

Title	ジャイロスコープの3次元動画解析による歳差運動公式の検証
Sub Title	Validation of a formula for precessional motions by analyzing 3D moving images of a gyroscope
Author	橋本, 広大(Hashimoto, Kodai) 金坂, 友里香(Kanesaka, Yurika) 乙ヶ迫, 綾野(Otogasako, Ayano) 竹下, 有節(Takeshita, Yusetsu) 下村, 裕(Shimomura, Yutaka)
Publisher	慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会
Publication year	2013
Jtitle	慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学 (The Hiyoshi review of the natural science). No.54 (2013. 9) ,p.11- 23
JaLC DOI	
Abstract	Spinning motions of a gyroscope are analyzed based on its 3D moving images to measure the inclination angle, the precession angular velocity and the spin angular velocity in various stages of its motion. As a result of averaging over a short time period, it is found that the popular theoretical formula for the precession angular velocity, which means the constancy of product of the precession angular velocity and the spin one, holds when the ratio of the spin angular velocity to the precession one is larger than 25 at most, and that it breaks down with the product constant decreased when the ratio is smaller than 20 at least.
Notes	原著論文 挿図
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20130930-0011

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

ジャイロスコープの3次元動画解析による歳差運動公式の検証

橋本広大*・金坂友里香**・乙ヶ迫綾野**・
竹下有節**・下村 裕***

Validation of a formula for precessional motions by analyzing 3D moving images
of a gyroscope

Kodai HASHIMOTO, Yurika KANESAKA, Ayano OTOGASAKO,
Yusetsu TAKESHITA and Yutaka SHIMOMURA

Summary— Spinning motions of a gyroscope are analyzed based on its 3D moving images to measure the inclination angle, the precession angular velocity and the spin angular velocity in various stages of its motion. As a result of averaging over a short time period, it is found that the popular theoretical formula for the precession angular velocity, which means the constancy of product of the precession angular velocity and the spin one, holds when the ratio of the spin angular velocity to the precession one is larger than 25 at most, and that it breaks down with the product constant decreased when the ratio is smaller than 20 at least.

1. はじめに

回転するコマは不思議な振る舞いをし、力学の難問として長い間多くの物理学者を魅了し続けてきた。数学的な厳密解が知られている例として、オイラーのコマ¹⁾、ラグランジュのコマ²⁾、コワレフスカヤのコマ³⁾が有名である。しかしながら、いまだに説明できない運動も多く存在し、コマの運動はすべて完全に解明されているとはいえない。実際、一種のコマ運動と思える回転ゆで卵（回転楕円体）が立つメカニズムは2002年に初めて解明され^{4,5)}、さらにそれが立ち上がる過程で自発的に行う微小なジャンプは未知現象として2005年に予言されて⁶⁾2006年に実証されたばかりである⁷⁾。

* 慶應義塾大学法学部法律学科3年

** 慶應義塾大学法学部法律学科4年

*** 慶應義塾大学法学部日吉物理学教室（〒223-8521 横浜市港北区日吉4-1-1）：Department of Physics, Hiyoshi Campus, Faculty of Law, Hiyoshi 4-1-1, Kouhoku-ku, Yokohama, Kanagawa 223-8521, Japan. [Received April 2, 2013]

さて、本研究で用いるジャイロスコープは、支点のまわりに自由に回転できるコマであり、ラグランジュのコマとみなせる。したがって、ジャイロスコープにかかる重りの重さと支点から重りまでの間隔がともに一定ならば、ラグランジュのコマの歳差運動に関する次の公式^{2,8)}が成り立つはずである。

$$\Omega \cdot \zeta = \text{const.} \quad \dots (1)$$

ここで、 Ω は歳差の角速度、 ζ は自転の角速度を表している。この公式 (1) は、 $\zeta/\Omega \gg 1$ の場合にのみ成り立つ近似関係式であるが、どの程度以上の ζ/Ω なら成立し、どの程度以下の ζ/Ω なら成立しないのであろうか？ また、 ζ/Ω が小さく (1) の関係が破れる場合、積 $\Omega \cdot \zeta$ は定数からどのように変化するのであろうか？

本研究は、3次元動画解析によってジャイロスコープの運動を計測し、歳差と自転の角速度を見積もることによって、上記の問いに答えるものである。

2. 実験方法

自転を与えたジャイロスコープの運動を計測する。今回の実験では、パスコ社製ジャイロスコープ ME-8960を用いる。軸の長さ60 cm、支点の高さ30 cm、ディスクの直径25 cm、重さ6 kg (内、ベース4 kg) である。

動画解析の際のマーカーとして、軸の先端とディスク外周に1つずつ、黄色のLEDコード球 (LP-05HYL-300N, DC 4.5 V/20 mA, KILALA-FACTORY 社製) を Blu・Tack (Bostik Findlepty. Ltd 社製) を用いて接着する。補助として赤色のコード球 (T5・R, 理研社製) もそれぞれ向きを変えて4つ接着するが、今回の計測では使用しない。黄色LEDコード球は、ボタン電池 LR44 (1.5 V) を3個使用して直列に接続する。回路をつなぐ際にはハンダを用いる。ディスクの回転によって導線が絡まらないように、回路はディスク上に接着する (図1)。

撮影は2台の高速度カメラを用いて行う。この際、3次元動画解析を行うために2台のカメラはお互い離して配置し、異なる角度から撮影する。2台のカメラとPCをハブを介して接続し、また、2台のカメラ間にトリガーをつないでおく。

ジャイロスコープの歳差運動を撮影する前に、フレームの撮影と、ジャイロスコープの支点を撮影する。フレームは、運動の解析を行う際に座標と長さを定める指標とする。今回の実験では、縦20 cm、横40 cm、高さ40 cmの直方体をなすフレームを使用する。フレームがカメラの画面にちょうど収まるように距離を調整して設置する。このとき、フレームのなす直方体の8つの頂点がそれぞれのカメラの位置から見て重なっていない状態であることを確認する。重なっている場合はフレームを回転させ、重ならない角度に調整する。フレームを適切な位置に置いたのち、レンズの調整ネジを回して明るさとピントを調整し撮影を行う。この画像は解析の際に3D キャリブレーション画像として1枚のみ使用するため、撮影時間は1秒間で十分である。

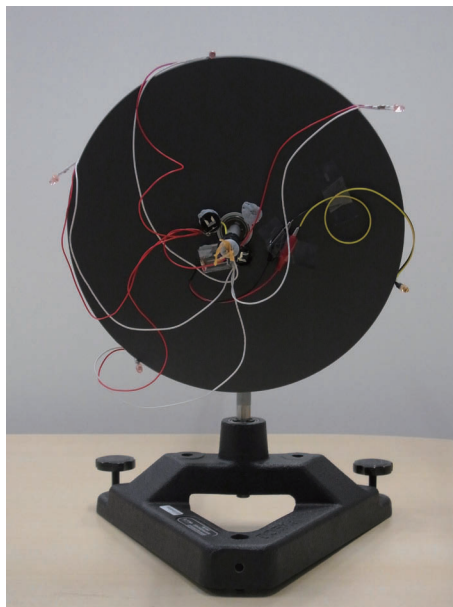


図1. ジャイロスコープ正面図

図のようにマーカーを配置し、回路と電池もあわせてディスク上に設置する。

次に、ジャイロスコープの支点を撮影する。ジャイロスコープの支点には支柱があり、直接マーカーをつけることはできないため、支点から5 cm離れた点にそれぞれ上下に支点に対して対称となるように2本の同種ネジをBlu・Tackでつける。このネジの先端をマーカーとし、2点の midpoint を算出して支点を定める。支点は歳差運動中も動かないので、撮影はジャイロスコープを静止させたまま行う。フレームの撮影と同様に、必要な画像は1枚のみであるため、撮影は1秒間ほど行う。

フレームと支点の撮影を終えたら、ジャイロスコープの位置を固定したまま歳差運動の撮影を行う。まず、ジャイロスコープの先端の重りを外した状態で本体が水平につりあうよう、ジャイロスコープ本体の2つの重り（大900 g, 小30 g）を前後に動かし調整する。次に、その重りとは反対側の支点から21.5 cm離れた軸の先端に150.69 gの重りをつける。たこ糸をディスク裏の軸受けカバー上にある突起したピンに巻きつけ、それを引っ張ることによりコマを回すのと同じ要領でディスクを回転させる。今回の実験では、ジャイロスコープを正面から見たときに時計回りになる向きに回転させる。ジャイロスコープの対称軸と鉛直軸のなす角度（傾斜角 θ ）が約40度になるよう、軸に付属した分度器（図2）の目盛りを参考にジャイロスコープを上向きに傾け静かに手を放す。このとき、歳差運動の回転方向は上から見て時計回りになる。

撮影は照明せず部屋を暗くした状態で行う。カメラの設定を、撮影速度を毎秒300コマ、シャッター速度を開放、画像サイズを200ドット×200ドット、ゲインを+9 dBにし、ジャイロ

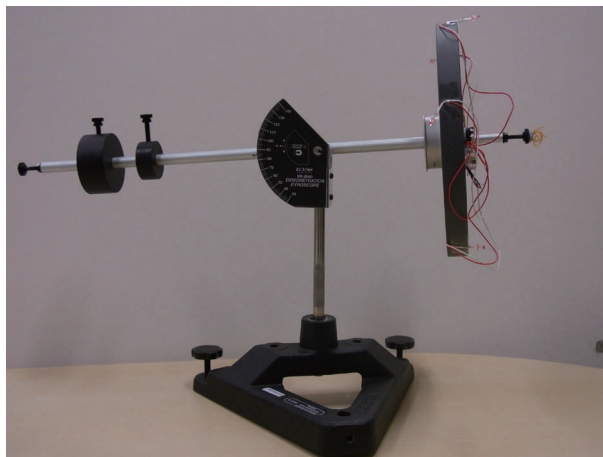


図 2. ジャイロスコープ側面図

支点に対してディスクと反対側に2種の重りがついている（この図では、軸の先端の重りは装着されていない）。また、軸と支柱の交点には分度器が取り付けられている。

スコープの自転速度を変えて、それぞれ約20秒間ずつ複数回撮影する。この際、撮影開始直後にトリガーのスイッチを押し、2台のカメラの撮影開始時刻を同期させておく。

3. 計測方法

撮影した画像データをもとに、3次元動画計測ソフト“Move-tr/3D Ver. 5.1（株式会社ライブラリー）”を用いて、ジャイロスコープに装着したLED（マーカー）の各時刻における位置座標を得る。その手順の詳細を以下に記載する。

撮影した画像データを解析ソフト上で扱うには、ビットマップ画像に変換する必要がある。撮影したすべての画像についてこの変換を行う。この操作は撮影ソフト“VFC-300 Controller”上で行う。なお、これ以降の操作はすべて解析ソフト上での操作となる。

まず、ソフトを3D計測モードにする。続いて、3Dキャリブレーションの項目を選択し、直方体のフレームの画像を、それぞれのカメラで撮ったものから1枚ずつ読み込む。すなわち、別々の角度から撮影した計2枚のフレーム画像を読み込むことになる。その後、図3のように設定した3次元デカルト座標（ y 方向は鉛直上向き）における8つの頂点それぞれの x , y , z 座標を与える。この際、左下奥の頂点を $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ の原点とする。この直方体のフレームは、 x , y , z 方向の長さがそれぞれ40 cm, 40 cm, 20 cmであるので、原点以外の7つの頂点についてはそれをもとに座標を設定する。例えば、右上手前の座標は $(x, y, z) = (40, 40, 20)$ である。この操作を3Dキャリブレーションといい、これによって座標空間を設定する。

次に、3D追跡計測の項目を選択し、ジャイロスコープの画像（以下、単に“画像”という）

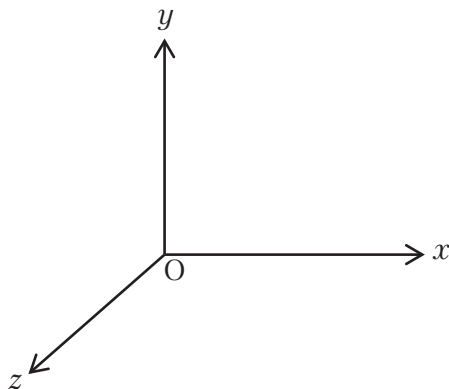


図3. 設定した座標軸
 y 方向が鉛直上向き方向である。

を、それぞれのカメラで撮ったものについて両方読み込む。先ほどのフレームと違い、1枚ずつではなく、歳差が1周する程度の枚数、すなわち100枚程度読み込む。画面上には、左にカメラ1の画像、右にカメラ2の画像が横並びになるようにすると操作がしやすい。

続いて、撮影の際に取り付けたLEDを、運動を追跡するためのマーカーとして解析ソフトに認識させる。軸の先端のLED1つと、外周のLEDのうちのどれか1つ、計2つをマーカーとして認識させれば十分である。この際、まずはRGBモードで、カメラ1、カメラ2それぞれの画像中のどのLEDとどのLEDが対応するのかを確かめておく。その後、対応するLEDどうしを同じ番号に設定する。具体的には、カメラ1の画像において、軸の先端に取り付けた黄色のLEDをマーカー1とし、次にカメラ2の画像においても同様に、軸の先端のLEDをマーカー1とする。このようにすることで、解析ソフト上では、そのマーカー1が3次元的に把握されたことになる。同様の操作を外周の黄色いLED1つについても行い、それをマーカー2とする。

その後、画像をモノクロモードにすると、LEDのマーカーだけが白くなり、それ以外の部分が黒くなる。このモノクロモードによって、RGBモードよりも解析ソフトがマーカーを追跡しやすくなる。

最後に、追跡モードをオートにして追跡を開始する。画面上では、例えば100枚読み込んだ場合、1枚目から100枚目まで画像がスライドショーのように再生される。その間、当然2つのマーカーは移動するのだが、それをソフトが自動的に追跡するのである。

追跡が終了すると、それぞれのマーカーの各時刻の座標値が得られる。また、結果表示のタブに図4のようなマーカーの軌跡図、あるいは図5のようなマーカー座標の時間変化グラフを出力できる。その中から、マーカーの各時刻座標値と、適宜必要なものを保存し、処理を終了する。

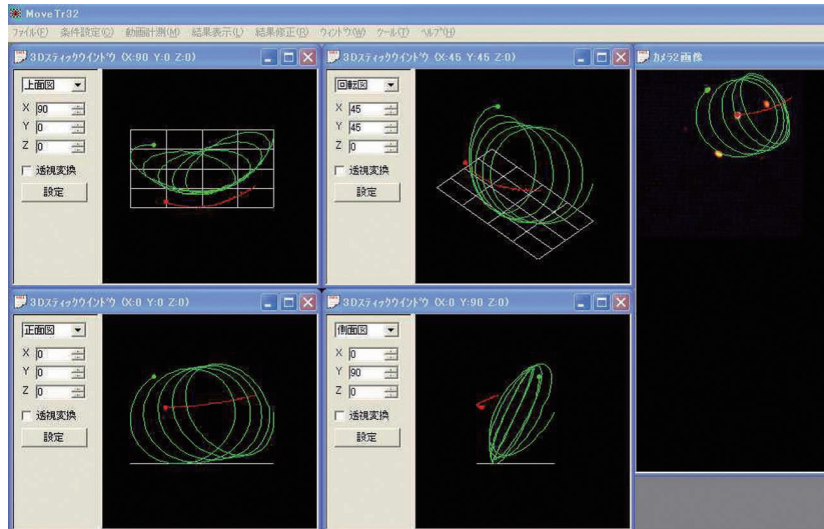


図 4. マーカーの軌跡図

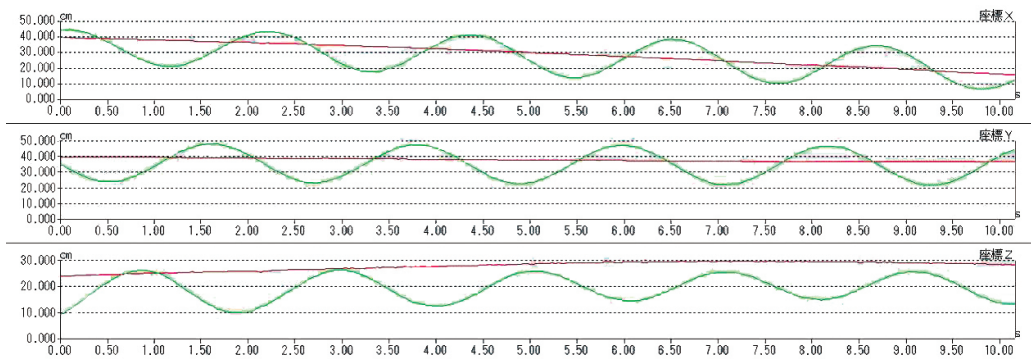
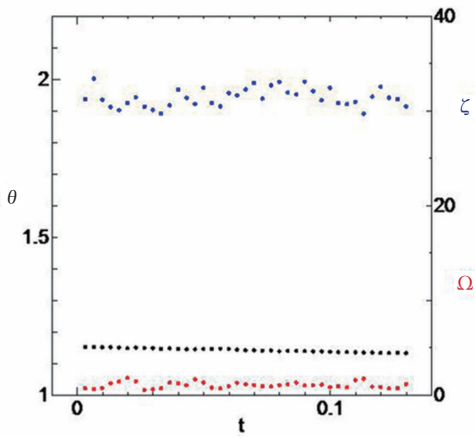


図 5. マーカー座標の時間変化グラフ
時刻は実際の10倍が表示されている。

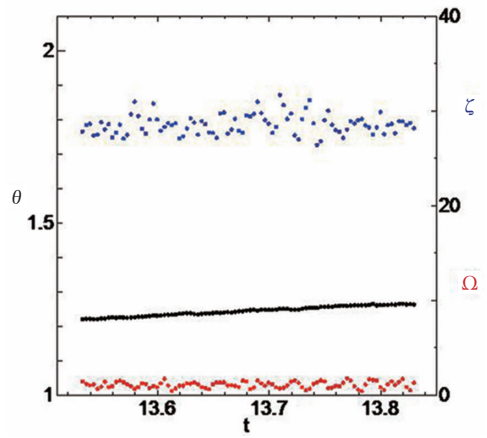
4. 解析結果

3. に説明した計測によって得られたマーカーの各時刻座標値を用い、付録に記載した解析方法によって、ジャイロスコープの傾斜角 θ ，歳差角速度 Ω ，自転角速度 ζ を算出した。図 6 は、 t を測定時刻として、測定番号 1～10 の測定におけるその結果を表した図である。黒丸、赤丸、青丸が、それぞれ θ ， Ω ， ζ を示している。

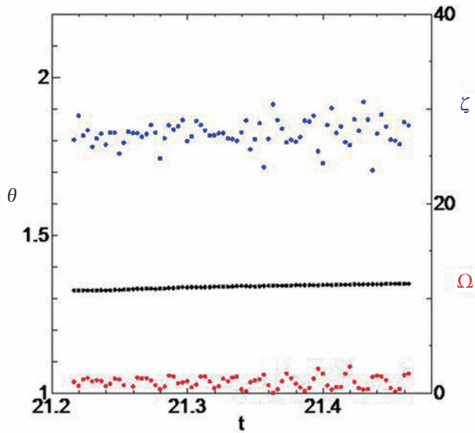
また、表 1 は図 6 の各測定番号の実験番号、および、各測定番号における平均時間と時間平均値 $\langle \theta \rangle$ ， $\langle \Omega \rangle$ ， $\langle \zeta \rangle$ ， $\langle \zeta \rangle / \langle \Omega \rangle$ ， $\langle \Omega \rangle \cdot \langle \zeta \rangle$ を示している。測定番号 1～3 は実験番号 1，測定番号 4 と 5 は実験番号 2，そして測定番号 6～8 は実験番号 3 の，実



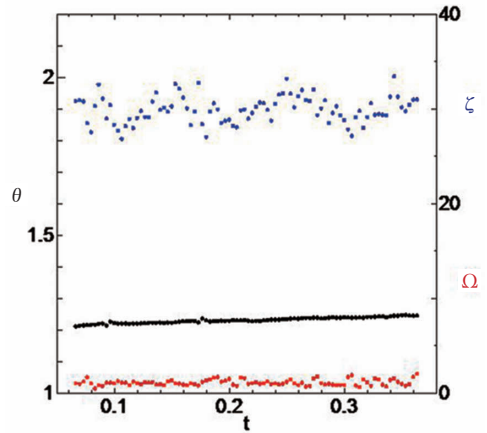
測定番号 1



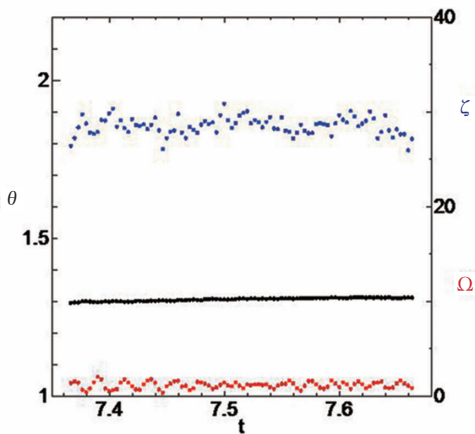
測定番号 2



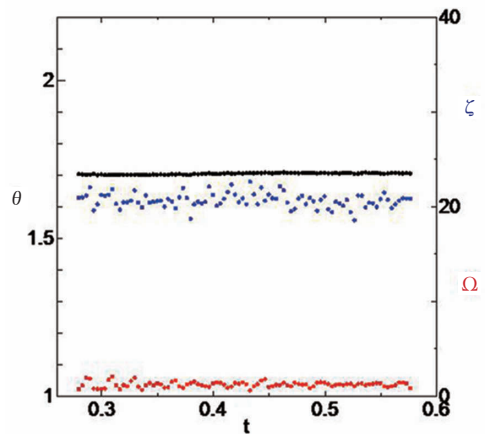
測定番号 3



測定番号 4



測定番号 5



測定番号 6

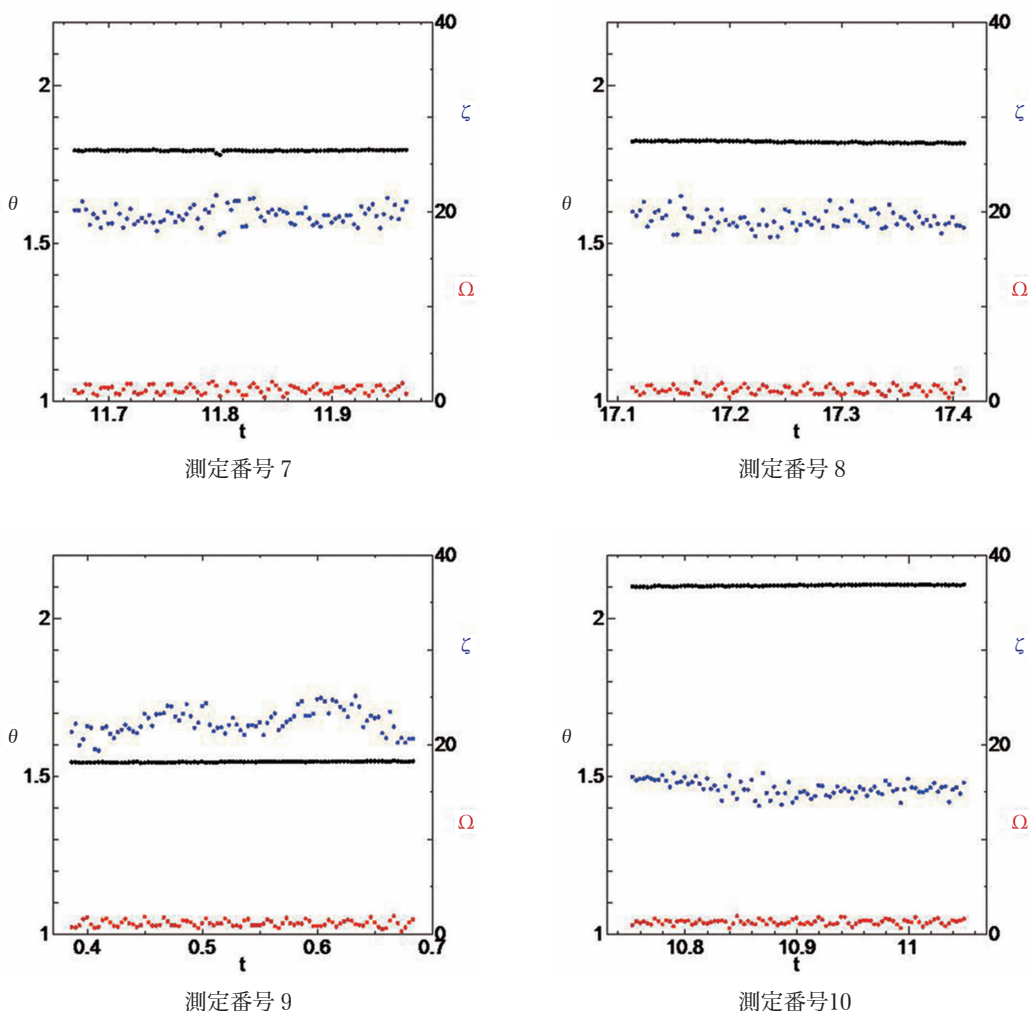


図6. 測定番号1～10の測定における傾斜角 θ (黒丸), 歳差角速度 Ω (赤丸), 自転角速度 ζ (青丸)の時間変化

験・計測における一連の解析結果である。どの測定番号も平均時間は図6に表示されたデータの時間範囲内であり、測定番号1と3以外はすべて $90/300(\text{s})=0.3(\text{s})$ である。測定番号1と3の平均時間がその他の場合より短いのは、単にマーカーを追跡できた時間が短いためである。

さらに図7は、表に示された値をプロットした図であり、時間平均自転角速度と時間平均歳差角速度との比 $\langle \zeta \rangle / \langle \Omega \rangle$ に対する、積 $\langle \Omega \rangle \cdot \langle \zeta \rangle$ と時間平均傾斜角 $\langle \theta \rangle$ の分布を表している。 $\langle \Omega \rangle \cdot \langle \zeta \rangle$ は正方形シンボルで示されており、その中の数字は測定番号を意味している。そして、 $\langle \theta \rangle$ は赤丸で表示されている。

まず図6に注目する。ジャイロスコープの対称軸と鉛直軸のなす角度である傾斜角 θ は、測定番号によってさまざまに異なる値をとり、ほぼ $1.1 < \theta < 2.2$ が成り立っている。注意す

表 1. 測定番号 1～10の実験番号, および平均時間と各量の平均値

測定番号	実験番号	平均時間 ($\times 1/300$ s)	$\langle \theta \rangle$ (rad)	$\langle \Omega \rangle$ (1/s)	$\langle \zeta \rangle$ (1/s)	$\langle \zeta \rangle / \langle \Omega \rangle$	$\langle \Omega \rangle \cdot \langle \zeta \rangle$ ($1/s^2$)
1	1	39	1.141	1.011	31.36	31.02	31.71
2	1	90	1.336	1.113	27.36	24.58	30.46
3	1	75	1.243	1.045	28.52	27.30	29.81
4	2	90	1.230	1.075	29.87	27.80	32.10
5	2	90	1.305	1.118	28.47	25.46	31.84
6	3	90	1.703	1.175	20.63	17.56	24.23
7	3	90	1.792	1.176	19.56	16.63	23.00
8	3	90	1.819	1.151	19.08	16.58	21.96
9	4	90	1.544	1.092	22.36	20.48	24.41
10	5	90	2.103	1.231	15.35	12.47	18.90

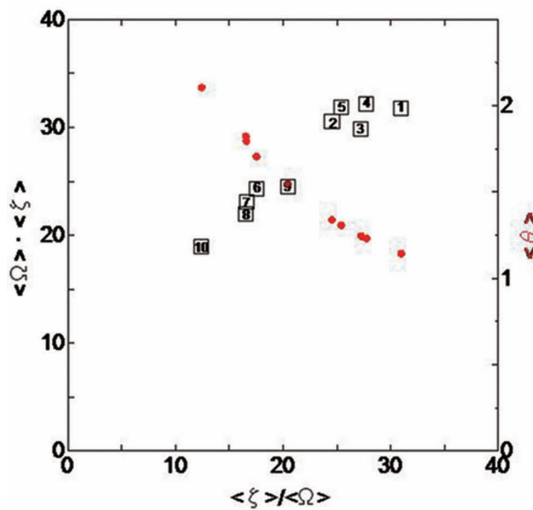


図 7. 時間平均自転角速度と時間平均歳差角速度との比 $\langle \zeta \rangle / \langle \Omega \rangle$ に対する, 積 $\langle \Omega \rangle \cdot \langle \zeta \rangle$ (正方形シンボル) と時間平均傾斜角 $\langle \theta \rangle$ (赤丸) の分布
正方形シンボルの中の数字は測定番号を示している。

べきは, 測定番号 1～5 では $\theta < \pi/2$, 測定番号 6～10 では $\theta \geq \pi/2$ となっている事実である。特に, 測定番号 9 では $\theta \sim \pi/2$ であり, ジャイロはほぼ水平に傾いていることを示している。また, 番号 1 と 8 の場合を除いて, θ は時間的にほぼ一定であるかゆっくり増大している。つまりジャイロスコープの傾きは, 測定期間中ほぼ一定であるか, 非常にゆっくり倒れている状況であることがわかる。測定番号 1 と 8 の場合では時間的に θ が減少しているが, これは章動のためであろう。次に, 歳差角速度 Ω について検討する。どの測定においても,

Ω は θ に比べてその値の揺らぎが出ている。これは、(A.1) によって評価される θ とは異なり、 Ω はその評価式 (A.6) に差分計算によって算出される速度を含んでいることが原因と思える。どの測定番号でも 3 (1/s) 未満の比較的小きな値をとっている。最後に、自転角速度 ζ についてである。この値についても、各測定で揺らぎが大きいのは Ω と同様の理由によると考えられる。そして測定により異なる値をとり、その範囲はほぼ 13 (1/s) 以上 34 (1/s) 未満である。どの測定においても、 ζ は Ω よりもかなり大きく、歳差運動と比べるととても速い自転運動をしていることがわかる。

最後に図7を見てみよう。前記のように Ω と ζ の揺らぎが大きいので、図7は時間平均量 $\langle \Omega \rangle$, $\langle \zeta \rangle$, $\langle \theta \rangle$, あるいはその組み合わせを図示している。ここでは、 Ω と ζ をそれぞれ $\langle \Omega \rangle$ と $\langle \zeta \rangle$ にみなせることを想定している。まず着目すべきは、 $\langle \zeta \rangle / \langle \Omega \rangle$ が約25以上の測定番号1~5では $\langle \Omega \rangle \cdot \langle \zeta \rangle$ の値がどれもほぼ一定の 30 (1/s²) となっており、公式 (1) の正当性が確認できることである。一方、 $\langle \zeta \rangle / \langle \Omega \rangle$ が20未満の測定番号6~10では、 $\langle \Omega \rangle \cdot \langle \zeta \rangle$ の値がどれも 30 (1/s²) より有意に小さく、ほぼ19以上24未満の範囲で変動しており一定とは見なせない。つまり公式 (1) が成り立っていない場合と結論される。そして、測定番号6~10では、積 $\langle \Omega \rangle \cdot \langle \zeta \rangle$ は $\langle \zeta \rangle / \langle \Omega \rangle$ が小さくなるにつれ減少するように見える。ここで、この結果を $\langle \theta \rangle$ のプロットと比較してみると、公式 (1) が破れるのは $\langle \theta \rangle$ が $\pi/2$ 以上の領域に対応していることがわかる。さらに、 $\langle \theta \rangle$ が $\pi/2$ からずれるにつれて、 $\langle \Omega \rangle \cdot \langle \zeta \rangle$ の値が減少していることも指摘できる。この関係は、 $\langle \Omega \rangle \cdot \langle \zeta \rangle$ を $\langle \theta \rangle$ の関数とみなし $\langle \Omega \rangle \cdot \langle \zeta \rangle = f(\langle \theta \rangle)$ とすると、 $f(\langle \theta \rangle) - f(\pi/2) \propto (\pi/2 - \langle \theta \rangle)$ と定量的に表現できる。

5. おわりに

本研究では、ジャイロスコプの運動を2台の高速度カメラを用いて撮影した。そして3次元動画計測ソフトによって、ジャイロスコプに装着したマーカーの各時刻における位置座標を得た。そのデータを解析・時間平均することにより、ラグランジュのコマの歳差運動に関する公式 (1) を検証した。その結果、0.3 s 以内で時間平均された量が瞬時の量を代表すると仮定した場合、以下の事項が結論された。

- I. 自転角速度 ζ の歳差角速度 Ω に対する比 ζ/Ω が25より大きい場合は公式 (1) がよく成り立っている。
- II. ζ/Ω が20より小さい場合、公式 (1) は成立せず、積 $\Omega \cdot \zeta$ は公式 (1) の定数値より減少する。
- III. II における $\Omega \cdot \zeta$ の定数値からのずれは、傾斜角 θ が $\pi/2$ より大きくなった (水平より倒れた) 場合、顕著に生じ、 $\Omega \cdot \zeta$ の水平におけるその値との差は $\pi/2 - \theta$ に比例する。

以上の結論は、この研究の実験数および測定数が十分多くないので、どの程度普遍的である

か不明である。また、 ζ/Ω が10以下の興味深い場合の実験がなされていない。これらは今後の研究課題である。

6. 謝辞

本研究は平成24年度「慶應義塾学事振興資金」の補助を受けて行われた。ここに記して謝意を表す。

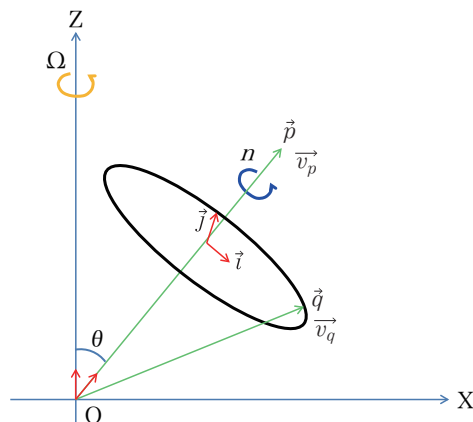
付録：解析方法

付図Aのように、ジャイロ스코ープの支点を原点Oとする実験室に固定した直交座標系XYZを考え、Z方向を鉛直方向にとり、その上向きの単位ベクトルを \vec{K} とする（本論文に報告した計測ではY方向を鉛直方向にとったが、この付録では慣習に従い、計測の座標系と異なる座標系を設定する）。同じ支点Oを原点とするジャイロ스코ープの各慣性主軸の単位ベクトルを \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} と表す。ただし、 \vec{k} はジャイロ스코ープの対称軸と平行、 \vec{i} は \vec{K} と \vec{k} のなす平面上にあって \vec{k} と垂直、そして \vec{j} は \vec{i} および \vec{k} と垂直とする⁵⁾。また、実験で用いた2つのマーカーの位置ベクトルを \vec{p} , \vec{q} , それぞれの速度を \vec{v}_p , \vec{v}_q とする。マーカーの1つはジャイロスコープの対称軸方向にとったので、それを \vec{p} とする。したがって、その大きさを p とする($p=|\vec{p}|$)と、 $\vec{p}=p\vec{k}$ である。

ここでは、 \vec{p} , \vec{q} , \vec{v}_p , \vec{v}_q , \vec{K} を用いて、 \vec{K} と \vec{k} のなす傾斜角 θ 、歳差角速度 Ω 、そして \vec{k} 方向の角速度 n を求める式を導出する。

まず、定義から明らかに、

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{p}}{p} \cdot \vec{K}\right) \quad \dots \text{(A. 1)}$$



付図A. ジャイロスコープの支点を原点Oとする座標系と記号の意味

次に、ジャイロスコープの角速度ベクトルを $\vec{\omega}$ 、質点の位置ベクトルを \vec{r} 、その速度ベクトルを \vec{v} とすると、一般に

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \dots \quad (\text{A. 2})$$

が成り立つ。ここで角速度ベクトル $\vec{\omega}$ は、 $\dot{\psi} = \zeta$ を自転角速度として、

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{j} + \dot{\psi} \vec{k} + \Omega \vec{K} = -\Omega \sin \theta \vec{i} + \dot{\theta} \vec{j} + n \vec{k} \quad \dots \quad (\text{A. 3})$$

と表せる。ただし、

$$n = \dot{\psi} + \Omega \cos \theta \quad \dots \quad (\text{A. 4})$$

である。ここで、 \vec{s} を任意のベクトルとして (A. 2) より、

$$\vec{s} \times \vec{v} = \vec{s} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{s} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - (\vec{s} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} \quad \dots \quad (\text{A. 5})$$

が成立することに着目する。

さて、(A. 5) において $\vec{s} = \vec{r} = \vec{p}$ 、 $\vec{v} = \vec{v}_p$ とし、 \vec{K} との内積をとると (A. 3) より

$$(\vec{p} \times \vec{v}_p) \cdot \vec{K} = p^2 (\Omega + \dot{\psi} \cos \theta) - (\dot{\psi} + \Omega \cos \theta) p^2 \cos \theta = p^2 \sin^2 \theta \Omega$$

が成立する。したがって、

$$\Omega = \frac{(\vec{p} \times \vec{v}_p) \cdot \vec{K}}{(p \sin \theta)^2} = \frac{(\vec{p} \times \vec{v}_p) \cdot \vec{K}}{p^2 - (\vec{p} \cdot \vec{K})^2} \quad \dots \quad (\text{A. 6})$$

一方、(A. 5) において $\vec{s} = \vec{r} = \vec{q}$ 、 $\vec{v} = \vec{v}_q$ とし、 \vec{k} との内積をとると (A. 3) より

$$(\vec{q} \times \vec{v}_q) \cdot \vec{k} = q^2 n - (\vec{q} \cdot \vec{\omega})(\vec{q} \cdot \vec{k}) \quad \dots \quad (\text{A. 7})$$

を得る。ただし、 q は \vec{q} の大きさである ($q = |\vec{q}|$)。また、(A. 5) において $\vec{s} = \vec{q}$ 、 $\vec{r} = \vec{p}$ 、 $\vec{v} = \vec{v}_p$ とし、 \vec{k} との内積をとると (A. 3) より

$$(\vec{q} \times \vec{v}_p) \cdot \vec{k} = (\vec{q} \cdot \vec{p}) n - (\vec{q} \cdot \vec{\omega}) p \quad \dots \quad (\text{A. 8})$$

ここで、(A. 7) に p を乗じた式と (A. 8) に $(\vec{q} \cdot \vec{k})$ を乗じた式との差をとると、

$$[\vec{q} \times \{\vec{v}_q - \vec{v}_p (\vec{q} \cdot \vec{p}) / p^2\}] \cdot \vec{p} = n \{q^2 p - (\vec{q} \cdot \vec{p})^2 / p\}$$

が成立する。したがって、

$$n = \frac{[\vec{q} \times \{p^2 \vec{v}_q - (\vec{p} \cdot \vec{q}) \vec{v}_p\}] \cdot \vec{p}}{\{p^2 q^2 - (\vec{p} \cdot \vec{q})^2\} p} = \frac{(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \{p^2 \vec{v}_q - (\vec{p} \cdot \vec{q}) \vec{v}_p\}}{\{p^2 q^2 - (\vec{p} \cdot \vec{q})^2\} p} \quad \dots \quad (\text{A. 9})$$

本研究では、 \vec{p} 、 \vec{q} 、 \vec{v}_p 、 \vec{v}_q 、 \vec{K} から (A. 1)、(A. 6)、(A. 9) によって θ 、 Ω 、 n をそれぞれ計算する。なお、 \vec{v}_p 、 \vec{v}_q は1/300 s 前後2時刻における \vec{p} 、 \vec{q} を用い、時間に関する中心差分により求める。

参考文献

- 1) 戸田盛和：「波動と非線形問題30講」，朝倉書店（1995），190-198.
- 2) 戸田盛和：「波動と非線形問題30講」，朝倉書店（1995），185-189.
- 3) 戸田盛和：「波動と非線形問題30講」，朝倉書店（1995），202-207.
- 4) H. K. Moffatt and Y. Shimomura: “Spinning eggs-a paradox resolved”, *Nature*, **416** (2002) 385-386.
- 5) H. K. Moffatt, Y. Shimomura and M. Branicki: “Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. I. Stability and the gyroscopic approximation”, *Proc. R. Soc.*, **A460** (2004) 3643-3672.
- 6) Y. Shimomura, M. Branicki and H. K. Moffatt: “Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. II. Self-induced jumping”, *Proc. R. Soc.*, **A461** (2005) 1753-1774.
- 7) T. Mitsui, K. Aihara, C. Terayama, H. Kobayashi and Y. Shimomura: “Can a spinning egg really jump?”, *Proc. R. Soc.*, **A462** (2006) 2897-2905.
- 8) 戸田盛和：「力学」，岩波書店（1982），184-187.