Keio Associated Repository of Academic resouces

| | . • | | | | |
|------------------|--|--|--|--|--|
| Title | 電子サイクロトロン運動における希薄気体衝突の影響 | | | | |
| Sub Title | Effects of a dilute gas collision on the electron-cyclotron motion | | | | |
| Author | 笠井, 拓登(Kasai, Takuto) | | | | |
| | 三井, 隆久(Mitsui, Takahisa) | | | | |
| Publisher | 慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会 | | | | |
| Publication year | 2018 | | | | |
| Jtitle | 慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学 (The Hiyoshi review of natural science). No.64 (2018. 9) ,p.1- 10 | | | | |
| JaLC DOI | | | | | |
| Abstract | The mass-to-charge ratio, known as one of the important properties of the electron, is often measured by observing the electron motion in the magnetic field, called the electron-cyclotron motion. However, it is difficult to obtain an accurate value in student experiments because of errors inherent in the simple equipment. The main cause of errors is postulated to be the collisions between the electrons and helium atoms, which are enclosed in order to visualize the electron orbit using fluorescent light. We have developed the method to estimate the effects of collision and derived not only the mass-to-charge ratio accurately, but the collision cross section and the linear energy transfer to the gas. | | | | |
| Notes | 原著論文 | | | | |
| Genre | Departmental Bulletin Paper | | | | |
| URL | https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20180930-0001 | | | | |

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって 保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

電子サイクロトロン運動における希薄気体衝突の影響

笠井拓登*·三井隆久*

Effects of a Dilute Gas Collision on the Electron-Cyclotron Motion

Takuto Kasai and Takahisa Mrtsui

Summary—The mass-to-charge ratio, known as one of the important properties of the electron, is often measured by observing the electron motion in the magnetic field, called the electron-cyclotron motion. However, it is difficult to obtain an accurate value in student experiments because of errors inherent in the simple equipment. The main cause of errors is postulated to be the collisions between the electrons and helium atoms, which are enclosed in order to visualize the electron orbit using fluorescent light.

We have developed the method to estimate the effects of collision and derived not only the mass-to-charge ratio accurately, but the collision cross section and the linear energy transfer to the gas.

Key Words: mass-to-charge ratio, specific charge, e/m, cyclotron motion, gas, collision, cross section, LET, linear energy transfer

1. はじめに

サイクロトロン運動とは、磁場中で加速した電子の運動がローレンツ力により円軌道を描く 現象である。この現象はオーロラを生じる地球磁気圏内や遥か彼方の宇宙でも観測され、遠隔 観測でしか知るすべのない宇宙を探求する上で不可欠な観測量になっている。また、金属内の 自由電子でも観測され、さらに電子の物質波としてのコヒーレンス長が円周長より長い場合に は軌道が量子化され(ランダウ準位)、基礎物理学・物性物理学においても重要な役割を果た している。

一方,電子は電流,化学反応,生命現象など世界の多様性を担う最も重要な粒子であり,そ

^{*} 慶應義塾大学医学部(〒 223-8521 横浜市港北区日吉 4-1-1):School of Medicine, Keio University, 4-1-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa 223-8521, Japan.

の性質を知ることは自然現象や現代科学を理解する上で極めて重要である。このため電子の持つ様々な物理量(電荷、質量、磁気モーメント、角運動量など)の測定が行われてきた。この中で、質量は高精度な計測が最も困難であり、歴史的にはトムソンによる電荷と質量の比(比電荷)¹⁾ とミリカンによる電荷の計測結果を用いて求められていた。比電荷計測は、真空中で電子に電場と磁場を加え、電子軌道を計測することで行われる。

慶應義塾大学医学部では 1 年生を対象として,加速した電子の磁場中でのサイクロトロン運動を計測し,電子の電荷 e と質量 m の比 e/m を求める実験を行っている。真空中における電子の運動を観測することが理想的であるが,電子を直接観測することが困難なため,実験は希薄な(1 Pa 程度)へリウム気体中で行う。これは,電子がヘリウム原子に衝突することで原子を励起し,蛍光が生じ,電子軌道を容易に観測できるという利点がある一方で,電子が確率的にエネルギーを失うため軌道が広がり不鮮明になり,このことが比電荷の計測精度を著しく下げている。このため,衝突によるエネルギー損失を考慮した的確な計測方法およびデータ処理方法が望まれていた。本論文では,笠井が考案し,実験レポートで提案した理論について述べる。これによれば,原理的には,衝突の影響を除去することが可能であり,実際,精度の高い値が得られている。

2 理論

真空中で金属を高温にすると、熱エネルギーを得た電子が飛び出し(エジソン効果)、この電子を熱電子という。今回の実験では、フィラメントに $6.3\,\mathrm{V}$ 、 $2\,\mathrm{A}$ の電流を流し高温にして熱電子を取り出している。熱電子の速度は小さく、本実験では無視できる。こうして放出された電子に、電圧 V_p を印加することで加速する。エネルギー保存則より、電子の速度 v_n は、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_{\rm p} \tag{1}$$

によって決まり,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV_p}{m}} \tag{2}$$

となる。

2-1 真空中でのサイクロトロン運動

速度 \vec{v} で運動している電子に磁場 \vec{B} を加えると電子はローレンツカ \vec{F} :

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B},\tag{3}$$

を受ける。我々の実験では、 \vec{v} と \vec{B} は垂直なので、 \vec{F} は \vec{B} と \vec{v} に垂直な方向で、大きさF は、

$$F = evB,$$
 (4)

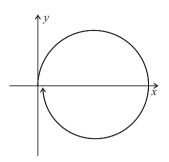


図1. 座標系

と表せる。ここで、v、B はそれぞれ \vec{v} 、 \vec{B} の大きさである。この力が向心力となって電子は円運動を行い、

$$\frac{mv^2}{r} = evB, (5)$$

が得られる。ここで、rは円運動の半径である。これに、式(2)を代入して、比電荷e/mは、

$$\frac{e}{m} = \frac{2V_{\rm p}}{B^2 r^2},\tag{6}$$

となる。このことから、加速した電子に磁場を加え、サイクロトロン運動の半径を測定すれば、 比電荷を求めることができる。

2-2 衝突を考慮したサイクロトロン運動

真空中の電子は目視することができない。このため、ヘリウムなど希薄気体を入れ衝突励起し、蛍光を観測する。このことが本実験の精度を著しく下げている。ここでは、希薄気体に電子が衝突することの影響を、電子の速度に比例した抵抗、 $-k\vec{v}$ として導入する。ここでkはガスと電子との衝突により生じる抵抗を表す尺度で、実際にはかなり複雑で電子の速度に依存するが、ここでは一定値として微分方程式を解き、後でこの点について考察することにする。電子の速度を \vec{v} 、磁場を \vec{B} とすると、運動方程式は、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} + e\vec{v} \times \vec{B},\tag{7}$$

となる。

座標系を図1のようにして、 $\vec{B}=(0,0,B)$ 、初期条件として、 $\vec{v}(0)=(0,v_0,0)$ 、位置 $\vec{r}(0)=(0,0,0)$ と置くと、解は以下の式になる;

$$v_x = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \sin \frac{eB}{m}t, \tag{8}$$

$$v_y = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \cos \frac{eB}{m}t. \tag{9}$$

速度を積分することで、電子の位置座標 (x, y) は以下のようになる;

$$x = \frac{v_0 m}{k^2 + e^2 B^2} \left(e^{-\frac{k}{m}t} \left(-k \sin \frac{eB}{m}t - eB \cos \frac{eB}{m}t \right) + eB \right), \tag{10}$$

$$y = \frac{v_0 m}{k^2 + e^2 B^2} \left(e^{-\frac{k}{m}t} (-k \cos \frac{eB}{m}t + eB \sin \frac{eB}{m}t) + k \right). \tag{11}$$

実験では、円軌道の直径を測定し、半分にして半径を求めている。ここでは、このときの半径 R を v_x =0 のときの x の半分とする。式(8)から v_x =0 となるのは、 $t=m\pi/eB$ であり、これを式(10)に代入して、

$$R = \frac{1}{2}x(\frac{m\pi}{eB}) = \frac{1}{2}\frac{v_0 meB}{k^2 + e^2B^2}(e^{-\frac{k\pi}{eB}} + 1), \tag{12}$$

が得られる。一方、希薄気体との衝突が無い場合の円軌道半径rは、式(5)から導かれ、Sを以下のように定義すると、

$$r = \frac{mv_0}{\rho R},\tag{13}$$

$$S = \frac{k}{eB},\tag{14}$$

Rとrの比は,

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} \frac{1}{S^2 + 1} (e^{-S\pi} + 1), \tag{15}$$

となる。この式の値はS=0、すなわちk=0のときに1である。これは、衝突による減速を考慮しない場合である、また、単調減少しており、Sが大きくなるにつれてR/r は小さくなっていく。

実際にはSはそれほど大きくはない、すなわち、

$$\frac{k\pi}{eB} \ll 1,\tag{16}$$

なので,式(15)は近似として,

$$\frac{R}{r} \approx 1 - \frac{\pi k}{2eB},\tag{17}$$

もしくは、rに式(6)を代入して、

$$R^2 \approx \frac{2V_{\rm p}}{R^2 \rho / m} (1 - \frac{\pi k}{\rho R}),$$
 (18)

とすることができる。

2-3 kの見積もり

ここでは、kの概算値を求めてみる。電子は飛跡に沿って運動しながら自身の運動エネルギーをヘリウム気体に与えて減速している。電子の飛跡に沿って $1\,\mathrm{m}$ あたりに電子がヘリウム

に与えるエネルギー,いわゆる線エネルギー付与(LET: Linear Energy Transfer)を、電子の運動方程式の観点とヘリウムの励起の観点という2つの観点で求め、両者を比較する。

電子の速度を $\vec{v} = (v_r, v_u)$ とすれば、速度の大きさは $v = |\vec{v}|$ であり、運動エネルギーEは、

$$E = \frac{1}{2}mv^2,\tag{19}$$

となる。また、電子の飛跡に沿った移動距離をLとすれば、LET は、

$$LET = -\frac{dE}{dL} = -\frac{dE}{dt}\frac{dt}{dL} = -m\frac{dv}{dt} = kv,$$
(20)

となる。ここで、 \vec{v} として、式 (8)、(9) を用いた。

一方、ヘリウムの励起は電子衝突で生じる。ヘリウムの数密度をn、電子とヘリウムの衝突断面積を σ とすれば、電子の平均自由行程は、

平均自由行程=
$$\frac{1}{n\sigma}$$
, (21)

となる。また、1 m 進む間に「1 m/平均自由行程」回衝突し、1 回の衝突で電子が失いヘリウムが得るエネルギーを Q とすれば、この観点での LET は、

$$LET = n\sigma Q, \tag{22}$$

となる。式 (20) の LET とこれを等しいとして、 $kv = n\sigma Q$ が得られる。v を加速直後の速度 v_0 とすれば、式 (2) を代入して、

$$k = \frac{n\sigma Q}{v_0} = n\sigma Q \sqrt{\frac{m}{2eV_p}}, \qquad (23)$$

が得られる。

実際の数値を入れて、kの値を見積もってみる。ヘリウム原子のファンデルワールス半径は $140~\rm pm$ なので $\sigma=\pi(140~\rm pm)^2$ 、ヘリウムの圧力は $1~\rm Pa$ 程度なので、 $n=2.4\times10^{20}~\rm /m^3$ 、加速電圧 $V_{\rm p}$ は、考察との関連で $150~\rm V$ とする。Q は、ヘリウムの第 $1~\rm m$ 起状態が $20~\rm eV$ 、第 $1~\rm T$ オン化エネルギーが $24.6~\rm eV$ で可視で蛍光を出すためには最低でも $23~\rm eV$ 程度必要なので、最小値として $Q=23~\rm eV$ とした。この条件で、 $k>7.5\times10^{-24}~\rm kg/s$ となる。Q が最小値なので、k も最小値しかわからないが、これより遥かに大きいことはないと思われる。また、この条件で式(21)で定義される平均自由行程は $67~\rm mm$ である。本実験での電子の行程(半周)が $100~\rm mm$ 程度なので、 $150~\rm V$ の加速電圧において $67~\rm mm$ の移動で $23~\rm eV$ 以上エネルギーを失う計測系では、衝突の影響が無視できないことがわかる。

3 実験装置

3-1 磁場の発生

磁場はヘルムホルツコイルにより発生させている。ヘルムホルツコイルは半径ρのループコ

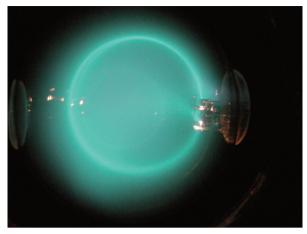


図 2. サイクロトロン運動の観測例, $V_p = 256 \, \text{V}$, $I_H = 1.31 \, \text{A} \, (1 \, \text{mT})$ 。電子ビームは右端から上に向かって,反時計回りに進んでいる。電子の軌跡がガスとの衝突で広がっていることがわかる。

イルをコイル面を平行に互いに ρ だけ離した構造であり、中心近辺では比較的均一度の高い磁場が得られる。用いたヘルムホルツコイルは単一ループコイルの巻き数が 130 であり、 ρ = 0.15 m なので、コイル電流 $I_{\rm H}[{\rm A}]$ と中心近辺の磁場 $B[{\rm T}]$ との関係は、

$$B = 7.80 \times 10^{-4} I_{\rm H},$$
 (24)

である。磁場の均一性を誤差の主な原因とする報告2りもあるが本論文では磁場は均一とみなす。

3-2 観測例

図2に観測例を示す。電子の軌道は衝突により広がるが、広がった軌道の一番外側を計測すれば、原理的には、その場所まで衝突をしないで初めて衝突した電子の軌道を計測したことになるが、実際には難しい。また、同様に円軌道の中心を正確に決めることも難しい。

4. 計測結果と考察

計測結果を図 3 (a), (b) に \times で示す。(a) は,ヘルムホルツコイルに流す電流 $I_{\rm H}$ を一定値として,加速電圧 $V_{\rm p}$ を変えなが円軌道半径 r を測定した結果であり,(b) は加速電圧 $V_{\rm p}$ を一定値として電流 $I_{\rm H}$ を変えながら円軌道半径 r を測定した結果である。

全部で 35 回測定した。式 (6) に従うと,原理的には 1 回の計測で比電荷を求めることができ,この計測で 35 個の比電荷が求まる。実際に求めた比電荷の最小値は 2.00×10^{11} C/kg で最大値は 2.72×10^{11} C/kg,平均値は 2.23×10^{11} C/kg となった。比電荷の文献値は 1.78×10^{11} C/kg なので,明らかに大きな系統誤差がある。

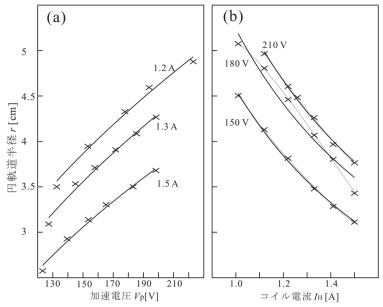


図3. 実験結果(×)と1次回帰(実線)および3次回帰(破線)による最尤推定。(a):ヘルムホルツコイルに流す電流を一定にして、加速電圧を変えながら半径を測定。(b):加速電圧を一定にして、電流を変えながら測定。全部で35回計測を行った。



図4. 円の中心を見つけて正確に直径を計測するのは難しく、わずかにずれる。

4-1 1次回帰による最尤推定

図3 (a), (b) に示したように、コイル電流および加速電圧を一定にしながら系統的に測定しているので、最小二乗法を用いることで精度の向上が期待できる。

式(6)を変形することで、コイル電流一定の場合には、

$$r^2 = \frac{2}{B^2 e/m} V_{\rm p},$$
 (25)

ここで, $B=7.80\times 10^{-4}\,I_{\rm H}$ である。これにより, $V_{\rm p}$ と r^2 の間には比例関係があることがわかる。理論的には $V_{\rm p}=0$ のときr=0は明らかなので,1次回帰を行うとき,このことを明示的に導入し,定数項をゼロとおくことに正当性はある。しかし,実際の実験では図4に示すように,円軌道の中心を正確に決めることができず,測定位置は本来の中心からずれる。この

| 一定 | 值 | 比電荷 10 ¹¹ c/kg | 定数項 10 ⁻⁴ m ² | 誤差率 % |
|------------------|-------|---------------------------|-------------------------------------|--------|
| | 1.2 A | 1.759 | -4.32 | -0.011 |
| コイル電流 $I_{ m H}$ | 1.3 A | 1.658 | -4.96 | -5.74 |
| | 1.5 A | 1.624 | -4.16 | -7.67 |
| | 150 V | 2.47 | 0.81 | 40.4 |
| 加速電圧 $V_{ m p}$ | 180 V | 2.27 | 1.4 | 29.1 |
| | 210 V | 2.30 | 0.87 | 30.8 |

表1.1次回帰で求めた比電荷の値。明らかに、電流一定の方が精度が高い。

ずれを δ とおくと、真の半径rに対して、測定される半径r'は、

$$r' = \sqrt{r^2 - \delta^2} \,, \tag{26}$$

となる。これを式(25)へ代入して、

$$r'^2 = \frac{2}{B^2 e/m} V_{\rm p} - \delta^2, \tag{27}$$

となる。系統誤差が中心からのずれのみであれば、定数項は $-\delta^2$ となるが、電子銃の大きさなど他の要因も考えられ、一般には以下のようにおくことができる;

$$r'^2 = \frac{2}{B^2 e/m} V_p + \varepsilon$$
 (28)

1 次回帰を $V_{\rm p}$ と r'^2 の間で行い,比例係数 $\frac{2}{B^2e/m}$ と定数項を定め,比電荷を推定し,このときの半径の推定値を図 3(a)に実線で示した。

同様に、加速電圧一定の場合には、

$$r'^2 = \frac{V_p}{e/m} \frac{1}{B^2} + \hat{z}$$
 (29)

として、1次回帰を $1/B^2$ と r'^2 の間で行った。表1に各場合における比電荷の値を示す。

表 1 を見て分かるように、コイル電流一定の場合の誤差は比較的小さく、特にコイル電流 1.2 A の場合の計測精度はかなり高いように見える。しかし、衝突を考慮した理論は式(18)であり、これによれば衝突補正しない場合には磁場が強い(電流が大きい)ほど文献値に一致 するはずであり、磁場が小さいほど比電荷も小さな値になるはずである。したがって、1.2 A で誤差が少ないのは偶然といえる。式(18)および以下で述べる表2における150 V の結果($\pi k/eB=0.26$)を用いると、この方法では 20 % ほど小さな値が期待される。そのようにならない 理由として、k が V_p に強く依存している(式(23))ことが原因として考えられる。また、定数項は負の値であり、定数項= $-\delta^2$ とすれば、2 cm 程度中心からずれて測定していたと解釈 できる。少し大きな値であり、他にも要因、たとえば k の V_p 依存性などが考えられる。いろいろと問題点はあるが、結果を見れば、1 次回帰は効果的な処理方法といえる。

| 加速電圧 | 比電荷 10 ¹¹ c/kg | 定数項 10 ⁻⁴ m ² | ${\rm k}{\rm 10}^{-23}{\rm kg/s}$ | πk/eB |
|-------|---------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|-------|
| 150 V | 1.45 | -2.3 | 1.57 | 0.26 |
| 180 V | 0.52 | -18.3 | 8.3 | 1.4 |
| 210 V | 1.13 | -5.3 | 2.7 | 0.45 |

表 2. 加速電圧一定で計測したデータをもとに 1 次の項をゼロとした 3 次回帰で求めた値。k, $\pi k/eB$ を求めるときの電子の電荷・質量は文献値を用いた。

一方,加速電圧一定の場合の比電荷は1個のデータで求めた場合と大差ない。また,定数項が正なので考慮していない別な要因の方が大きいといえる。結論として,式(29)をもとにした1次回帰では系統誤差を除去できない。

4-2 高次回帰による最尤推定

加速電圧一定の場合に 1 次回帰が適切な処理方法ではない主な原因は,気体原子と電子との衝突であると仮定して,この効果を除去するような処理方法について述べる。衝突がある場合の理論式は式(18)なので,これに中心のずれ δ を導入すると,測定される半径 r' は,

$$r'^{2} \approx -\frac{2V_{\rm p}m\pi k}{e^{2}} \frac{1}{B^{3}} + \frac{2V_{\rm p}}{e/m} \frac{1}{B^{2}} - \delta^{2}, \tag{30}$$

であると期待できる。 $-\delta^2$ を定数項とすれば,1/B と r'^2 の間で,1 次の項をゼロとした 3 次 回帰を行えばよいことがわかる。各係数を回帰から求めることで比電荷だけでなく k を求めることができる。結果を表 2 に示す。加速電圧 150 V の場合に精度が向上している。単に精度だけでなく,3 次の係数と定数項が負になるため,k や δ を求めることも可能である。理論での見積は $k > 7.5 \times 10^{-24}$ kg/s であるから,よく一致しているといえる。

加速電圧 $180\,\mathrm{V}$ の場合は,図 3 (b) の計測データを見ればわかるように上に凸であり,高 次回帰ではこれも再現できるため,精度が下がっている。実際, $\pi k/eB \ll 1$ (式 (16)) との 仮定であるが,大きな値になっている。式 (30) で想定した以外の誤差要因があるデータの処理が不正確になるのは当然である。一般論として,パラメータを増やして高次回帰をすれば精度が向上するのは当然のように思えるが,1/B の項を式 (30) に追加して,一般的な 3 次回帰をすると各項の符号まで変わり極めて精度が下がる。このことからも,1 次の項をゼロとした 3 次回帰は衝突の影響を合理的に評価する方法であるといえる。今回の計測では示すことができなかったが,一般に衝突の散乱断面積 σ は電子の速度の関数であり,電子と原子の散乱においては速度の増加とともに減少する。このことも k に影響をあたえるので,加速電圧一定,すなわち速度の大きさ一定での測定は原理的には高精度計測に適している。

5. まとめ

今回の実験では、サイクロトロン運動の式を用いて1回の測定データから正確な比電荷の値を算出することは難しい。そこでコイル電流 I_H を固定し複数のデータから最小二乗法を用いることで精度の良い値の算出を行った。一方、加速電圧 V_p を一定にした場合は精度は良くならず、原因として気体分子との衝突を仮定して 3 次回帰を行うと精度の上昇が見られた。このことから、電子軌道を考える上で気体分子との衝突は無視できないということが言える。また、3 次回帰により k を求めたが、k は式(23)により散乱断面積 σ や 1 回の衝突で失うエネルギー Q、LET と関連しているため、これらを求めるためにも有効な解析方法である。

6. 謝辞

本論文で使用した実験データは笠井と大島鴻太君が医学部1年次の物理学実験「電子の比電荷」で計測したものです。データの使用を快諾していただき感謝します。

参考文献

- 1) J. J. Thomson, "Cathode Rays", Philosophical Magazine, 44, 293 (1897)
- 2) 佐藤昌也,「電子の比電荷 (e/m) 測定の誤差要因について」, 物理教育, 63, 3 (2015), 201-204