヘクトパスカル以上の規模の台風の発生回数」といった例である。こうしたときにもイベントリスク・デリバティブズの研究は重要である。

2　基本モデル

2.1　イベントリスク保証の価格決定方法

こうしたイベントリスクに対する保証を行なうデリバティブズを考え、その均衡価格を導くことにしよう。しかし、この目的のために、デリバティブズ価格決定モデルとして有名な、Black and Scholes(1973)、Merton(1994)などによる価格決定方法を援用することはできない。その理由は、

1. 彼等のデリバティブズ価格決定方法は、デリバティブズ契約の対象になる原証券についての価格変動リスクを取り扱っている。価格変動リスクは連続的な確率変数によって表現できる。
2. 投資家は、原証券と派生証券を、それぞれの市場で瞬時かつ連続的に売買（空売りを含む）し、無リスクポートフォリオを作成することができると仮定している、その結果、オプションと

原証券からなるポートフォリオの価値は無リスク証券(国債)の価値に等しく、それから市場で与えられた現物証券価格を差し引けば、派生証券価格が得られることになる。

われわれが議論するイベント・デリバティブズのモデルは、これら 2 つの点で明らかに異なる。第一に、イベントリスクは価格リスクでない。つまりイベントが生じるのかそうでないのか、より具体的には、イベントの発生回数が不確実であることがリスクであり、そのときイベント数は離散的な非負の確率変数で表現できる。第二に、イベントそのものを取引する市場はもちろんのこと、そのデリバティブズ契約の売買市場も現在ほとんど存在しないのが通常である。このような場合、原証券たるイベントとそのデリバティブズを瞬時かつ自由に売買して無リスクのポートフォリオを作成することができない。つまり市場は不完備(Incomplete)である。

この論文では、この 2 つの問題に対して、1）イベントに関し非負離散型確率分布を考え、2）価格決定方法として、無リスクポートフォリオ構築の議論にもとづかない、均衡オプション価格決定方法のひとつである Esscher 変換を用いることにする。Esscher 変換は、投資家の効用関数にもとづくという意味で経済的な意味づけをイベント・デリバティブズ価格に与えることができるという利点のほかに、もし現物のイベント保証取引市場が整備されていれば、言い換えるならば、現物イベント保証価格がマルチンゲール確率過程に従うならば、イベント保証のデリバティブズ価格は、未知の効用関数や分布パラメータに依存しないことを示すことができる。その意味で、Esscher 測度変換による価格決定は、たとえば、ブラック＝ショールズ・モデルを含む、より一般的な価格決定モデルである。

2.2　Esscher 変換による価格決定：その概略

Esscher 測度変換による価格決定とは、イベントに関する主観的な確率（P 測度）を、リスク中立的な確率（Q 測度）に変換するにあたり、次のような変換を試みることに等しい[3)]。

$$\mathrm{P}_r^{\mathbf{Q}}(X=k)=\left(\frac{e^{hX}}{E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{hX}\right]}\right)\mathrm{P}_r^{\mathbf{P}}(X=k) \tag{2.1}$$

この式の直感的な意味は次のとおりである。この式の右辺の PrP(・)は投資家の主観的なイベント確率である。これを、(・) 内の示される重みによって、リスク中立的な確率 PrQ(･)に変換をしようとすることに他ならない。重みは分母分子に指数関数が表れることから必ず非負の値をとり、重みそれ自身の期待値は 1 になることから、ゼロと 1 の間を取ることがわかる。つまり等価(Equivalent)な測度変換である。

実数パラメータｈは投資家の効用関数から計算される絶対的危険回避度(a)にマイナス符号をつけたものに等しいことを示すことができる。われわれの事例のように、離散型の確率変数ｘと、効用関数は負の指数型の効用関数、つまり絶対的危険回避係数が一定の分布であるとの組み合わせを考え、価

3) Esscher 変換によるデリバティブズの価格決定原理については、多くの文献があるが、代表的文献として、Gerber and Shiu(1996)が参考になる。

格変動リスクに対して開発された Esscher 変換を、イベントリスク、とりわけイベント発生回数の確率過程、つまり計数確率過程（Counting Process）に拡張した計数オプションモデルを示す。

2.3　イベント保証契約とその現物、先物、オプション契約の均衡価格

イベント保証契約を特定化しよう。イベントの発生 1 回あたりの固定的な約定保証金額を R 円とし、この保証金額に対する保証比率を β（0< β≦ 1)、保障期間を T 期間とする。これらはイベント・デリバティブズの契約で事前に決まったものである。T 期間後の不確実な累積イベント発生回数を XT 回とすると、T 期間「後」に支払われる不確実な保証金額は、次のようになる。

$$(\beta R)\tilde{X}_T \tag{2.2}$$

(1)イベント保証の現物価格

もしこのイベント保証を取引する現物市場があれば、その現物価格は上の式で示される賃料保証金額の期待現在価値、

$$V_0(T) = e^{-r_f T}\beta R \cdot E_0^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_T\right] \tag{2.3}$$

によって求められるであろう。ここで、rf は年あたり無リスク金利を示し、exp{ rfT}は T 期間後の 1 円を現在価値に引き戻すための現在価値係数である。期待イベント数を求める場合、投資家の主観的なイベント確率 P でなく、経済的に意味のあるイベント保証の均衡価格を求めるためにリスク中立確率 Q を用いていることに注意しなければならない。

式(2.3)はまた次のように書き直すことができる。

$$\left(\frac{V_0(T)}{1}\right) = E_0^{\mathbf{Q}}\left[\frac{\beta R\tilde{X}_T}{B_0(T)}\right] \tag{2.4}$$

ここで、右辺の分母は、現在時点(t=0)で 1 円を確定利付き証券に投資したときに、イベント保証の満期(t=T)の価格、B0(T)=exp(-rfT)を表している。この結果は、イベント保証の現在(V0(T))と将来時点の価格(β RXT)を確定利付き証券のキャシュフローで割って表した相対価格が、平均的に見て、傾向(Trend, Drift)を有しないことを示している。このことは、イベント保証の現物価格がマルチンゲール性を有することを意味する。Samuelson(1965)、(1973)が示したように、証券価格がマルチンゲール性を有するためには、市場でその証券の取引が活発に行なわれることが必要条件の 1 つである。 現物価格が、式(2.3)あるいは式(2.4)によって表現できるかどうかは、後で示すように、イベント保証のデリバティブズ価格が投資家のリスク選好やイベント数分布の平均(位置)パラメータに依存しない結果を導くための重要な条件となる。

(2)イベント保証の先物契約[4)]

先物契約（Futures contract）とは、現在から TF 期間後にイベント保証を得ることを現在時点で約束をする契約である。そのような契約の価格、先物契約価格を先物価格とよび、それは単に、先物満期(t=TF)時点の現物価格の現時点(t=0)でのリスク中立的な期待値に他ならない。つまり、

$$F_0(T) = E_0^Q\left[\tilde{V}_{T_F}\left(T\right)\right] = E_0^Q\left[e^{-r_f(T-T_F)}\beta R \cdot \tilde{X}_T\right] \tag{2.5}$$

で先物価格を示すことができる。もし、現物市場価格が、式(2.3)のように決定されているならば、つまりマルチンゲール性が成立していると、上の式は、T 期満期の現物価格の TF 時点の将来価値で表すことができる。

$$F_0(T) = V_0\left(T\right)e^{r_f T_F} \tag{2.6}$$

(3)イベントオプション契約

さらに、イベント保証の（ヨーロピアン）オプション契約も考えることができる。これは、いまから T 期間後あるいは T 期間にわたるイベント数が K 回を超えると保証料（R）の一定割合（βパーセント）を保証しようとするものである。K をオプション契約の用語にならって行使（最低）イベント数とすると、T 期間後のこのオプション契約からのペイオフは、

$$\tilde{C}_T = \left(\beta R\right)Max\left[\tilde{X}_T - K, 0\right] \tag{2.7}$$

となる。Max[・]は括弧内の最大値をとることを意味する演算子である。つまり、将来発生イベント数から行使（最低）イベント数を引いたものとゼロの大きい方に、保証賃料（β R）をかけたものが T 期間後のこのイベント契約からのキャシュフローである。逆に、イベント数が行使イベント数を下回ったときは保証が得られないことを意味する。

このイベントオプション価格は、上の式のキャシュフローの測度 Q のもとでの期待現在価値としてもとめることができる。つまり、

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-r_f \cdot T}\left(\beta R\right)E_0^{\mathbf{Q}}\left[Max\left[\tilde{X}_T - K, 0\right]\right] \\ &= e^{-r_f \cdot T}\left(\beta R\right)E_0^{\mathbf{P}}\left[Max\left[\tilde{X}_T - K, 0\right]\left(\frac{e^{h\tilde{X}_T}}{E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{h\tilde{X}}\right]}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。

---

4) ここでは、無リスク金利の存在を仮定しているので、先物契約と先渡し(Forward)契約の価値は同じになる。

3．ポアソン過程のもとにおけるイベント・デリバティブズの価値

これまでは、イベントの発生分布に関して何らの仮定をおかなかった。次に、これらのイベント保証契約の具体的な均衡価格を、イベント発生回数がポアソン仮定に従うと考えたときに、どのようになるか考えてみる。

3.1　イベント確率分布

将来のある時点（T）までのイベント数に関する保証契約を考える。各期のイベント数が互いに独立、かつ初期時点でゼロであれば、S 期と s+t 期の間の t 期間のイベント発生数（Xt）が k 回である確率は、

$$\Pr\left(\left(\tilde{X}_{s+t} - X_s\right) = k\right) = \frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^k}{k!}$$

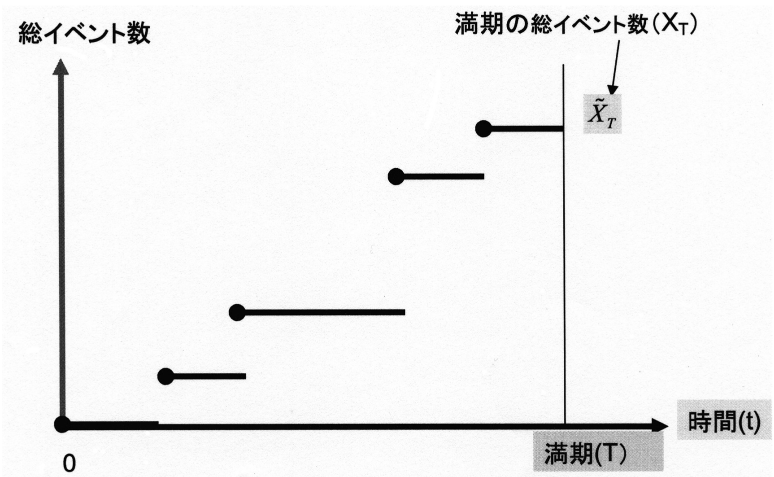
で示される[5]。ここで、λはポアソン分布のパラメータを示しその平均と分散にあたる。t=0 から出発して、将来 t ＝ T 時点までの総イベント数は、s=0 のとき X0=0 であるので、次の式で示されるポアソン「過程」に従い、その期待値は次のようになる。

$$\Pr^{\mathbf{P}}\left(\tilde{X}_T = k\right) = \frac{e^{-\lambda T}\left(\lambda T\right)^k}{k!} \qquad E_0^{\mathbf{P}}\left[\tilde{X}_T\right] = \lambda T \tag{3.1}$$

3.2　イベント保証の現物価格

イベント数がポアソン過程に従うとき、将来 t=T 時点までの累積イベント数は、たとえば、図 1 イベント数がポアソン過程に従うときの現物イベント保証のように説明できる。現物価格は、危険中立確率の下での期待補償額の現在価値になる。

図 1　イベント数がポアソン過程に従うときの現物イベント保証



5) 最初の時点で満室、つまりイベントがゼロであるこことは厳しい仮定でない。もしそうでなれば、初期時点のイベントを考慮せずに、あたかも全室満室であるかのように考えて分析を進めればよい。

つまり、VT(T)を満期のイベント保証金とすると、そのゼロ期の現物価格は次式を満足する。

$$V_0(T) = e^{-r_f T} E_0^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{V}_T(T)\right] = e^{-r_f T} E_0^{\mathbf{P}}\left[\tilde{V}_T(T)\left(\frac{e^{h\tilde{X}_T}}{E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{h\tilde{X}_T}\right]}\right)\right] = e^{-r_F T}\beta R E_0^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_T\right] \tag{3.2}$$

Esscher 測度変換、つまり危険中立確率を用いた期待イベント数は、Q 測度の下における積率母関数を用いて、

$$\begin{gathered} M_x^{\mathbf{Q}}(z) = E_0^{\mathbf{Q}}\left[e^{z\tilde{X}_T}\right] = E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{z\tilde{X}_T}\left(\frac{e^{h\tilde{X}_T}}{E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{h\tilde{X}_T}\right]}\right)\right] = \frac{M_x^{\mathbf{P}}(z+h)}{M_x^{\mathbf{P}}(h)} \\ E_0^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_T\right] = \frac{\left.\dfrac{\partial M_x^{\mathbf{P}}(z+h)}{\partial z}\right|_{z=0}}{M_x^{\mathbf{P}}(h)} = \frac{\exp\left\{(\lambda T)\left(e^h-1\right)\right\}(\lambda t)e^h}{\exp\left\{(\lambda T)\left(e^h-1\right)\right\}} = (\lambda T)e^h \end{gathered} \tag{3.3}$$

と計算される。実確率(P)のもとでは期待イベント数がλ t であったのに対し、Esscher 測度変換を用いた危険中立的な期待イベント数は(λ t)exp{h}となっている。つまり、リスク回避度(a)を表す Esscher パラメータ(h=－a)によってポアソン分布パラメータ(λ t)が調整されている。もし投資家がリスク回避的（h<0）であれば、イベント発生回数の期待値は低くなる。もしリスク中立的(h=0)であれば、実確率とリスク中立確率測度のもとでの、期待値は同じである。

この結果、現在(t=0)から T 期間後の総イベント数に対する保証金のβパーセントを支払う契約の価値は、

$$V_0(T) = E_0^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_T\right] = e^{-r_f T}\beta R\left[(\lambda T)e^h\right] \tag{3.4}$$

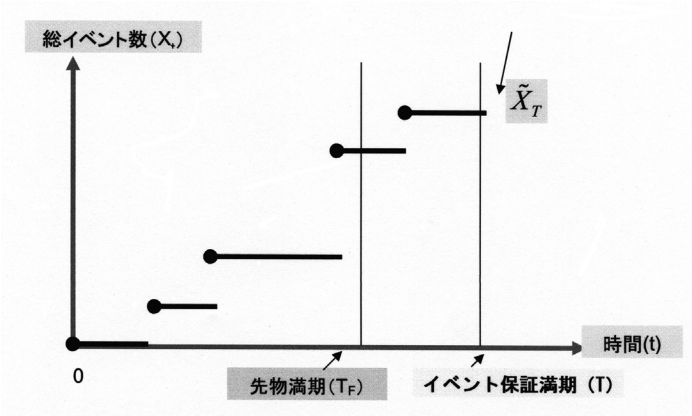
となる。イベント保証料は、年金利（rf）、イベント保証期間(T)、単位期間あたりの平均イベント数(λ)、投資家のリスク回避度(h=－a)に依存することがわかる。もし、イベント保証の現物取引が活発に行なわれていて、その市場価格（V0(T)）がわかっているならば、それから Esscher パラメータ(h=－a)を逆に推計できる。これをマルチンゲール Esscher パラメータ(h*)とよぶことにする。このとき、未知のパラメータは、したがって、右辺の既知のパラメータによって次のように表される。

$$(\lambda T)e^{h^*} = \frac{V_0(T)e^{r_f T}}{\beta R} \tag{3.5}$$

3.3　イベント保証の先物取引価格

TF 期間後に始まる満期 T 期のイベント保証契約を、現在時点で結ぶことを考えてみよう。このことは図 2　イベント保証の先物契約で説明できる。

図 2　イベント保証の先物契約



先物価格は、TF 時点における満期が T 期の現物イベント保証価格の期待値にほかならない。つまり、

$$F_0\left(T_F,T\right)=E_0^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{V}_{T_F}(T)\right]=E_0^{\mathbf{Q}}\left[e^{-r_f(T-T_F)}\beta R\tilde{X}_T\right]=e^{-r_fT}\beta R\left[\left(\lambda T\right)e^h\right]e^{r_f(T_F)} \tag{3.6}$$

となる。他方、イベント保証の現物価格は、式(3.4)を用いると未知のパラメータに依存しない形、

$$F_0\left(T_F,T\right)=V_0\left(T\right)e^{r_FT_F} \tag{3.7}$$

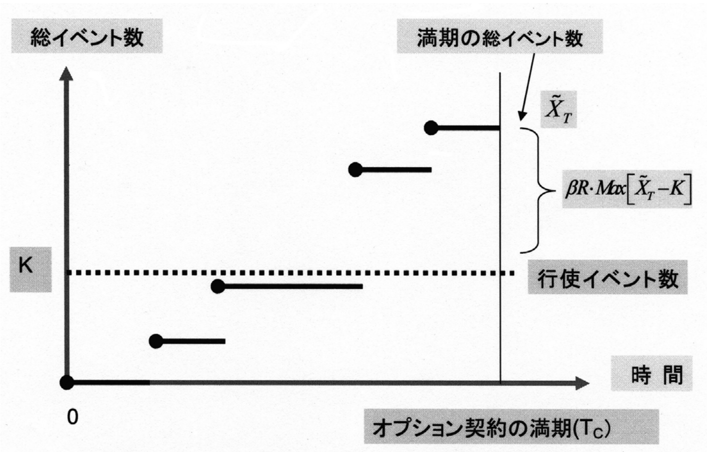
で決まる。つまり、先物価格は T 期満期の現物イベント保証価格の先物満期時点の将来価値に等しいという良く知られた結果が得られる。

3.4　イベント保証オプション

イベントのコール・オプションは、現在から将来 T 時点までの間の累積イベント数が K 回以上であるときに基本保証額の β パーセントを保証する契約の現在時点の価値である。

この関係は図 3　イベント（保証）オプションの満期時(TC)のペイオフで示されている。

図 3　イベント（保証）オプションの満期時(TC)のペイオフ



オプション価格は、リスク中立確率のもとで計算された期待キャッシュフローの現在価値にほかならない。したがって、数学付録に示されたような計算過程をへて、次の結果

$$C_0 = e^{-r_f \cdot T_c} \beta R \left\{ E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} \right] \left[1 - \Lambda\left(K-1, \left(\lambda T_c \right) e^h \right) \right] - K \left[1 - \Lambda\left(K, \left(\lambda T_c \right) e^h \right) \right] \right\} \tag{3.8}$$

が得られる[6]。ここで、右辺の２つのΛ(・)は、ポアソン分布のパラメータが(λ t)exp{h}であり、イベント数の上限がK、あるいはK－１であるときのポアソン分布の累積密度関数である。

この式は未知の分布パラメータ(λ)、投資家のイベント数に関する選好(h)と期待値（EQ[・]）に依存している。しかし、イベント保証の現物価格(3.5)にもとづいて(λ t)exp{h}を既知のパラメータ(rf,T,β,R,V0(TC)で置き換えることにより、オプション評価式は、

$$C_0 = V_0(T_c)\left[1 - \Lambda\left(K-1, \left(\frac{V_0 e^{r_f T_c}}{\beta R} \right) \right) \right] - e^{-r_f \cdot T_c} K \beta R \left[1 - \Lambda\left(K, \left(\frac{V_0 e^{r_f T_c}}{\beta R} \right) \right) \right] \tag{3.9}$$

となる。未知のパラメータや投資家の期待は、この場合消失したのでなく、現物価格に内在し、表面的に未知パラメータに依存しない形になっている。

この式はブラック＝ショールズ・モデルとよく似た形をしている。その解釈は、次のとおりである。

左辺で示されるイベントオプションの均衡価格（保証額）は、右辺第1項で示されるTC期満期のイベント保証の現物価格(V0(TC))を現在時点で(1－Λ(・))契約単位購入した金額から、右辺第2項で示されるこのオプション契約で保証されていない契約賃料分の期待現在価値を差し引いたものになっている。リスク中立的世界では、イベント保証の現物契約の購入数は、あたかも(as if)1単位で無く、それよりも小さい1単位未満だけ購入することを意味する。

右辺の第2項はこの契約が保証しないイベント発生回数(K)に対する保証金額（KβR）にイベント数が危険中立的世界のもとでK回を越える確率をかけたものの現在価値である。つまり損害額の現在価値を示している。この結果、オプションは、単にこの2つの価値の差額として求められている。

言い換えれば、第2項で表した金額の借り入れを行ない、右辺第一項で示されるイベントの現物価格×イベント回数だけの現物契約を結べば、イベントオプションを合成できることを示している。しかし、イベントの現物が取引されていない場合こうした合成戦略、言い換えれば、ヘッジ戦略は困難であるといえる。

4　パラメータ不確実性：幾何分布するイベント数の場合

ポアソン過程によってイベントリスクを表現することを考えてきたが、実際の計数過程をポアソン過程によって表現することは、特定のイベントにとって必ずしも適切でない場合がある。たとえば、

6) 導出に関しては、数学付録を参照のこと。

ポアソン過程では、その平均と分散が等しいことを要求する。多くのイベントリスクでは、期間（日、週、月、四半期、年など）のとり方にも依存するが、イベント発生回数の平均より分散のほうが大きい場合が多い。

こうした仮定の意味、あるいはそうした仮定を緩めたときのイベントの確率過程とオプション価格がどのようになるかを考えてみる。ここで、ポアソン・パラメータλが確率的に変動することを考える。たとえば、企業倒産を不確実なイベント考えたときに、異なる倒産企業は異なる信用リスクを保持していると考える。このように考えると、イベントリスクのポアソン確率過程は混合ポアソン分布として以下のように表現できる[7]。

$$\mathrm{Pr}^{\mathbf{P}}\left(\tilde{X}_T = k\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda T}\left(\lambda T\right)^k}{k!} dF\left(\lambda\right) \tag{3.10}$$

もし、分布Fがパラメータγとβのガンマ分布をすると仮定できると、イベントがK回生じる確率は、次の負の2項分布で表現できる。

$$\mathrm{Pr}^{\mathbf{P}}\left(\tilde{X}_T = k\right) = \binom{\gamma + k - 1}{k} \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\gamma} \left(\frac{t}{\beta + t}\right)^{k} \tag{3.11}$$

この場合、リスク中立確率はqから、Esscherパラメータをもちいて、次のように変換される。

$$qe^h = \left(\frac{\beta}{\beta + t}\right) e^h$$

もし、ポアソン・パラメータλが指数分布をすると仮定できるとしよう。このことは、式(3.11)においてγ＝1とおくことを意味し、イベント数は幾何分布に従う。このときイベントの平均と分散は、

$$E^P\left[N\right] = \left(\frac{q}{p}\right) \qquad V^P\left[N\right] = \left(\frac{q}{p^2}\right) = \frac{1}{p} E^P\left[N\right] > E^P\left[N\right] \tag{3.12}$$

となり、分散は平均の1/p乗になり、p<1であるので、分散が平均より大きくなり過大分散問題をよく表現できる。また、イベント生起確率の標本推定値は、簡便的にこの式からイベント数の平均を標本分散で割って計算できることがわかる[8]。

イベントが幾何分布に従うときの、イベント保証の先物価格と現物価格は次のようになる。

$$F_0\left(T_F\right) = E^{\mathbf{Q}}\left[P_0 N\right] = P_0\left(\frac{qe^h}{1 - qe^h}\right) = V_0\left(T\right) e^{r_F T} \tag{3.13}$$

上の式の最後の結果は、次の先物契約の価値を決める式を用いて得られる。

7) 混合ポアソン分布の一般理論については、Grandell (1997)を参照のこと。

$$V_0(T) = e^{-r_F T} P_0 E_0^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_T\right] = e^{-r_F T} P_0 \left(\frac{qe^h}{1-qe^h}\right) \tag{3.14}$$

さらに、このときのコール･オプション価格は、

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-r_F \cdot T_c} E_0^{\mathbf{Q}}\left[P_0 \tilde{X}_{T_c}\right] \Pr^{\mathbf{R}}\left[\tilde{X}_{T_c} \geq K\right] - e^{-r_F \cdot T_c} K P_0 \Pr^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_{T_c} \geq K\right] \\ &= e^{-r_F \cdot T_c} P_0 E_0^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_{T_c}\right]\left[\Pr^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_{T_c} \geq K\right] + k \Pr^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_{T_c} = K\right]\right] - e^{-r_F \cdot T_c} K P_0 \Pr^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_{T_c} \geq K\right] \end{aligned} \tag{3.15}$$

ただし、ここで右辺第 1 項と第二項の累積イベント数が行使数 K を上回る危険中立確率は、

$$\Pr^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_{T_c} \geq K\right] = \left(\frac{T_c e^h}{\beta + T_c}\right)^K$$

となり、イベント数が行使件数 K に等しいリスク中立確率は次のように表される。

$$\Pr^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_{T_c} = K\right] = \left(qe^h\right)^{K-1}\left(1-qe^h\right)$$

もし、現物価格がマルチンゲールに従えば、オプションはより簡単になって、

$$C_0 = V_0\left[\Pr^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_{T_c} \geq K\right] + k \Pr^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_{T_c} = K\right]\right] - e^{-r_F \cdot T_c} K P_0 \Pr^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_{T_c} \geq K\right] \tag{3.16}$$

となり、オプション価格は陽に未知のパラメータに依存しない。

5．応用例

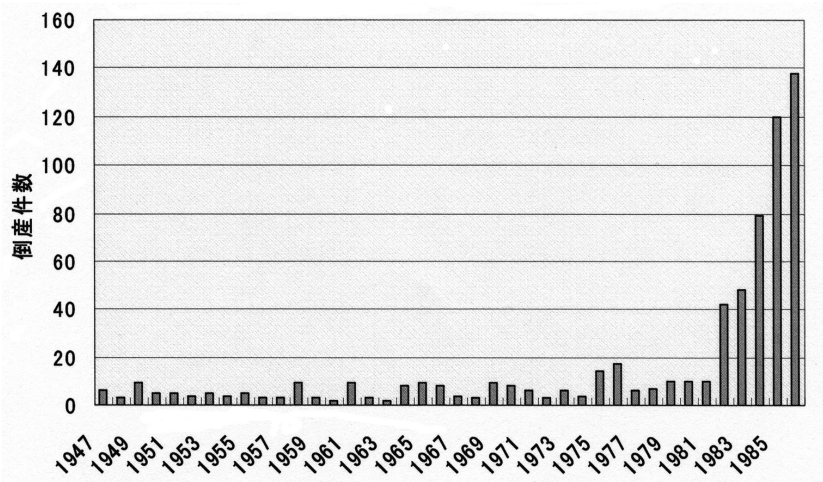
イベントリスクに関するデリバティブズについて、実際のデータを用いた簡単な応用例のいくつかを示す。

5.1　信用リスクデリバティブズ：米国における銀行倒産:

図 4　米国の銀行倒産件数： 1947-1986（Davutyan(1989)）によって示された、1947 年から 1986 年までの米国の年あたり銀行倒産数データを用いて、満期 1 年の現物、先物、コール・オプション価格を求めた。

8) しかし、このようにすると、一般的には、相当な過大分散でない限り、イベント生起確率の推定値は相当過大に推定されるようである。

図 4　米国の銀行倒産件数： 1947-1986　 Davutyan(1989)



式(3.12)から求めた推定イベント生起確率 p の推定値は、16.225/898.281=0.018 となり、年あたり無リスク金利 0.05、銀行倒産 1 件あたりの保証料を 100 単位、Esscher パラメータ;h=-0.01 とおくと、式(3.14)によって、現物価格は 3,330 単位、式(3.13)により先物価格は 3,501 単位となった。年あたり行使破綻銀行数を 3 件としたときの、満期一年のコール・オプション価格は、式(3.16)から 308.4 単位となった。なお、1986 年以前までの銀行倒産件数データを用いたときの結果は、次の表に示されている。

表 1　米国銀倒産件数に対する現物・デリバティブズ価格

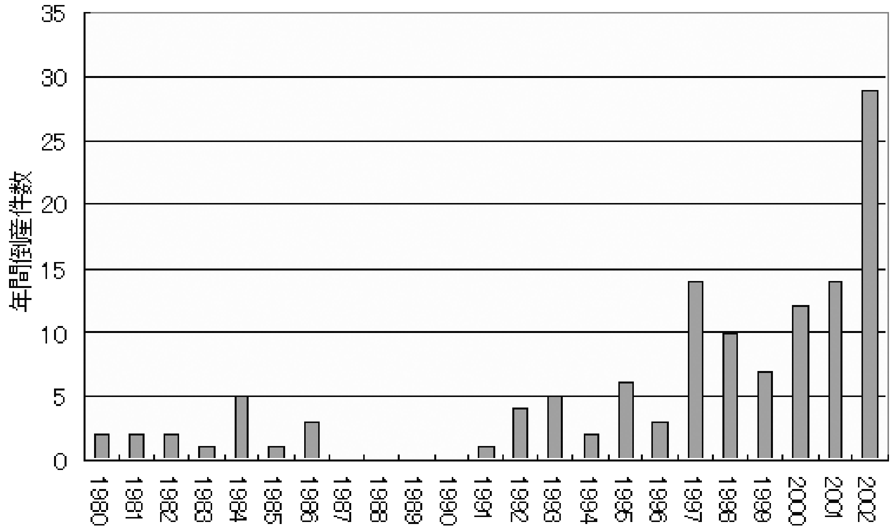
この年までの倒産件数統計量	平均	標準偏差	分散	分散/平均	推定p	均衡価格 先物	現物	オプション
1979	6.121	3.42	11.672	1.91	0.524	89.1	84.8	26.8
1980	6.235	3.43	11.761	1.89	0.530	87.0	82.8	25.7
1981	6.343	3.44	11.820	1.86	0.537	84.6	80.5	24.4
1986	16.225	29.97	898.281	55.36	0.018	3500.9	3330.1	308.4

こうした考え方は、銀行破綻にともない必要になる公的資金の概算額を見積もりにも有効かもしれない。

5.2　信用リスクデリバティブズ：日本の上場企業の倒産件数

日本の上場企業の倒産件数にかんして、米国の銀行倒産件数と同様な分析を試みる。倒産件数は図 5　上場企業倒産件数： 1980 － 2002 年に示されているように、バブル期からバブル破綻以降急激に増加している。

図 5　上場企業倒産件数： 1980 − 2002 年



先物・オプションの満期を 1 年、倒産 1 件あたりの保証料を 100 単位、Esscher パラメータ;h=-0.01 とおく。このときたとえば、1985 年までのバブル発生前までの倒産データを用いると、式(3.14)によって、現物価格は 63.4 単位、式(3.13)により先物価格は 66.7 単位となった。年あたり行使破綻件数（行使件数）を 3 件としたときの、満期一年のコール・オプション価格は、式(3.16)から 14.9 単位となった。ボラティリティーが低いため、現物、先物、オプション価格にそれほどの差は見られない。これに対し、パラメータ推定期間を、バブル期、バブル期以降にも拡張したときの、現物、先物、オプション価格は次のようになった。

表 2　上場企業倒産件数に関する現物、先物、オプション均衡価格

1995	6	平均	標準偏差	分散	分散/平均	推定p	先物	現物	オプション
1996	3	2.18	1.91	3.65	1.68	0.596	66.7	63.4	14.9
1997	14	2.83	3.35	11.21	3.96	0.253	284.0	270.1	115.2
1998	10	3.21	3.65	13.29	4.14	0.242	300.7	286.1	120.6
1999	7	3.40	3.65	13.31	3.91	0.256	279.6	266.0	113.8
2000	12	3.81	4.02	16.16	4.24	0.236	310.5	295.4	123.6
2001	14	4.27	4.48	20.11	4.71	0.212	354.9	337.6	136.3
2002	29	5.35	6.77	45.78	8.56	0.117	695.0	661.1	196.4

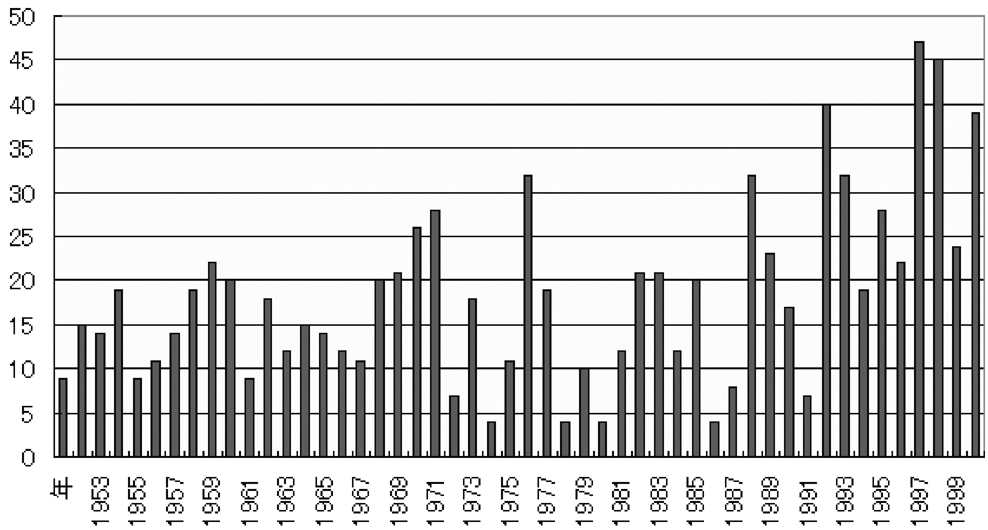
あきらかに、信用リスクの増加、すなわち倒産件数とそのボラティリティーの増加に応じて、デリバティブズ価格が急増していることがわかる。

5.3　天候デリバティブズ：高温日保証

天候デリバティブズ契約の形にはさまざまなものがあるが、天候イベントの発生回数にのみ注目した契約を考えてみよう。1953 年から 2002 年までの日立市において、30 度以上の高温日の年間日数が図 6　日立市における 30 ℃以上の年間日数に示されている[9]。30 度以上の高温日をイベントと考えた

ときのイベントリスク・デリバティブズ価格は、次のようになる。上の場合と同様な契約条件、つまり、年あたり無リスク金利 5 パーセント、銀行倒産 1 件あたりの保証料を 100 単位、Esscher パラメータ;h=-0.01 とおく。推定イベント生起確率は、18.40/107.47=0.171 となり、これから、現物価格は 434.9 単位、先物価格は 457.2 単位、行使日数を 14 日以上とすると、コール･オプション価格は、73.4 単位となった。

図 6　日立市における 30 ℃以上の年間日数



おわりに

イベントリスクを保証する現物契約は、多くの金融、非金融契約に内在している。この論文ではイベントリスクを保証する現物契約やそのデリバティブズの均衡価格の閉じた解を導出し、その経済的な意味について議論した。

イベントのデリバティブズ価格を導出するためには、価格リスクを対象とするブラック＝ショールズ・モデルをはじめとする伝統的なデリバティブズの理論を修正する必要があった。第 1 の修正点は、イベントを離散分布（二項分布）、あるいはその確率過程を計数過程(Counting Process)に従うイベントと考えたことにある。この点は、伝統的なデリバティブズ理論では、原証券価格の確率過程として連続的な確率分布、たとえば、対数正規分布を考えていたのとは大きな違いである。第 2 の違いは、イベント保証そのもの取引市場が無い、つまり、イベント保証、そのデリバティブズ、そして無リスク証券（国債）の三つの資産の内の二つをもってして、他の一つの資産のペイオフを合成できない非完備市場であることから生じる。完備市場では、デリバティブズ価格決定のための測度は唯一存在する

9) この図からあきらかに温暖化現象の浸透をみてとれる。つまり、30 度以上の年間日数は傾向をもつ。したがって、この場合は、X をイベント数とし、時間を t とすると、イベント生起確率を推定する場合、式(3.11)において、p と q が時間の関数 t であることを明確に認識し、分布パラメータを推定する必要があろう。

のに対し、不完備市場では、無数の価格決定測度が存在する。われわれは保険数理で用いられてきた Esscher 測度変換をイベントリスクの現物とデリバティブズ価格決定のために用いた。

イベントリスクに対し、それがポアソン分布に従うと考え、イベント保証の現物価格、先物価格、コール・オプション価格を求めた。もし、イベント保証の現物価格がマルチンゲール過程に従っているとすると、イベントリスクに関する先物やオプション契約は、これら未知のパラメータに依存しないことがわかった。

さらに、ポアソン過程の重要な特色である平均イベント回数がその分散に等しいという仮定が満たされない多くの社会科学上のイベントに対処するために、混合ポアソン分布を想定し、その場合のイベントリスク・デリバティブズ価格を求める試みを行なった。ポアソン・パラメータ、つまり平均イベント数が指数分布するとき、つまりイベント数が幾何分布に従うときの現物・先物、そして、オプション価格を導いた。

リスクをイベント発生回数と考えることにより、従来価格変動リスクに限定されていたリスクの評価やリスク管理をより多面的な側面へと拡張でき、さまざまな応用面が考えられる。

今後の研究課題としては、パラメータの推定問題や実証に関して考えるとともに、より広いイベントリスクの確率分布に対応したデリバティブズ価格決定問題を考える必要があろう。

数学付録

まず、原証券の確率分布について特定の分布を仮定しないときの、満期が TC のコール・オプション価格を、Esscher 測度変換を用いて導くことにしよう。

I{A}を A が真であれば 1、そうでなければ 0 をとる指示関数

$$\tilde{\mathbf{I}}_{\{A\}} = \begin{cases} 1 & if\ \ A\ is\ true \\ 0 & if\ \ A\ is\ Not\ true \end{cases}$$

とすると、コール・オプションの満期のペイオフに応じて、次のような指示関数

$$\tilde{\mathbf{I}}_{\{S_T > K\}} = \begin{cases} 1 & if\ \ \tilde{X}_{T_c} > K \\ 0 & if\ \ \tilde{X}_{T_c} \le K \end{cases}$$

を定義する。これを用いると、コール・オプション価格は、

$$
\begin{aligned}
C_0 &= e^{-r_F \cdot T_c} (\beta R) E_0^{\mathbf{P}} \left[\left(\frac{e^{h\tilde{X}_{T_c}}}{E_0^{\mathbf{P}}\left[e^{h\tilde{X}_{T_c}} \right]} \right) Max\left[\tilde{X}_{T_c} - K, 0 \right] \right] \\
&= e^{-r_F \cdot T_c} (\beta R) E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} \cdot \tilde{\mathbf{I}}_{\{\tilde{X}_{T_c} > K\}} - K \cdot \tilde{\mathbf{I}}_{\{\tilde{X}_{T_c} > K\}} \right] \\
&= e^{-r_F \cdot T_c} (\beta R) E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} \cdot \tilde{\mathbf{I}}_{\{\tilde{X}_{T_c} > K\}} \right] - e^{-r_F \cdot T_c} K (\beta R) E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{\mathbf{I}}_{\{\tilde{X}_{T_c} > K\}} \right]
\end{aligned}
$$

となる。この右辺第１項はさらに、

$$
\begin{aligned}
& e^{-r_F \cdot T_c} (\beta R) E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} \cdot \tilde{\mathbf{I}}_{\{\tilde{X}_{T_c} > K\}} \right] = e^{-r_F \cdot T_c} (\beta R) E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} \right] E_0^{\mathbf{Q}} \left[\frac{\tilde{X}_{T_c}}{E_0^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{X}_{T_c} \right]} \cdot \tilde{\mathbf{I}}_{\{\tilde{X}_{T_c} > K\}} \right] \\
&= e^{-r_F \cdot T_c} (\beta R) E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} \right] E_0^{\mathbf{R}} \left[\tilde{\mathbf{I}}_{\{\tilde{X}_{T_c} > K\}} \right] = e^{-r_F \cdot T_c} E_0^{\mathbf{Q}} \left[(\beta R) \tilde{X}_{T_c} \right] \Pr{}^{\mathbf{R}} \left[\tilde{X}_{T_c} > K \right] \\
&= V(T)_0 \Pr{}^{\mathbf{R}} \left[\tilde{X}_{T_c} > K \right]
\end{aligned}
$$

となる。最後の等式は、現物価格がマルチンゲール性を保持している場合に成立する。

次に、上の結果を用いて、原資産、つまりイベントがポアソン分布に従うときのオプション公式を導く。右辺第１項はこのとき、

$$
\begin{aligned}
&= e^{-r_F \cdot T_c} (\beta R) \left(E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} \right] - (\lambda T_c) e^h \Pr{}^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} < K - 1 \right] \right) \\
&= e^{-r_F \cdot T_c} (\beta R) E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} \right] - e^{-r_F \cdot T_c} P_T (\lambda T_c) e^h \Pr{}^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} < K - 1 \right] \\
&= e^{-r_F \cdot T_c} (\beta R) E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} \right] - e^{-r_F \cdot T_c} P_T E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} \right] \Pr{}^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} < K - 1 \right] \\
&= e^{-r_F \cdot T_c} (\beta R) E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} \right] \left[1 - \Pr{}^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} < K - 1 \right] \right] \\
&= e^{-r_F \cdot T_c} (\beta R) E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} \right] \left[1 - \Lambda\left(K - 1, (\lambda T_c) e^h \right) \right] = V_0 \Pr{}^{\mathbf{R}} \left[\tilde{X}_{T_c} > K \right]
\end{aligned}
$$

となる。他方、右辺第２項は、

$$
\begin{aligned}
& e^{-r_F \cdot T_c} K (\beta R) E_0^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{\mathbf{I}}_{\{\tilde{X}_{T_c} > K\}} \right] = e^{-r_F \cdot T_c} K \beta R \Pr{}^{\mathbf{Q}} \left[\tilde{X}_{T_c} > K \right] \\
&= e^{-r_F \cdot T_c} K (\beta R) \sum_{\tilde{X}_{T_c} = K+1}^{\infty} \tilde{X}_{T_c} \left(\frac{e^{-(\lambda t) e^h} \left((\lambda T_c) e^h \right)^{\tilde{X}_{T_c}}}{\tilde{X}_{T_c}\,!} \right) \\
&= e^{-r_F \cdot T_c} K (\beta R) \left[1 - \Lambda\left(K, (\quad) e^h \right) \right]
\end{aligned}
$$

となる。この 2 つの結果から、イベント数がポアソン分布をするときのコール・オプション公式が導かれた。イベント数が二項分布することも同様に導くことができる。

参考文献

Black, Fischer and Myron Scholes (1973) “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” Journal of Political Economy, 81(3), 637-654.

Davutyan, N. (1989) “Bank Failures as Poisson Variates: A Reappraisal,” Economic Letters, 29, 333-338.

Davutyan, N. (1995) “Bank Failures as Poisson Variates: A Reappraisal,” in Bank Failures: Courses, Consequences and Cures, Cottrell, Lawlor, and Wood, Eds. Klumer Publishers, Netherlands.

Erb, Claude B., Campbell R. Harvey and Tadas E. Viskanta. “Political Risk, Economic Risk, and Financial Risk,” Financial Analyst Journal, 1996, 52(6, Nov/Dec), 29-46.

Gerber, Hane, and S. W. Shiu (1996) “Actuarial Bridges to Dynamic Hedging and Option Pricing.” Insurance: Mathematics and Economics 18.

Grandell Jan Mixed Poisson Processes (Monographs on statistics & Applied Probability Vol.77), Chapman & Hall, 1997.

Heston, Steven L. “Invisible Parameters In Option Prices,” Journal of Finance, 1993, 48(3), 933-947.

Merton, Robert. C (1973) “The Theory of Rational Option Pricing,” Bell Journal of Economics, 4(1), 141-183.

Samuelson, P. A (1973) “Proof That Properly Discounted Present Values of Assets Vibrate Randomly,” Bell Journal of Economics, 4(2), 369-374.

Samuelson Paul A (1965) “Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly,” Industrial Management Review, Spring 1965, 6, 41-49.

Schwartz, Eduardo S. and Walter N. Torous. “Mortgage Prepayment and Default Decisions: A Poisson Regression Approach,” American Real Estate and Urban Economics Association, 1993, 21(4), 431-449.

森平爽一郎（2003）「空室保証デリバティブズの価格決定モデル」2003 年 3 月 29 日、日本不動産金融工学会、予稿集、151-170 頁。

森平爽一郎（2002）「不動産価格指数の先物とオプション：評価とヘッジング」2002 年度冬季日本金融・証券計量・工学学会、予稿集、262-271 頁。

既刊「総合政策学ワーキングペーパー」一覧 *

番号	著者	論文タイトル	刊行年月
1	小島朋之 岡部光明	総合政策学とは何か	2003 年 11 月
2	Michio Umegaki	Human Security: Some Conceptual Issues for Policy Research	2003 年 11 月
3	藤井多希子 大江守之	東京圏郊外における高齢化と世代交代 ―高齢者の安定居住に関する基礎的研究―	2003 年 11 月
4	森平爽一郎	イベントリスクに対するデリバティブズ契約	2003 年 11 月

* 各ワーキングペーパーは、当 COE プログラムのウエブサイトに掲載されており、そこから PDF 形式で全文ダウンロード可能である（但し一部の例外を除く）。ワーキングペーパー冊子版の入手を希望される場合は、電子メールで当プログラムに連絡されたい（coe2-sec@sfc.keio.ac.jp）。また当プログラムに様々なかたちで関係する研究者は、その研究成果を積極的に投稿されんことを期待する（原稿ファイルの送信先： coe2-wp@sfc.keio.ac.jp）。なお、論文の執筆ならびに投稿の要領は、当プログラムのウエブサイトに掲載されている。
当プログラムのウエブサイト　<http://coe21-policy.sfc.keio.ac.jp/>