

Title	虹に関する学生実験について
Sub Title	On the observation of rainbow as an experiment for undergraduates
Author	阪口, 真(Sakaguchi, Makoto) 松浦, 壮(Matsuura, So)
Publisher	慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会
Publication year	2012
Jtitle	慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学 (The Hiyoshi review of the natural science). No.52 (2012. 9) ,p.49- 58
JaLC DOI	
Abstract	「虹はなぜできるのか?」という身近で素朴な疑問を取り上げた文系学生に対する物理実験テーマの構成を考案する。最初に幾何光学の基本法則(光の直進・反射・屈折の法則)をフェルマーの原理から誘導し、虹ができるメカニズムを解説する。実験では、虹ができるメカニズムにおいて重要な、光の波長によって屈折率が異なることを、波長の違うレーザー光線をアクリル板に入射して出射光の位置を測定して確かめる。実際に実験を行った結果についても述べる。課題として光線の広がりによる出射光の位置測定の誤差を小さくするためには光センサーの導入などの改善点があることを述べる。
Notes	研究ノート
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20120930-0049

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

虹に関する学生実験について

阪口 真*・松浦 壮

On the Observation of Rainbow as an Experiment for Undergraduates

Makoto SAKAGUCHI and So MATSUURA

要約

「虹はなぜできるのか?」という身近で素朴な疑問を取り上げた文系学生に対する物理実験テーマの構成を考案する。最初に幾何光学の基本法則(光の直進・反射・屈折の法則)をフェルマーの原理から誘導し、虹ができるメカニズムを解説する。実験では、虹ができるメカニズムにおいて重要な、光の波長によって屈折率が異なることを、波長の違うレーザー光線をアクリル板に入射して出射光の位置を測定して確かめる。実際に実験を行った結果についても述べる。課題として光線の広がりによる出射光の位置測定の誤差を小さくするためには光センサーの導入などの改善点があることを述べる。

Key words: rainbow, education, experiment

1. 序論

雨上がりの空や公園の噴水の周りで虹を見かけたことがあるだろう。ではなぜ虹はできるのだろうか? 空気中の水滴と太陽光が関係していることは容易に想像がつく。しかし、この素朴な疑問に対する答えは自明ではない。ある人はプリズムによる光の分散と同じメカニズムだと答えるかもしれない。しかしプリズムに入射する光はスリットを通した細い光でなければならない。太陽光などの平行光線を入射しても分散は確認できない。ましてや空気中の水滴は球

慶應義塾大学日吉物理学教室 (〒 223-8521 横浜市港北区日吉 4-1-1) : Department of Physics, Keio University, 4-1-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8521, Japan. [Received Apr. 3, 2012]

*2012年4月から茨城大学理学部 (〒 310-8512 水戸市文京 2-1-1) : Department of Physics, Ibaraki University, Mito 310-8512, Japan

形であり、プリズムのような三角柱ではない。

虹ができるメカニズムを理解するには、光の直進の法則、反射の法則、屈折の法則の理解が不可欠である。これらは幾何光学の3つの基本法則として知られており、「光はある点から他の点に進むとき、これに要する時間が最小になるような道筋を選ぶ」というフェルマーの原理から導くことができる。さらにこの原理は、光が電磁波であることから従うマックスウェル方程式のある近似として理解できる。つまり、光の波長に対して非常に大きいスケールでの物理を見る近似のもとで、つまり光を波動としてよりも光線として見る近似のもとで、フェルマーの原理はマックスウェル方程式から誘導できる。本論文では次節において、フェルマーの原理から幾何光学の3つの基本法則を誘導する。マックスウェル方程式からのフェルマーの原理の誘導については例えば [1] を参照されたい。

本研究では「虹はなぜできるのか？」という身近で素朴な疑問を取り上げて、文系学生に対する物理実験テーマを考案する。また実際に実験を行った結果や今後の課題についても述べる。実験では先ず緑色レーザー光を半円形スモークレンズに入射し、反射の法則と屈折の法則を確かめる。さらに虹ができるメカニズムにおいて重要な、光の波長による屈折率の違いを、赤色および緑色レーザー光を四角形のアクリル板に入射して出射光の位置を測定する実験で確かめる。当初、空気中の水滴に近い円形のアクリル板を使うことを考えたが、結局四角形のアクリル板を使うことにした。その理由は第5節でも述べるように、円形のアクリル板を使った場合、四角形のアクリル板に比べてレーザー光線の広がりが大きくなり、出射光の位置測定において誤差が大きくなるためである。この点を改善するには光センサーを導入するなど、出射光の位置測定の精度を上げる必要がある。

この論文の構成は以下の通りである。次節でフェルマーの原理から幾何光学の3つの基本法則を誘導し、本実験の屈折率の測定実験に関する簡単な解説を行う。続く第3節では虹が生まれるメカニズムを解説する。第4節では実験の具体的方法の説明とあわせて、実際に行った実験の結果について述べる。第5節でまとめと考察を行う。

2. 実験の原理

この節ではフェルマーの原理から幾何光学の基本法則（光の直進・反射・屈折の法則）を誘導する。また実験に必要な屈折率を求める方法について簡単に解説する。

以下、真空での光速を c [m/s]、媒質 I での光速を v_I [m/s] とし、媒質 I の（絶対）屈折率を $n_I \equiv \frac{c}{v_I}$ とする。

2-1. 光の直進・反射・屈折の法則

フェルマーの原理は「光はある点から他の点に進むとき、これに要する時間が最小になるような道筋を選ぶ」と表現される。この原理を媒質 I の中の2点に適用し光の直進の法則を導こう。この2点を結ぶあらゆる経路の長さは直線距離 L [m] より大きいので、要する時間は $L/$

v_1 [s] より大きい。つまり要する時間が最小になるのは2点を結ぶ直線である。従って光は直線に沿って進むという直進の法則が導けた。

次に媒質1の中の2点PとQを結び、媒質2との境界で反射する光の経路に対してフェルマーの原理を適用し反射の法則を導こう。右図のようにP, Qの境界からの距離を順に ℓ_P , ℓ_Q とし、水平距離を ℓ とする。このとき反射する点をA, PとAの水平距離を x とすると、要する時間は

$$T = \frac{1}{v_1} (\overline{PA} + \overline{AQ}) = \frac{1}{v_1} \left(\sqrt{\ell_P^2 + x^2} + \sqrt{\ell_Q^2 + (\ell - x)^2} \right)$$

となる。この T の x に関する極値

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_1} \left(\frac{x}{\sqrt{\ell_P^2 + x^2}} - \frac{\ell - x}{\sqrt{\ell_Q^2 + (\ell - x)^2}} \right) = \frac{1}{v_1} (\sin \theta_i - \sin \theta_r) = 0$$

より反射の法則

$$\theta_i = \theta_r \quad (1)$$

が従う。これはPとQを境界面で折り返したQ'を結ぶ直線上にAをとることを表す。

最後に媒質1中の点Pから媒質2中の点Qまで、境界上の点Aを通った経路に対してフェルマーの原理を適用し屈折の法則を導こう(右図参照)。このとき要する時間は

$$T = \frac{\overline{PA}}{v_1} + \frac{\overline{AQ}}{v_2} = \frac{\sqrt{\ell_P^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{\ell_Q^2 + (\ell - x)^2}}{v_2}$$

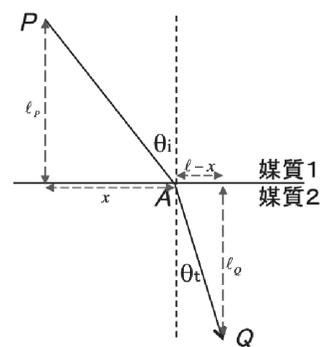
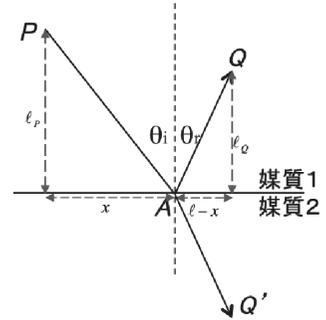
となる。この T の x に関する極値

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{\ell_P^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{\ell - x}{\sqrt{\ell_Q^2 + (\ell - x)^2}} = \frac{\sin \theta_i}{v_1} - \frac{\sin \theta_t}{v_2} = 0$$

より屈折の法則

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1} \equiv n_{12} \quad (2)$$

が従う。ここで n_{12} は媒質1に対する媒質2の相対屈折率と呼ばれる。さらに光が波であることから、振動数 f [Hz = s⁻¹] (波の連続性より振動数は媒質によらない) と媒質1中の波長を λ_1 [m] とし、光の速度は $v_1 = f\lambda_1$ とあらわされる。つまり屈折率は、媒質中での光の波長によって



$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{f\lambda_1}{f\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (3)$$

と決まる。

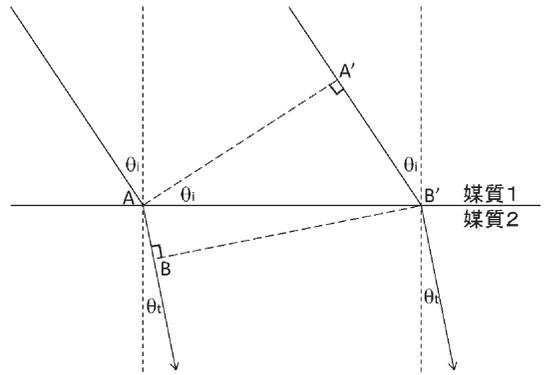
屈折の法則も微分を使わずに誘導できる。平行光線が媒質1から媒質2に右図のように入射したとする。このとき図より

$$\sin \theta_i = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB'}}, \quad \sin \theta_t = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}$$

が成り立つ。光がAからBまで伝播するのに要した時間とA'からB'まで伝播するのに要した時間は等しい(これを Δt [s] とする) ので、 $\overline{A'B'} = v_1 \Delta t$ 及び $\overline{AB} = v_2 \Delta t$ である。これらより屈折の法則

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{\overline{A'B'} / \overline{AB'}}{\overline{AB} / \overline{AB'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{v_1 \Delta t}{v_2 \Delta t} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}$$

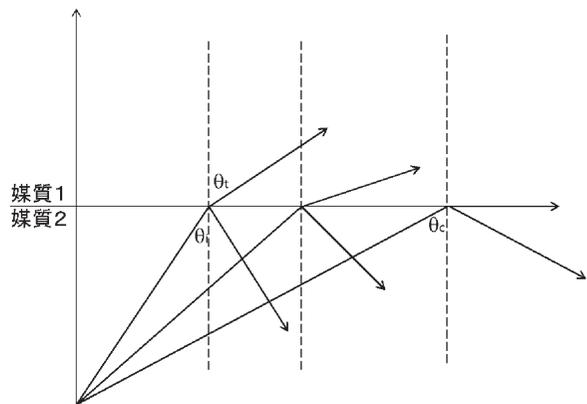
が導かれる。



2-2. 全反射

$n_1 < n_2$ の場合を考える。入射角を大きくしていくと、ある角度 $\theta_i \equiv \theta_c$ で屈折角が $\theta_t = \pi/2$ となり、媒質2へ光が透過しなくなる。この現象は全反射として知られ、光ケーブルにも応用されている。 θ_c と n_{12} には次のような関係がある。

$$\sin \theta_c = \frac{\sin \theta_c}{\sin \frac{\pi}{2}} = n_{21} = \frac{1}{n_{12}} \quad (4)$$



2-3. 平行な境界での屈折

右図のように媒質1の中に上面と下面が平行な媒質2を置く。下面から入射角 θ_i で光が入射し、媒質1へ出射していった。この時、 $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = n_{12}$ より、

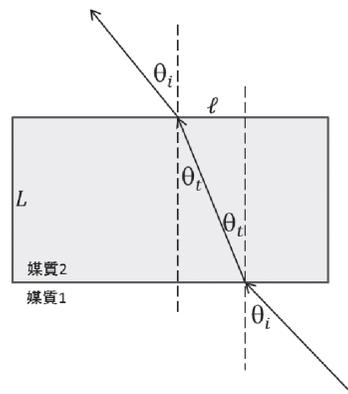
$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{n_{12}}, \quad \cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_i}{n_{12}}\right)^2}$$

が成り立つ。これらより入射点と出射点の水平方向の距離 ℓ は $\ell = L \tan \theta_t$ で与えられるので、

$$\frac{\ell}{L} = \tan \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{n_{12} \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_i}{n_{12}}\right)^2}}$$

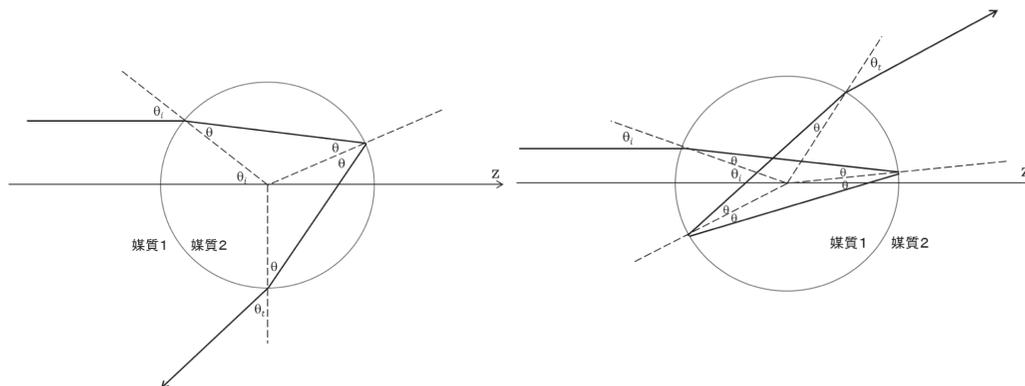
となる。さらにこれを屈折率について解くことで、入射角 θ_i と L/ℓ から屈折率が下の様に決まる。

$$n_{12} = \sqrt{1 + (L/\ell)^2} \sin \theta_i \quad (5)$$



3. 虹のできるメカニズム

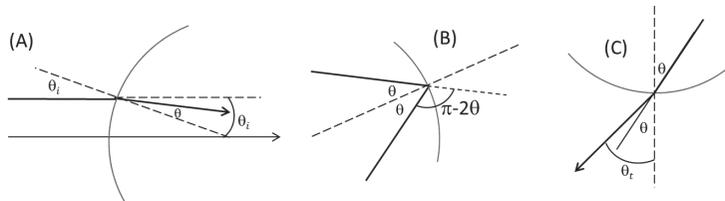
虹は空気中の水滴に光が入射し屈折と反射をすることで現れる。特に水滴中で1回反射した光を主虹, 2回反射した光を副虹, 3回反射した光を副副虹と呼ぶ。本節では虹が生まれるメカニズムについて解説する。



媒質1の中に置かれた媒質2でできた球体(屈折率 $n_{12} > 1$ とする)に入射した平行光線を考える。光線に平行で球体の中心を通る軸を z 軸として、 z 軸から時計回りに測った出射光の角度を求める。

次の3つの要素によって光は進路を変える。(A, B, Cは下の図に対応)

- A) 媒質1から媒質2へ入射し屈折する際の角度変化は $\theta_i - \theta$ である。
- B) 媒質2内で1回反射するときの角度変化が $\pi - 2\theta$ であることから、 k 回反射する場合の角度変化は $k(\pi - 2\theta)$ である。
- C) 最後に媒質2から媒質1へ入射する際の角度変化は $\theta_i - \theta$ である。

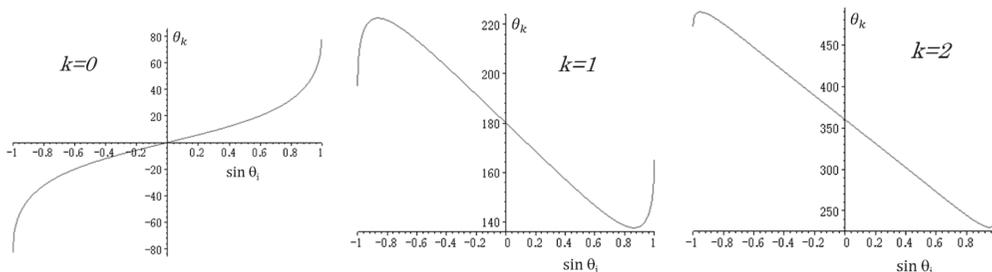


以上より k 回反射した場合の角度変化が

$$\theta_k \equiv \theta_i - \theta + k(\pi - 2\theta) + \theta_t - \theta = 2\theta_i - 2(k+1)\theta + k\pi \quad (6)$$

だとわかる。2つ目の等号で、 $\sin \theta_i / \sin \theta = n_{12}$ と $\sin \theta / \sin \theta_i = n_{21} = 1/n_{12}$ から従う $\theta_t = \theta_i$ を使った。 θ は、 $\sin \theta_i / \sin \theta = n_{12}$ を通じて θ_i と関係が付いているので、 θ_i を決めれば (6) より θ_k が決まる。

$k = 0, 1, 2$ の場合に、横軸を入射光の衝突係数 $\sin \theta_i$ とした時の θ_k の値をグラフに示す。



ただし $n_{12} = 1.33$ とした。上図より $k = 0$ の時 θ_k は極値を持たないが、 $k = 1, 2$ の時には極値を持つことが分かる。出射光は極値付近の θ_k に集積して明るく見える。

実際、式 (6) の θ_k を $\sin \theta_i \equiv t$ に関して微分すると

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \frac{2}{\sqrt{n_{12}^2 - t^2}} \left(\sqrt{\frac{n_{12}^2 - t^2}{1 - t^2}} - (k + 1) \right) \quad (7)$$

となることから、 $k = 0$ のとき、 $n_{12} > 1$ より $d\theta_k/dt > 0$ なので、 θ_k は単調増加で極値を持たないことが分かる。また $k \geq 1$ の時は、($2 > n_{12}$ として)

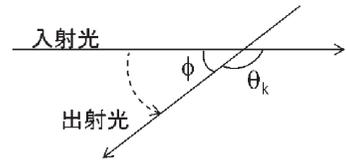
$$t^2 = \frac{(k + 1)^2 - n_{12}^2}{(k + 1)^2 - 1}$$

から決まる $\theta_i = \theta_i^e$ で、 θ_k が極値 θ_k^e を持つことがわかる。逆に極値を与える t が分かれば、

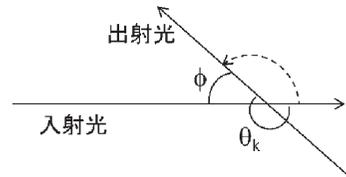
$$n_{12} = \sqrt{(k + 1)^2 + t^2((k + 1)^2 - 1)} \quad (8)$$

より屈折率が求められる。さらに、 $\sqrt{\frac{n_{12}^2 - t^2}{1 - t^2}}$ を t 微分することで、これが t に関して単調増加であることが分かる。よって(7)より $-\theta_i^e < \theta_i < \theta_i^e$ では、 $\frac{d\theta_k}{dt} < 0$ であると分かる。以上より $k \geq 1$ の時、 θ_k は $-\theta_i^e < \theta_i < \theta_i^e$ で単調減少関数である。以下に $k = 1, 2, 3$ の場合に極値の値を具体的に求めた結果を示す。表の右の図の点線矢印は $\theta_i = 0$ から θ_i^e までの変化の方向を表す。

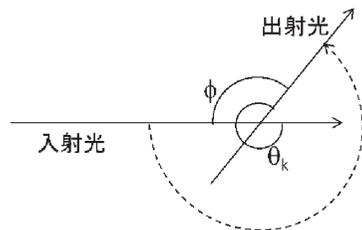
$k = 1$	$n = 1.33$	$n = 1.335$	$n = 1.34$
θ_i^e	59.6	59.3	59.0
θ_1^e	137.5	138.2	138.9
ϕ^e	42.5	41.8	41.1



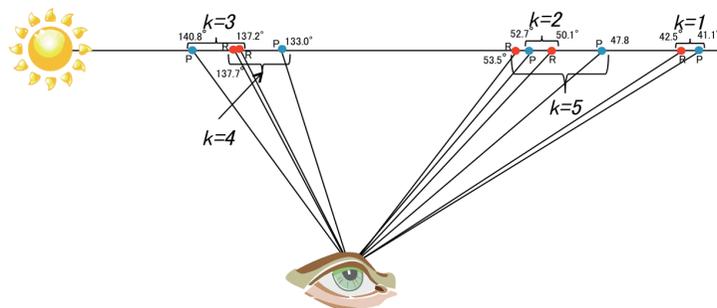
$k = 2$	$n = 1.33$	$n = 1.335$	$n = 1.34$
θ_i^e	71.9	71.8	71.6
θ_1^e	230.1	231.4	232.7
ϕ^e	50.1	51.4	52.7



$k = 3$	$n = 1.33$	$n = 1.335$	$n = 1.34$
θ_i^e	76.9	76.8	76.7
θ_1^e	317.2	319.0	320.8
ϕ^e	137.2	139.0	140.8



第4節の実験で示すように、屈折率は波長によって変わる。実際、水の屈折率は、赤色光の場合およそ $n_{12} = 1.33$ であり、紫色光の場合およそ $n_{12} = 1.34$ であることが知られている。 $k = 1$ の場合を見ると、 $\phi^e = 42.5^\circ$ 方向に赤色が強く出射し、 $\phi^e = 41.1^\circ$ 方向に紫色が強く出射する。このように、波長によって屈折率が異なり、輝線の出射角度が異なることが虹の現れるメカニズムである。これを図示すると下のようになる。



ここでRとPは順に赤色と紫色を表す。主虹($k=1$)は外側が赤, 副虹($k=2$)は内側が赤となることが分かる。ちなみに副副虹($k=3$)は外側が赤, $k=4$ の虹は内側が赤, $k=5$ の虹は外側が赤となる。

反射するごとに光の強度が落ちるので反射回数の多い虹は一般に非常に見えにくい。 $k=1$ の出射光と $k=2$ の出射光の間は太陽光が出射しないので暗く($k=5$ の虹は非常に暗い), アレキサンダー暗帯と呼ばれる。

4. 実験方法と結果

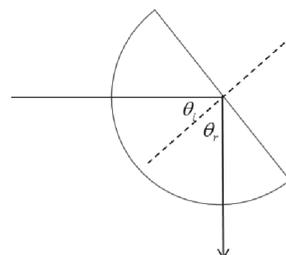
この節では, 反射と屈折の法則の実験と, 波長による屈折率の違いを測定する実験について, その方法と結果を述べる。

使用した実験装置は以下の通りである。赤色レーザー光源(波長635nm), 緑色レーザー光源(波長532nm), 半円形スモークレンズ, アクリル四角柱(100mm×100mm×20mm)。

1. 反射の法則の実験

右図のように半円形スモークレンズに緑色レーザー光を当て, 入射角を変えて反射角を測定し, 式(1)が成り立つことを確かめる。結果として以下を得た。

入射角	20°	30°	40°
反射角	20°	30°	40°

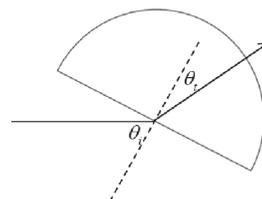


これより屈折の法則が成り立っていることが確かめられた。

2. 屈折の法則の実験

右図のように半円形スモークレンズに赤色レーザー光を当て, 入射角を変えて屈折角を測定する。測定値を式(2)に代入し, n_{12} を求める。結果として以下を得た。

入射角	30°	40°	50°	60°
屈折角	19°	25°	30°	35°
n_{12}	1.54	1.52	1.53	1.51



屈折率はこの平均として $n_{12}=1.52$ が得られた。

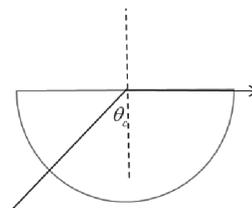
3. アクリル中の波長

式(3)より, 空気中での波長が分かればアクリル中での波長が分かる。実験2で得られた屈折率を使い, 空気中での波長を635nmとして, アクリル中の波長を求めると, 波長=635nm/1.52=416nmであることが分かった。

4. 臨界角から屈折率を求める。

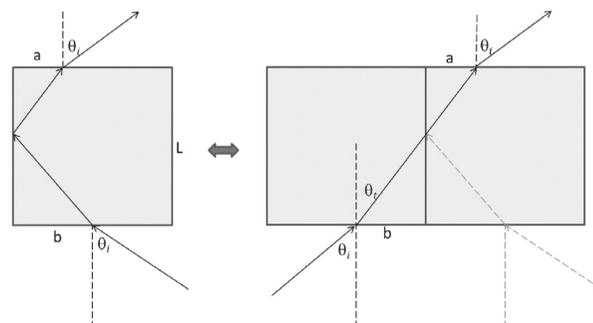
入射角を変えて、全反射が起こる入射角の臨界角 θ_c を求めると、 $\theta_c = 41^\circ$ が得られた。

式 (4) より、 $\sin \theta_c$ は $n_{21} = 1/n_{12}$ に等しいと期待される。つまり臨界角より $n_{12} = 1/\sin \theta_c = 1.52$ が得られた。この値は実験 2 から得られた値とよく一致し、得られた屈折率が正しい値であることが分かった。



5. 波長による屈折率の違い。

図のようにアクリル四角柱の底面に入射角 $\theta_i = 60^\circ$ で緑色レーザー光を入射する。レーザー光はアクリル四角柱内で1回反射させ上面から出射させる。入射点から出射点までの水平距離は $l = a + b$ で与えられる。 l を求め、式 (5) より屈折率を求める。



結果として $l = 40\text{mm} + 30\text{mm} = 70\text{mm}$ となった。これより $n_{12} = 1.510$ が得られた。

6. 赤色レーザー光を使って実験 5 を行う。

結果として $l = 42\text{mm} + 30\text{mm} = 72\text{mm}$ となった。これより $n_{12} = 1.482$ が得られた。

5. まとめと考察

フェルマーの原理から幾何光学の3つの基本法則を誘導し、虹が生まれるメカニズムを解説した。また「虹はなぜできるのか?」という身近で素朴な疑問を取り上げて、文系学生に対する物理実験テーマの構成を考案し検証した。実験ではまずレーザー光を半円形スモークレンズに入射し、反射の法則と屈折の法則を確かめた。また臨界角から屈折率を求めた。さらに虹ができるメカニズムにおいて重要な光の波長による屈折率の違いを、赤色および緑色レーザー光を四角形のアクリル板に入射して出射光の位置を測定する実験で確かめた。

当初、空気中の水滴に形状に近い円形のアクリル板を使い実験の構成を行っていた。当初考えたアクリル円柱(直径150mm 厚さ10mm)を使った実験構成は以下の通りである。

1. 緑色レーザー光線をアクリル円柱に入射し、反射回数 $k = 1$ の出射光を調べる。入射光の衝突係数を $t = \sin \theta_i = 0$ から大きくしていったときに時に出現光の角度に極値があることを確かめ、以下の測定を行う。

- (a) 極値の時の衝突係数 t を測定する。
 - (b) 式 (8) にこの値を代入し屈折率を求める。
2. 赤色レーザー光線を使って上の実験 1 を行い屈折率を求める。
 3. 反射回数 $k = 2$ の出射光に対して上の実験 1 および 2 を行い屈折率を求め、実験 1 および 2 で得られた屈折率と比較する。

これらの実験を行ってみると、光線の広がりが大きいために出射光の位置測定に大きな誤差が生じ、定量的考察を行うには困難があった。そこで結局、四角形のアクリル板を使うことにした。さらに入射角を選ぶなどして光線の広がりを極力抑える工夫を行った。

出射光の位置測定の精度向上には、光センサーの導入などが有効であると考えられる。今後の課題としては、光センサーの導入により出射光の位置測定の向上と、これにより可能になるであろう円形のアクリル板を使った上記の実験の導入である。これにより学生にとってより有意義な実験構成になるとと思われる。

謝辞

本研究は文部科学省「大学教育・学生支援推進事業大学教育推進プログラム」の支援のもと実行した。

参考文献

- [1] 斉藤晴男・松田久・砂川重信共編「物理学への道 下」学術図書出版社 ISBN978-4-87361-006-1。