Title	水理学と土質力学における二, 三の公式の相加平均・相乗平均不等式に基づく導出
Sub Title	Derivation of some formulae in hydraulics and soil mechanics, based on the inequality between arithmetic and geometric means
Author	南, 就将(Minami, Nariyuki)
Publisher	慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会
Publication year	2017
Jtitle	慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学 (The Hiyoshi review of natural science). No.61 (2017. 3) ,p.63- 80
JaLC DOI	
Abstract	In this note, some formulae in civil engineering, especially Coulomb's formulae for active and passive earth pressures, are derived as solutions to min-max problems for some concrete functions. The mathematical derivations are based not on differential calculus, but on the inequality between arithmetic and geometric means.
Notes	資料
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20170331-0063

Hiyoshi Review of Natural Science
Keio University No. 61, 63–80（2017）

水理学と土質力学における二，三の公式の相加平均・相乗平均不等式に基づく導出

南　就将*

Derivation of some formulae in hydraulics and soil mechanics, based on the inequality between arithmetic and geometric means

Nariyuki Minami

Summary――In this note, some formulae in civil engineering, especially Coulomb's formulae for active and passive earth pressures, are derived as solutions to min-max problems for some concrete functions. The mathematical derivations are based not on differential calculus, but on the inequality between arithmetic and geometric means.

1. 相加・相乗平均不等式

いわゆる相加平均（または算術平均）と相乗平均（または幾何平均）の大小関係を示す不等式は高等学校の数学で扱われ，よく知られている。大げさだがここで定理の形に述べておこう。

定理１　任意の正の数 a，b に対して不等式

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \tag{1}$$

すなわち

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \tag{2}$$

が成り立つ。等号は $a=b$ のとき，かつそのときに限り成り立つ。

証明　(1) 式の左辺から右辺を引くと

$$a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}\,)^2+(\sqrt{b}\,)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b}\,)^2 \geq 0$$

---

*　慶應義塾大学医学部数学教室（〒 223–8521　横浜市港北区日吉 4–1–1）：Keio University School of Medicine, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223–8521, Japan.［Received Sep. 27, 2016］

となる。最後の不等式において等号が成り立つための必要十分条件は $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$，すなわち $a=b$ である。（証明終わり）

本稿ではこの定理を次の形でも用いる。これも大げさだが定理として述べる。

定理 2　$A>0$，$B>0$ を正の定数とすると，$x>0$ に対して定義された関数

$$f(x)=Ax+\frac{B}{x} \tag{3}$$

は $x=\sqrt{B/A}$ において最小値 $2\sqrt{AB}$ をとる。

証明　任意の $x>0$ に対して（3）の右辺に定理 1 を適用すれば

$$f(x)\geq 2\sqrt{Ax\cdot\frac{B}{x}}=2\sqrt{AB} \tag{4}$$

となる。$Ax=B/x$, すなわち $x=\sqrt{B/A}$ のとき不等式（4）において等号が成立するが，そのとき（4）式の右辺は $f(x)$ の最小値を与えている。（証明終わり）

註　定理 2 を応用する際に変数 x が必ずしも正の実数全体を動かないことがある。そのときは $\sqrt{B/A}$ が x の変域に含まれていることの確認が必要である。

与えられた変量を最大化あるいは最小化する問題は，古い時代には場合ごとの工夫によって解かれていたが，微分積分学が整備されてからは，その変量をある関数 $f(x)$ の形に表して，条件 $f'(x)=0$ から $f(x)$ を最大化あるいは最小化する x を求めるのが一般的な方法である。実際，（3）式の関数 $f(x)$ にこの方法を適用すると次のようになる。$f(x)$ の定義域の端部での状況を見るために $x\to 0$，$x\to\infty$ とすると，いずれの場合も $f(x)\to\infty$ となるから，ある $x>0$ に対して $f(x)$ は最小値をとるはずである。その x は条件

$$f'(x)=A-\frac{B}{x^2}=0 \tag{5}$$

から $x=\sqrt{B/A}$ と求められ，$f(x)$ の最小値は，この x に対する関数の値として

$$f\left(\sqrt{\frac{B}{x}}\right)=A\sqrt{\frac{B}{A}}+B\sqrt{\frac{A}{B}}=2\sqrt{AB} \tag{6}$$

と求められる。

第 4 節においては，定理 2 をさらに次のように変形して用いる。

定理 3　定数 a，b，c，d，e，f は条件 $a>0$，$c>0$，$e>0$ および $(ad-bc)(af-be)$

>0 をみたすとする。変数 x が $ax+b>0$ を満たしつつ変化するときに，関数

$$F(x)=\frac{(cx+d)(ex+f)}{ax+b} \tag{7}$$

は最小値をとり，その値を M とおくと

(i) $ad-bc>0$ かつ $af-be>0$ のときは

$$M=\frac{1}{a^2}\left\{\sqrt{c(af-be)}+\sqrt{e(ad-bc)}\right\}^2$$

であり，

(ii) $ad-bc<0$ かつ $af-be<0$ のときは

$$M=-\frac{1}{a^2}\left\{\sqrt{c|af-be|}-\sqrt{e|ad-bc|}\right\}^2$$

である。

証明　$ax+b=t$ とおくと $x=(t-b)/a$ だから

$$F(x)=\frac{1}{t}\left(\frac{c(t-b)}{a}+d\right)\left(\frac{e(t-b)}{a}+f\right)$$

$$=\frac{\{ct+(ad-bc)\}\{et+(af-be)\}}{a^2t}$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\left\{cet+\frac{(ad-bc)(af-be)}{t}\right\}+c(af-be)+e(ad-bc)\right] \tag{8}$$

と書き換えられる。$t>0$，$ce>0$，$(ad-bc)(af-be)>0$ だから定理 2 により（8）式右辺の｛　｝内は $t=\sqrt{(ad-bc)(af-be)/ce}$ のとき最小値 $2\sqrt{ce(ad-bc)(af-be)}$ をとる。これを｛　｝の部分に代入すれば，$F(x)$ の最小値として

$$M=\frac{1}{a^2}\left\{2\sqrt{ce(ad-bc)(af-be)}+c(af-be)+e(ad-bc)\right\} \tag{9}$$

が得られる。$ad-bc>0$ かつ $af-be>0$ のとき，これはさらに

$$M=\frac{1}{a^2}\left\{\sqrt{c(af-be)}+\sqrt{e(ad-bc)}\right\}^2 \tag{10}$$

と書き換えられ，$ad-bc<0$ かつ $af-bc<0$ のときは

$$M=-\frac{1}{a^2}\left\{c|af-be|-2\sqrt{ce|af-be||ad-bc|}+e|ad-bc|\right\}$$

$$=-\frac{1}{a^2}\left\{\sqrt{c|af-be|}-\sqrt{e|ad-bc|}\right\}^2 \tag{11}$$

となる。（証明終わり）

定理 3 を微分法を用いて証明するのはかえって面倒である。まず $F(x)$ が変域 $\{x;\ ax+b>0\}$ において実際に最小値を取ることを確かめ，次に条件式 $F'(x)=0$ を x について解いて，最小値を達成する x を求める。（実際には 2 次方程式を一つ解くことになる。）最後に，こうして求められた x を $F(x)$ に代入して計算することにより M が求められるのである。しかし (8) 式のように $F(x)$ を書き換えてみれば，上記の 3 つ，すなわち最小値の存在，最小値を達成する x，最小値そのもの，がほとんど同時にわかるのである。

本稿においては，式変形の工夫をすることにより，微分法を用いるよりもむしろ定理 1，2 による初等的な方法で最大・最小問題をより容易に解き得る場合があることを実例によって示す。まず次の第 2 節において，本稿の着想に至った経緯を述べる。第 3 節においては，水理学におけるある最小化問題を扱い，第 4 節において，土質力学におけるクーロン（Coulomb）の土圧公式を定理 3 を用いて導く。第 4 節が本稿の主要部分である。

2. 農村工学基礎技術研修数学担当講師としての体験

茨城県つくば市に農村工学研究所[*1] という機関があり，そこでは毎年全国各地の土地改良事業所から若手職員の方々を集めて農業土木の基礎技術研修が行われている。研修内容は，日本の農政の動向といったような一般的な講義に始まって，水理学，土質力学，構造力学など土木工学の基礎理論の講義，およびそれらの演習と実習，コンクリートの配合のような施工に関する講義と実習等々であるが，筆者はその中の「数学」の講義を 20 年来担当している。与えられた時間枠の中で，現場で働く方々を対象として，数学の何をどう講義するかについてはいろいろと変遷があったのだが，ここ 10 年くらいは，合計 3 〜 4 日間の日程で高等学校の数学 I, II，III に相当する内容，つまり三角関数，指数関数，対数関数から微分積分学の初歩までを説明して，その合間合間に土木工学に現れる種々の公式を応用例として解説する，という方式をとってきた。例えば三角関数を説明しながら，台形断面水路と円形断面水路の形状要素（水理学）やモール（Mohr）の応力円（土質力学）を扱い，微分法を用いた最大・最小問題の例として，開水路の水理的最良断面（水理学）やクーロンの土圧公式（土質力学）を扱う，といった具合である。

このうちクーロンの土圧公式についてはちょっとした思い出がある。盛られた土が崩れないように擁壁で支えることを考える。土は，乾いた砂のように，変形に対する抵抗力としては内部摩擦のみを有し，粘着力を全く持たないと仮定する。擁壁が荷重に耐えられなくなって後ずさりすると，盛土はくさび形になってずり落ちる。この土くさびのすべり面の傾斜角は擁壁面にかかる圧力を最大にするように決まり，そのときの圧力を与えるのが，クーロンの主働土圧公式である。詳しくは第 4 節で述べるが，仮想的な土くさびのすべり面の傾斜角を ω とすると，土くさびに働く重力およびすべり面と擁壁から土くさびが受ける抗力のつりあい条件から，擁

[*1] 2016 年 4 月 1 日からの正式名称は「農業・食品産業技術総合研究機構　農村工学研究部門」という。以前は「農業工学研究所」，さらに古くは「農業土木試験場」であった [1,2,3]。

壁への圧力 P が ω の関数として求められる。擁壁が垂直で，擁壁と土の間には摩擦がなく，さらに盛土の上面が水平，という特別な場合には，P は

$$P = \frac{1}{2}\gamma H^2 \frac{\tan(\omega - \phi)}{\tan\omega} \tag{12}$$

で与えられる。((39) 式において $\theta = \alpha = \delta = 0$ とせよ。）ただし H は擁壁の高さ（＝盛土の高さ)，γ は単位体積の土に働く重力，ϕ は土の内部摩擦角である。$\omega \leq \phi$ のとき土くさびは擁壁がなくても摩擦力だけで安定するから，クーロンの主働土圧を求めるには，関数

$$f(\omega) = \frac{\tan(\omega - \phi)}{\tan\omega} \tag{13}$$

を変域 $\phi < \omega < \pi/2$ において最大化すればよい。この変域に属する ω に対しては $f(\omega) > 0$ であり，また $\omega \to \phi$，$\omega \to \pi/2$ とするとき $f(\omega) \to 0$ となるから，$f(\omega)$ は中間的な ω に対して最大値をとるはずであり，そのときの ω は条件 $f'(\omega) = 0$ から求められるであろう。実際，関数 $f(\omega)$ を ω について微分して，方程式 $f'(\omega) = 0$ を解くのは，微分法と三角関数についての少し手の込んだよい練習問題になる。

次に擁壁の土に接する面が鉛直面と θ の角度をなし，擁壁と土との間の摩擦角が δ であり，さらに盛土上面が水平面となす傾斜角が α であるような一般の場合を考える（図 2 参照)。基礎技術研修で土質力学の教科書として用いられていた文献 4 には，この一般の場合にも「同様に考えれば」クーロンの主働土圧公式が導かれる，と書いてある。そこで筆者は，ある秋の休日に暇にまかせて計算してみた。すべり面の傾斜角が ω である仮想的な土くさびに働く力のつり合いを考えると，確かに擁壁に働く圧力 P を $P = \frac{1}{2}\gamma H^2 f(\omega)$ の形に求めることができる（第 4 節参照)。ただしこの場合の $f(\omega)$ は位相がずれた三角関数をいくつかかけたり割ったりしたもので，(13) 式で定義されたものよりはもちろん複雑である。$f(\omega)$ の導関数 $f'(\omega)$ を求めるのは難しくない。ところが条件 $f'(\omega) = 0$ から ω を具体的に求めようとして行き詰った。三角関数の公式などをあれこれ使って式変形を試みるのだが，$f'(\omega) = 0$ を角 ω に対する見やすい条件に書きかえることはどうしてもできなかった。実りのない計算に休日を潰してしまった筆者は翌日，当時勤務していた筑波大学の図書館に駆け込んで，土質力学の教科書を片っ端から開いてみた。一般の場合のクーロンの土圧公式そのものはどの本にも記載されているのだが，その数学的導出となると「計算は煩雑なので省略する」といった具合でなかなか解説してくれない。その中でただ一冊，θ と δ を一般としつつ $\alpha = 0$ と仮定した場合の主働土圧公式の導出を解説した本があった[*2]。それによると，$f(\omega)$ を ω について直接微分するのではなく，$x = \cot\omega$ と変換してから，x の関数として微分すると計算が進むのである。なるほど，と思った筆者は $\alpha > 0$ である一般の場合にも，$x = \cot(\omega - \alpha)$ とおいて $f(\omega)$ を x の関数として微分してみたところ，計算は確かに煩雑であったが，$df/dx = 0$ を満たす x を求め，それによってクーロンの主働土圧公式を導くことができた。筆者はその計算過程をノートにまとめ，基礎

[*2] 岡二三生『土質力学演習』（森北出版）ではなかったかと思うが，今は確かめられない。同様の解説は文献 5 にも見られる。

技術研修のテキストに付録として載せておいた。

この件についてもう一度転機が訪れたのは2016年の春のことである。それまで合計3〜4日の時間枠で行なっていた数学の講義が合計2日間に短縮されるという連絡を農村工学研究所から受けたのである。それに伴って微分積分を講義内容から削除することになった。そうなると関数の最大・最小問題を扱えなくなり，土木工学のいくつかの公式を説明できなくなる，と筆者はそのとき思った。水理的最良断面の問題で，最も単純な長方形断面の場合は，微分法を用いなくても定理1または2によって解けることはわかっていたので，今後はそれだけ解説して他はあきらめるつもりでいたのだが，ふと気を取り直して台形断面の問題を考えて見たら，やはり定理1, 2により解けることがわかった。調子付いた筆者は半信半疑でクーロン土圧の公式に取り組んだところ，θ，δ，α がゼロでない一般の場合でも，かつての苦労が嘘のように微分法を用いずに公式が簡単に導かれてしまったのである。

3. 水理的最良断面

河川のように大気に接する自由水面を持ちつつ水が流れているような水路を開水路という。水路は一定の勾配 I を持ち，またその断面も場所によらず同じ形をしているとする。自然の河川ではこんな条件はなかなか満たされないであろうが，田畑に水を引くために設計された農業用水路ならばほぼ該当するであろう。また「勾配」についても実は河床の勾配 i と水面の勾配 I との区別が必要であるが[6]，農業用水路のように時間的にも，水路長に沿っても水の流れが定常であれば $I = i$ としてよいであろう。そのような水路における水の平均流速 v を与える簡便な公式として，マニング（Manning）の公式

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2} \tag{14}$$

が広く用いられている。ここで「平均流速」というのは，水路の断面の各点において異なる流速を平均したものである。平均の計算法を厳密に定めるのは難しいであろうが，流れている水の断面積（通水断面積または流積）を A とし，単位時間あたりにその断面を通過する水の体積（流量）を Q とすれば

$$Q = Av \tag{15}$$

によって v が定まると考えてよい。(14) 式に現われる R は径深と呼ばれ，その定義は，断面の周囲のうち水に接している部分の長さの合計 S（潤辺と呼ばれる）でもって通水断面積 A を除したもの

$$R = \frac{A}{S} \tag{16}$$

である。水の流れは水路の壁面に触れているところでは速度ゼロであり，壁面から離れるほど速くなる。通水断面積 A が同じならば，潤辺 S が小さいほど，つまり径深 R が大きいほど，

壁面における抵抗の影響が小さく，水は速く流れるわけである。最後に（14）式の右辺に現われる n は粗度係数と呼ばれている。

以上を踏まえて，水理的最良断面とは，一定の通水断面積 A を囲み，最大の径深 R（いいかえると最小の潤辺 S）をもつ断面の形状，と定義される。ここでは断面が長方形の場合と台形の場合を考える。

3-1　長方形断面

水深を H，水面幅を B とすると，通水断面積は明らかに $A = BH$ である。A を一定に保って潤辺 S を最小にしたい。長方形の場合は容易にわかるように $S = B + 2H$ であるから，定理 1 より

$$S \geq 2\sqrt{2BH} = 2\sqrt{2A}$$

が成り立つ。等号が成立するのは $B = 2H$ のときで，このとき S は最小値 $2\sqrt{2A}$ をとる。この長方形は正方形を 2 つ並べた形をしており、水面の中央を中心とする半径 H の半円に外接している。

3-2　台形断面

図 1 のような台形の断面をもつ水路を考える。

水深 H，底面幅 b，壁面の法勾配 $m = \cot\theta$ を基本量とすると，水面幅 B，水面の中央から斜面におろした垂線の長さ r，潤辺 S，通水断面積 A はそれぞれ

$$B = b + 2mH \tag{17}$$

$$r = \frac{B}{2\sqrt{1+m^2}} \tag{18}$$

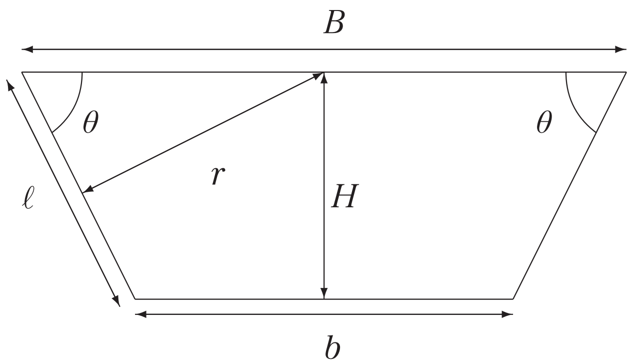

図 1.　台形断面水路

$$S = b + 2H\sqrt{1+m^2} \tag{19}$$

$$A = (b + mH)H \tag{20}$$

と表わされる。

3-2-1　法勾配 m を固定する場合

まず通水断面積 A と斜面の法勾配 m を一定として潤辺 S を最小化する。(20) 式より

$$b = \frac{A}{H} - mH$$

だから，潤辺 S は（19）式より水深 H の関数として

$$S = \frac{A}{H} + (2\sqrt{1+m^2} - m)H \tag{21}$$

で与えられる。定理 1 あるいは 2 より条件

$$\frac{A}{H} = (2\sqrt{1+m^2} - m)H \tag{22}$$

が成り立つとき S は最小となる。条件（22）を書き換えると

$$A = (2\sqrt{1+m^2} - m)H^2$$

だから

$$b = \frac{A}{H} - mH = 2(\sqrt{1+m^2} - m)H \tag{23}$$

となり，これを（17）式に代入して

$$B = 2H\sqrt{1+m^2} \tag{24}$$

を得る。よって（18）式より

$$r = \frac{B}{2\sqrt{1+m^2}} = H \tag{25}$$

となる。すなわち条件（22）の下で，台形は水面の中央を中心とする半径 H の半円に外接する。

ここで変数 H の変域に注意しておこう。理論上はいくらでも浅い水路を考えられるから，$H \to 0$ とすることができるが，長方形断面の場合と異なり，H を限りなく大きくすることはできない。実際，(20) 式において $b = 0$ としたときの H の値を $H_0 = \sqrt{A/m}$ とすると，これが H の上限になっている。すなわち H の変域は

$$0 < H < \sqrt{\frac{A}{m}} \tag{26}$$

である。一方，条件（22）から定まる H を H_1 とすると

$$H_1 = \sqrt{\frac{A}{2\sqrt{1+m^2}-m}} \tag{27}$$

であるが,

$$2\sqrt{1+m^2}-m > 2\sqrt{m^2}-m = m \tag{28}$$

だから，H_1 は確かに変域（26）に含まれ，そこで S の最小値を達成している。

3-2-2　水深 H を固定する場合

次に A と H を一定に保って，法勾配 $m = \cot\theta$ を変化させることにより S を最小化する。そのためには（21）式に含まれる $2\sqrt{1+m^2}-m$ が最小になればよい。そこで $\theta = 2\alpha$ とおくと

$$m = \cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$$

だから

$$1+m^2 = 1+\left(\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}\right)^2 = \frac{(1+\tan^2\alpha)^2}{4\tan^2\alpha}$$

が成り立つ。したがって

$$2\sqrt{1+m^2}-m = \frac{1+\tan^2\alpha}{\tan\alpha} - \frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\alpha}+3\tan\alpha\right) \tag{29}$$

となるから定理 2 より $\tan\alpha = 1/\sqrt{3}$，すなわち $\theta = 2\alpha = \pi/3$ のとき $2\sqrt{1+m^2}-m$ は最小値をとる。$\theta = \pi/3$ はもちろん θ の変域 $0 < \theta < \pi/2$ に収まっている。

4. クーロンの土圧公式

図 2 のように，擁壁の背後に，上面が傾斜角 α の斜面をなすように土が盛られている状況を考える。

盛土は壁に沿った水平方向にも，OX 方向にも無限に拡がっていると仮定するが，そのうち水平方向にとった単位の幅の擁壁と盛土について，その押し合いを考える。盛土が崩れないように擁壁が耐えているときに，盛土が擁壁に及ぼす圧力を主働土圧といい，P_A で表わす。これとは逆に擁壁の方が盛土にもたれかかるとき，土が押し上げられる寸前に擁壁が盛土に及ぼす圧力を受働土圧といって P_P で表わす。

ここで背面の盛土は，乾いた砂のように，粘着力をもたないものとする。したがって盛土が崩れたり押し上げられたりする際に，図 2 の仮想すべり面に働く抵抗力は土の内部摩擦のみであると仮定する（この仮定は非現実的だが，土に粘着力がある場合の補正は別に考えられている）。

さて，盛土が動くときは，図 2 に示した仮想すべり面 OB で限られるくさび形の土塊になっ

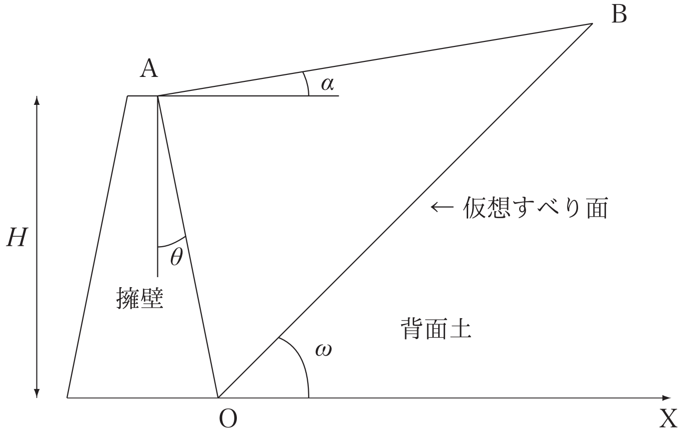

図 2．擁壁と背面土

てずれ動くと考えられるが、ずり落ちるときは擁壁に及ぼす力 P が最大になるようなすべり面に沿って動き，擁壁に押し上げられるときは，擁壁が及ぼす力が最小になるようなすべり面に沿ってずり上がる。

以上の設定の下にクーロンの土圧公式を述べよう。図 2 において，擁壁の背面が鉛直面となす角を θ，背面土の上面の傾斜角を α，仮想すべり面の傾斜角を ω とする。ω はある変域を動く変数である。また，擁壁の背面と土との摩擦角を δ，土の内部摩擦角を ϕ とする。さらに擁壁の高さを H，単位体積の土に働く重力を γ とすると，クーロンの主働土圧を与える公式は

$$P_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\gamma H^2\frac{\cos^2(\theta-\phi)}{\cos^2\theta\cos(\theta+\delta)}\left[1+\sqrt{\frac{\sin(\phi-\alpha)\sin(\phi+\delta)}{\cos(\theta+\delta)\cos(\theta-\alpha)}}\right]^{-2} \tag{30}$$

であり，受働土圧を与える公式は

$$P_{\mathrm{P}}=\frac{1}{2}\gamma H^2\frac{\cos^2(\theta+\phi)}{\cos^2\theta\cos(\theta-\delta)}\left[1-\sqrt{\frac{\sin(\phi+\alpha)\sin(\phi+\delta)}{\cos(\theta-\delta)\cos(\theta-\alpha)}}\right]^{-2} \tag{31}$$

である。

これらの 2 式は，プラスとマイナスがところどころ入れ替わっている他は同じ形をしている。符号のちがいは，主働状態と受働状態で摩擦力の向きが逆になることと，P_{A} と P_{P} を求める際に，一方では関数の最大値を考え，他方では最小値を考えることに起因する。

準備として，まず傾斜角 ω のすべり面から定まる土くさび OAB に働く重力の大きさ W を求めておく。そのためにはくさび形土塊の体積がわかればよいが，くさび形土塊の幅は単位の長さ 1 だから，問題は三角形 OAB の面積を求めることに帰着する。そこで図 2 の点 O を座標原点とし，鉛直上向きに Y 軸をとると，点 A の座標（a_1，a_2）は

$$(a_1,\ a_2)=(-H\tan\theta,\ H)$$

となる。点 B は直線 OB と直線 AB の交点として求められる。直線 OB，AB の方程式はそれぞれ

$$y=(\tan\omega)x,$$
$$y=(\tan\alpha)(x+H\tan\theta)+H$$

だから，これらを連立一次方程式として解けば，点 B の座標（b_1，b_2）は

$$b_1=\frac{1+\tan\alpha\tan\theta}{\tan\omega-\tan\alpha}H=\frac{\cos(\theta-\alpha)\cos\omega}{\cos\theta\sin(\omega-\alpha)}H, \tag{32}$$

$$b_2=b_1\tan\omega=\frac{\cos(\theta-\alpha)\sin\omega}{\cos\theta\sin(\omega-\alpha)}H \tag{33}$$

と求められる。したがって三角形 OAB の面積を S とするとき

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}\right|=\frac{1}{2}H^2\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\theta\sin(\omega-\alpha)}\left|\det\begin{bmatrix}-\tan\theta & \cos\omega\\ 1 & \sin\omega\end{bmatrix}\right|\\&=\frac{1}{2}H^2\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\theta\sin(\omega-\alpha)}|\tan\theta\sin\omega+\cos\omega|\\&=\frac{1}{2}H^2\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\theta\sin(\omega-\alpha)}\frac{|\cos(\omega-\theta)|}{\cos\theta}\end{aligned} \tag{34}$$

となり，$\cos(\omega-\theta)>0$ に注意すれば

$$W=\frac{1}{2}\gamma H^2\frac{\cos(\theta-\alpha)\cos(\omega-\theta)}{\cos^2\theta\sin(\omega-\alpha)} \tag{35}$$

が得られる。

4-1　主働土圧公式（30）の証明

土くさびが下方にずり落ちようとしつつ静止しているとするとき，土くさびが仮想すべり面と擁壁背面から受ける抗力 R，P はそれぞれ摩擦角 ϕ，δ だけ上方に傾くことになる。このことから図 3 のような力の三角形が得られる。

水平方向と鉛直方向の力のつり合いをそれぞれ考えると

$$P\cos(\theta+\delta)=R\sin(\omega-\phi) \tag{36}$$

$$P\sin(\theta+\delta)=W-R\cos(\omega-\phi) \tag{37}$$

という式が立つが，この 2 式から R を消去すると

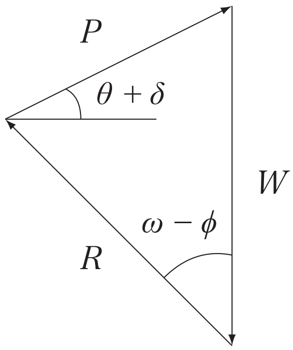

図 3. 土くさびに働く力のつり合い

$$P\{\cos(\theta+\delta)\cos(\omega-\phi)+\sin(\theta+\delta)\sin(\omega-\phi)\}=W\sin(\omega-\phi)$$

すなわち

$$P=W\frac{\sin(\omega-\phi)}{\cos(\omega-\phi-\theta-\delta)} \tag{38}$$

となる。これと（35）式より

$$P=\frac{1}{2}\gamma H^2\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos^2\theta}\frac{\cos(\omega-\theta)\sin(\omega-\phi)}{\sin(\omega-\alpha)\cos(\omega-\phi-\theta-\delta)} \tag{39}$$

を得る。

前述したように，仮想すべり面の傾斜角 ω を変化させたときの P の最大値が主働土圧である。それを考える前に我々は $\alpha<\phi$ を仮定する必要があることに注意する。なぜならば，$\omega\to\alpha$ とするとき三角形 ABC の面積 S は限りなく大きくなり，したがって土くさびに働く重力 W も限りなく大きくなるが，もし $\alpha\geq\phi$ だとすると仮想すべり面の抗力 R だけでは W を支えきれず，$P\to\infty$ となってしまうからである。$\alpha<\phi$ であれば $\omega\to\alpha$ としても土くさびは仮想すべり面における摩擦力によってずり落ちないように支えられる。この場合，$\omega\leq\phi$ に対しては $P=0$ となる。したがって ω の変域は

$$\phi<\omega<\theta+\frac{\pi}{2} \tag{40}$$

としてよい。

ここで

$$f_{\mathrm{A}}(\omega)=\frac{\sin(\omega-\alpha)\cos(\omega-\phi-\theta-\delta)}{\cos(\omega-\theta)\sin(\omega-\phi)} \tag{41}$$

とおくと（39）式より

$$P=\frac{1}{2}\gamma H^2\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos^2\theta}\frac{1}{f_A(\omega)} \tag{42}$$

と書けるから，P の最大値を求めるには，$\phi < \omega < \theta + \dfrac{\pi}{2}$ に対する $f_A(\omega)$ の最小値を求めればよいことになる。

$$\omega - \theta = (\omega - \phi) + (\phi - \theta)$$
$$\omega - \alpha = (\omega - \phi) + (\phi - \alpha)$$
$$\omega - \phi - \theta - \delta = (\omega - \phi) - (\theta + \delta)$$

に注意すると，加法定理により

$$f_A(\omega) = \frac{\sin((\omega-\phi)+(\phi-\alpha))\cos((\omega-\phi)-(\theta+\delta))}{\sin(\omega-\phi)\cos((\omega-\phi)+(\phi-\theta))}$$
$$= \frac{\{\sin(\omega-\phi)\cos(\phi-\alpha)+\cos(\omega-\phi)\sin(\phi-\alpha)\}\{\cos(\omega-\phi)\cos(\theta+\delta)+\sin(\omega-\phi)\sin(\theta+\delta)\}}{\sin(\omega-\phi)\{\cos(\omega-\phi)\cos(\phi-\theta)-\sin(\omega-\phi)\sin(\phi-\theta)\}} \tag{43}$$

となる。分母・分子を $\sin^2(\omega - \phi)$ で割って $x = \cot(\omega - \phi)$ とおくと，

$$f_A(\omega) = \frac{\{x \sin(\phi-\alpha)+\cos(\phi-\alpha)\}\{x \cos(\theta+\delta)+\sin(\theta+\delta)\}}{x \cos(\phi-\theta)-\sin(\phi-\theta)} \tag{44}$$

が得られる。ここで

$$a = \cos(\phi-\theta),\quad c = \sin(\phi-\alpha),\quad e = \cos(\theta+\delta) \tag{45}$$

$$b = -\sin(\phi-\theta),\quad d = \cos(\phi-\alpha),\quad f = \sin(\theta+\delta) \tag{46}$$

とすると

$$ad - bc = \cos(\phi-\theta)\cos(\phi-\alpha)+\sin(\phi-\theta)\sin(\phi-\alpha) = \cos(\theta-\alpha) \tag{47}$$

$$af - be = \cos(\phi-\theta)\sin(\theta+\delta)+\sin(\phi-\theta)\cos(\theta+\delta) = \sin(\phi+\delta) \tag{48}$$

であるが，仮定により $\phi - \alpha > 0$ であり，また α, θ, ϕ, δ が直角に近い極端な値を取らないとすれば，$a > 0$, $c > 0$, $e > 0$, $ad - bc > 0$, $af - be > 0$ が成り立つと考えてよい。このとき

$$f_A(\omega) = \frac{(cx+d)(ex+f)}{ax+b} \tag{49}$$

の右辺を $F_A(x)$ とおくと，$F_A(x)$ は定理 3 の条件を満たす関数であり，その最小値は

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{1}{a^2}\left\{\sqrt{c(af-be)}+\sqrt{e(ad-bc)}\right\}^2 \\
&= \frac{1}{\cos^2(\phi-\theta)}\left\{\sqrt{\sin(\phi-\alpha)\sin(\phi+\delta)}+\sqrt{\cos(\theta+\delta)\cos(\theta-\alpha)}\right\}^2 \\
&= \frac{1}{\cos^2(\phi-\theta)}\cos(\theta+\delta)\cos(\theta-\alpha)\left[1+\sqrt{\frac{\sin(\phi-\alpha)\sin(\phi+\delta)}{\cos(\theta+\delta)\cos(\theta-\alpha)}}\right]^2
\end{aligned}
\tag{50}
$$

である。これを P の式（42）の $f_{\mathrm{A}}(\omega)$ に代入すれば最終的に主働土圧公式（30）が得られる。

なお，（49）式の右辺で定義される関数 $F_{\mathrm{A}}(x)$ において，$ax+b$ はすべての正の実数値をとる。実際

$$
\begin{aligned}
ax+b &= \cos(\phi-\theta)\cot(\omega-\phi)-\sin(\phi-\theta) \\
&= \frac{\cos(\phi-\theta)\cos(\omega-\phi)-\sin(\phi-\theta)\sin(\omega-\phi)}{\sin(\omega-\phi)} \\
&= \frac{\cos(\omega-\theta)}{\sin(\omega-\phi)}
\end{aligned}
\tag{51}
$$

であるが，（40）により

$$
0<\omega-\phi<\theta+\frac{\pi}{2}-\phi,\quad \phi-\theta<\omega-\theta<\frac{\pi}{2} \tag{52}
$$

だから（51）式右辺の分母，分子はともに正であって $ax+b>0$，また $\omega\to\phi$ とすれば $ax+b\to\infty$，また $\omega\to\theta+\pi/2$ とすれば $ax+b\to 0$ となる。

4-2　受働土圧公式（31）の証明

擁壁が背面土にもたれかかり，土くさびを押し上げようとするから，擁壁の背面と仮想すべり面におけるまさつ力の向きは前項で考えた主働状態と逆になる。したがってまさつ角 δ，ϕ の前の符号を変えることにより，土くさびが安定しているときに擁壁から受ける力を与える式は

$$
P=\frac{1}{2}\gamma H^2\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos^2\theta}\frac{\cos(\omega-\theta)\sin(\omega+\phi)}{\sin(\omega-\alpha)\cos(\omega+\phi-\theta+\delta)} \tag{53}
$$

となる。ω を変化させたときの P の最小値がクーロンの受働土圧である。それを求めるためにまず ω の変域を明確にしておく。$\omega\to\alpha$ の極限においては三角形ABCの面積が無限大となり，$W\to\infty$，したがって $P\to\infty$ となる。一方 $\omega\to\frac{\pi}{2}+\theta-\delta-\phi$ の極限を考えると，力の三角形（図3において δ と ϕ を $-\delta$ と $-\phi$ でおきかえたもの）において R と P が平行になり，$R\to\infty$，したがって $P\to\infty$ となる。よって ω の変域は

$$
\alpha<\omega<\frac{\pi}{2}+\theta-\delta-\phi \tag{54}
$$

であり，このどこかで P は最小値をとる。ここで

$$f_{\mathrm{P}}(\omega)=\frac{\cos(\omega-\theta)\sin(\omega+\phi)}{\sin(\omega-\alpha)\cos(\omega+\phi-\theta+\delta)} \tag{55}$$

なる関数を考えると

$$P=\frac{1}{2}\gamma H^2\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos^2\theta}f_{\mathrm{P}}(\omega) \tag{56}$$

と書くことができ，問題は $f_{\mathrm{P}}(\omega)$ の最小値を求めることとなる。

$$\omega-\theta=(\omega-\alpha)+(\alpha-\theta)$$
$$\omega+\phi=(\omega-\alpha)+(\alpha+\phi),$$
$$\omega+\phi-\theta+\delta=(\omega-\alpha)+(\alpha+\phi-\theta+\delta)$$

に注意し，さらに $x=\cot(\omega-\alpha)$ とおくと，$f_{\mathrm{P}}(\omega)$ は次のように書き換えられる。

$$f_{\mathrm{P}}(\omega)=\frac{\cos((\omega-\alpha)+(\alpha-\theta))\sin((\omega-\alpha)+(\alpha+\phi))}{\sin(\omega-\alpha)\cos((\omega-\alpha)+(\alpha+\phi-\theta+\delta))}$$

$$=\frac{\{\cos(\omega-\alpha)\cos(\alpha-\theta)-\sin(\omega-\alpha)\sin(\alpha-\theta)\}\{\sin(\omega-\alpha)\cos(\alpha+\phi)+\cos(\omega-\theta)\sin(\alpha+\phi)\}}{\sin(\omega-\alpha)\{\cos(\omega-\alpha)\cos(\alpha+\phi-\theta+\delta)-\sin(\omega-\alpha)\sin(\alpha+\phi-\theta+\delta)\}}$$

$$=\frac{\{x\cos(\alpha-\theta)-\sin(\alpha-\theta)\}\{x\sin(\alpha+\phi)+\cos(\alpha+\phi)\}}{x\cos(\alpha+\phi-\theta+\delta)-\sin(\alpha+\phi-\theta+\delta)} \tag{57}$$

ここで

$$a=\cos(\alpha+\phi-\theta+\delta),\ c=\cos(\alpha-\theta),\ e=\sin(\alpha+\phi) \tag{58}$$

$$b=-\sin(\alpha+\phi-\theta+\delta),\ d=-\sin(\alpha-\theta),\ f=\cos(\alpha+\phi) \tag{59}$$

とおくと

$$f_{\mathrm{P}}(\omega)=\frac{(cx+d)(ex+f)}{ax+b} \tag{60}$$

また

$$ad-bc=-\cos(\alpha+\phi-\theta+\delta)\sin(\alpha-\theta)+\sin(\alpha+\phi-\theta+\delta)\cos(\alpha-\theta)=\sin(\phi+\delta) \tag{61}$$

$$af-be=\cos(\alpha+\phi-\theta+\delta)\cos(\alpha+\phi)+\sin(\alpha+\phi-\theta+\delta)\sin(\alpha+\phi)=\cos(\delta-\theta) \tag{62}$$

である。前と同様に α，θ，ϕ，δ が極端な値を取らなければ $a>0$，$c>0$，$e>0$，$ad-bc>0$，$af-be>0$ と考えてよい。(60) 式の右辺を $F_{\mathrm{P}}(x)$ とおくと，再び定理 3 より，$F_{\mathrm{P}}(x)$ の最小値 M は

$$M=\frac{1}{a^2}\left\{\sqrt{c(af-be)}+\sqrt{e(ad-bc)}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{\cos^2(\alpha+\phi-\theta+\delta)}\left\{\sqrt{\cos(\alpha-\theta)\cos(\delta-\theta)}+\sqrt{\sin(\alpha+\phi)\sin(\phi+\delta)}\right\}^2 \tag{63}$$

で与えられる。ただし $ax+b$ がすべての正の実数値をとることは次のようにして確かめられる。まず

$$ax+b=\cos(\alpha+\phi-\theta+\delta)\cot(\omega-\alpha)-\sin(\alpha+\phi-\theta+\delta)$$

$$=\frac{\cos(\omega+\phi-\theta+\delta)}{\sin(\omega-\alpha)} \tag{64}$$

であるが，（54）により

$$0<\omega-\alpha<\frac{\pi}{2}+\theta-\delta-\phi-\alpha$$

$$\alpha+\phi-\theta+\delta<\omega+\phi-\theta+\delta<\frac{\pi}{2}$$

であるから $a>0$ と仮定したのと同じ理由によって（64）式右辺の分母，分子はともに正の値をとる。また $\omega\to\alpha$ とすると $\sin(\omega-\alpha)\to 0$ かつ

$$\cos(\omega+\phi-\theta+\delta)\to\cos(\alpha+\phi-\theta+\delta)=a>0$$

により $ax+b\to\infty$ となり，$\omega\to\frac{\pi}{2}+\theta-\delta-\phi$ とすると $\cos(\omega+\phi-\theta+\delta)\to\cos(\pi/2)=0$，かつ

$$\sin(\omega-\alpha)\to\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\delta-\phi-\alpha\right)=\cos(\alpha+\phi-\theta+\delta)=a>0$$

により $ax+b\to 0$ となる。よって ω が変域（54）を動くとき，$ax+b$ はすべての正の実数値をとる。

ところで（63）式の分母・分子に

$$\left\{\sqrt{\cos(\alpha-\theta)\cos(\delta-\theta)}-\sqrt{\sin(\alpha+\phi)\sin(\phi+\delta)}\right\}^2$$

をかけると分子が有理化されて

$$M=\frac{\left\{\cos(\alpha-\theta)\cos(\delta-\theta)-\sin(\alpha+\phi)\sin(\phi+\delta)\right\}^2}{\cos^2(\alpha+\phi-\theta+\delta)\left\{\sqrt{\cos(\alpha-\theta)\cos(\delta-\theta)}-\sqrt{\sin(\alpha+\phi)\sin(\phi+\delta)}\right\}^2}$$

$$=\left\{\frac{\cos(\alpha-\theta)\cos(\delta-\theta)-\sin(\alpha+\phi)\sin(\phi+\delta)}{\cos(\alpha+\phi-\theta+\delta)}\right\}^2\frac{1}{\cos(\alpha-\theta)\cos(\delta-\theta)}$$

$$\times\left[1-\sqrt{\frac{\sin(\alpha+\phi)\sin(\phi+\delta)}{\cos(\alpha-\theta)\cos(\delta-\theta)}}\right]^{-2}$$

となる。ここで $\mu=\alpha+\phi-\theta+\delta$ とおくと

$$\delta-\theta=\mu-(\alpha+\phi),\quad \phi+\delta=\mu-(\alpha-\theta)$$

だから

$$\frac{\cos(\alpha-\theta)\cos(\delta-\theta)-\sin(\alpha+\phi)\sin(\phi+\delta)}{\cos(\alpha+\phi-\theta+\delta)}$$

$$=\frac{1}{\cos\mu}\left[\cos(\alpha-\theta)\cos(\mu-(\alpha+\phi))-\sin(\alpha+\phi)\sin(\mu-(\alpha-\theta))\right]$$

$$=\frac{1}{\cos\mu}\left[\cos(\alpha-\theta)\{\cos\mu\cos(\alpha+\phi)+\sin\mu\sin(\alpha+\phi)\}\right.$$

$$\left.-\sin(\alpha+\phi)\{\sin\mu\cos(\alpha-\theta)-\cos\mu\sin(\alpha-\theta)\}\right]$$

$$=\frac{1}{\cos\mu}\left[\cos\mu\{\cos(\alpha-\theta)\cos(\alpha+\phi)+\sin(\alpha-\theta)\sin(\alpha+\phi)\}\right]$$

$$=\cos((\alpha+\phi)-(\alpha-\theta))=\cos(\phi+\theta)$$

したがって

$$M=\frac{\cos^2(\phi+\theta)}{\cos(\alpha-\theta)\cos(\delta-\theta)}\left[1-\sqrt{\frac{\sin(\alpha+\phi)\sin(\phi+\delta)}{\cos(\alpha-\theta)\cos(\delta-\theta)}}\right]^{-2}$$

を得る。これを P の式（56）の $f_{\mathrm{P}}(\omega)$ の値として代入すればクーロンの受働土圧公式（31）が得られる。

5. あとがき

本稿では，関数の最大・最小問題を解くことによって導かれる土木工学のいくつかの公式，特にクーロンの土圧公式が，微分法を用いない，より初等的な方法によって得られることを示した。一般の場合のクーロンの土圧公式（30），（31）は H. Müller-Breslau によって 1906 年に初めて得られたそうである。筆者はその文献 8 を見ていないが，文献 9 によれば，例えば主働土圧公式を導くために，（39）式で与えられる ω の関数としての P の最大値を

$$\frac{dP}{d\omega}=0,\ \frac{d^2P}{d\omega^2}\leq 0$$

の 2 条件から求めたらしい。その計算は「非常にめんどう」[9] だそうである。Müller-Breslau 以後，その計算を単純にする工夫がどの程度なされたのか，筆者には不明だが，第 2 節に述べたように，日本で出版されている土質力学の教科書で，一般の場合のクーロン土圧公式の導出を完全に説明しているものは文献 7 を例外としてほとんど見当たらない*3。しかも例えば文献 4 の第 3 版（159 頁，163 頁）におけるように，証明なしに提示された土圧公式がミスプリントを含んでいることもある。クーロンの土圧公式は原理的には図 3 に示されるような 3 つの力のつり合い条件に完全に帰着される。難しいのは，その条件から得られる関数の最大値あるいは最小値を求めるための計算であって，それは全く数学的な問題である。工夫によって計算の見通しがよくなれば，公式にミスプリントがあっても自ら修正することが可能になるであろう。土木工学の専門家でもない筆者が本稿のような報告書を書いたのは以上の理由による。なお，クーロンの土圧公式は非常に古いものだから，本稿に述べた導出方法はすでに知られている可能性が十分あるが，文献を見つけることができなかったことから，改めて活字にしておく意義はあると考えたのである。本稿を「資料」と分類したのはそのためである。

参考文献

1）　農村工学研究所：www.naro.affrc.go.jp/nkk/

2）　農村工学研究部門：www.naro.affrc.go.jp/nire/

3）　渋谷勤治郎：「農業土木試験場から農業工学研究所へ」，農業土木学会誌，vol. 56，no. 10，1040–1041，1988 年

4）　粟津清蔵監修『絵とき　土質力学』，オーム社，第 1 版（1998 年），改訂第 2 版（2000 年），改訂第 3 版（2013 年）

5）　岡二三生『土質力学』，朝倉書店，2003 年

6）　椎貝博美『わかりやすい　水の力学』，鹿島出版会，1979 年

7）　地盤工学会編『地盤工学数式入門』，地盤工学会（発売　丸善），2001 年

8）　H. Müller-Breslau: Erddruck auf Stützmauern, Alfred Kröner Verlag, Stuttgart，1906 年

9）　福岡正巳，村田清二，今野誠著『新編土質力学』，国民科学社（発売　オーム社），1984 年

*3　文献 7 においては，図 2 に巧妙な補助線を引くことで変数変換を行ない，P の最大条件を微分法により求め，主働土圧公式を導いている。