

Title	ブラウン運動観測の学生実験について
Sub Title	On the observation of Brownian motion as an experiment for undergraduates
Author	青木, 健一郎(Aoki, Kenichiro) 柴崎, 彬(Shibasaki, Akira)
Publisher	慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会
Publication year	2006
Jtitle	慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学 No.39 (2006.) ,p.21- 52
JaLC DOI	
Abstract	We present an explicit realization of the classic experiment on Brownian motion that is appropriate for undergraduate education. The philosophy of the experiment basically follows that of Einstein. In particular, we formulate the experiment so that it can be performed by students in humanities and social sciences meaningfully. The set up and various parameters that facilitate the experiment without losing its essence are investigated and discussed. The experiment is currently being employed successfully in undergraduate education for students in humanities and social sciences, at Keio University.
Notes	
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20060000-0021

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

ブラウン運動観測の学生実験について

青木健一郎*・柴崎彬†

On the Observation of Brownian Motion as an Experiment for Undergraduates

Kenichiro AOKI and Akira SHIBASAKI

Summary — We present an explicit realization of the classic experiment on Brownian motion that is appropriate for undergraduate education. The philosophy of the experiment basically follows that of Einstein. In particular, we formulate the experiment so that it can be performed by students in humanities and social sciences meaningfully. The set up and various parameters that facilitate the experiment without losing its essence are investigated and discussed. The experiment is currently being employed successfully in undergraduate education for students in humanities and social sciences, at Keio University.

Key words: Brownian motion, education, experiment.

1 序論

ブラウン運動の観測の実験は1905年に Einstein によって、原子の存在を確かめる方法として提唱された^[1]。その後、Perrin がこの実験を実施し、ノーベル賞を1926年に受賞している^[2,3]。20世紀初頭にはまだ原子の存在が確立されておらず、この実験は原子論の確立に大きな役割を果たした歴史的に重要な実験である。さらに、原子の存在を実感できるという意味で学生実験としても大変意義のある実験である。しかし、この実験はいくつかの大学に理科系の学生のた

*慶應義塾大学日吉物理学教室 (〒223-8521 横浜市港北区日吉4-1-1) : Department of Physics, Keio University, 4-1-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8521, Japan. E-mail: ken@phys-h.keio.ac.jp [Received Nov. 16, 2005]

†東京大学大学院工学系物理工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1) : Department of Applied Physics, University of Tokyo, 7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan. E-mail: shibasaki@looper.t.u-tokyo.ac.jp

めに導入されているようであるが、標準的な学生実験の教科書には掲載されていない。

我々はブラウン運動観測の実験を文系学生のための実験として導入するために様々なパラメーターの調整と構成の調整を行った。本論文ではこれらの結果をまとめる。ブラウン運動の実験は原理的には簡単であるが、学生実験として導入するには、様々な制約があるので実用的なデータとして役立つ幸いである。我々の目的は物理の本質を損なわずに文系学生が十分に理解し、実行できる実験をデザインすることである。これを発展させて、より高度な内容を含めたり、より精度の高い結果を求めることは十分に可能である。

2 実験の概要

2.1 実験の目的

ブラウン運動の観測実験の目的は、溶液中のブラウン運動の様子を観測し、それを用いて溶液の分子の数を測定することとする。ブラウン運動に関する実験で他の目的を設定したものも考えられる。我々は基本的に1905年のEinsteinの哲学に従ったものを採用した。学生は原子、分子の存在については読んだり聞いたりしており、疑う者は数少ない。しかし、実際にはそれがどのような物理的效果をもたらすかは全く知らず、スケールも全く把握していない者が多い。よって、できる限りシンプルな理屈で原子、分子の存在を実感することを目的とした。分子の数を測定し、Avogadro数を出すことによって通常使われている数値が自分でも得られるものとして実感できると期待している。

2.2 実験の原理

実験の原理は単純である。溶液に顕微鏡に見える程度の大きさの粒子を入れるとその粒子は熱運動をしている溶液の多くの分子により衝突を絶えず受ける。それにより粒子はランダムな運動、ブラウン運動をする。ブラウン運動は単に粒子の熱運動ともみなすことができる(単純に熱運動とみなすと等分配則(7)より直径 $0.8\mu\text{m}$ の粒子の早さは 3mm/s 程度である)。粒子はランダムな運動をし拡散し、その振る舞いは拡散係数 D を用いて1次元では以下の式で表される。

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt \quad (1)$$

この式では $\langle \dots \rangle$ は平均を表す。より高次元では、次元の間に相関はないので1次元ごとに上の式が成り立つ。

Einsteinは拡散係数とAvogadro数の間に以下の関係があることを導いた。

$$D = \frac{RT}{6\pi a\eta N_A} \quad (2)$$

この式では、 T は温度、 a は粒子の半径、 η は溶液の粘性係数、 $R=8.31\text{ [JK}^{-1}\text{]}$ は気体定数、 N_A はAvogadro数を表す。ここで、 N_A 以外は、上式に含まれる量が全て巨視的な量であること

が重要である。この関係式の成り立つ理由をまとめる^[4]。各次元について考えれば良いので1次元で考える。Newtonの法則により以下の式が成り立つ。

$$m\alpha = F_{\text{total}} = -\mu v + F_{\text{random}} \quad (3)$$

m , v , α はそれぞれブラウン運動する粒子の質量, 速度, 加速度である。 $\mu v = 6\pi a\eta v$ は水の粘性による抵抗力であり, この関係はStokesの法則とよばれる。粒子が水中を進むときには粘性があるために抵抗があり, 粒子が大きいほど抵抗力が大きいというのは自然である。 F_{random} は粒子が水分子から受けるランダムな力でブラウン運動の元である。粒子の位置座標を x とすると以下の式が成り立つ。

$$x \frac{d^2}{dt^2}x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}(x^2) - v^2 \quad (4)$$

よって運動方程式(3)の両辺に x をかけると下式が得られる。

$$m \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}(x^2) - v^2 \right] = -\frac{1}{2} \mu \frac{d}{dt}(x^2) + xF_{\text{random}} \quad (5)$$

この式を粒子について平均を取る。 F_{random} はランダムに働いており, 位置 x とは無関係なので $\langle xF_{\text{random}} \rangle = 0$ となり次式を得る。

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} + \frac{\mu}{2} \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = kT \quad (6)$$

ここで以下の等分配の法則を使った。

$$m \langle v^2 \rangle = kT, \quad N_A k = R \quad (7)$$

運動方程式から得られた $d \langle x^2 \rangle / dt$ に関する1次の微分方程式(5)の一般解は以下の通りである。

$$\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{2kT}{\mu} + C e^{-\mu t/m} \quad (8)$$

この式より Einstein の関係を満たす拡散係数(2)が求まる。

2.3 実験の仕組みと手順

まず, 実験の基本的な仕組みと手順を手短かに説明する。実験の構造の模式図は図1に示す。

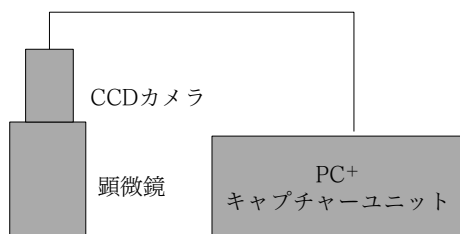


図1 実験機材の構成の模式図

実験の手順はいたってシンプルである。まず, ポリスチレンの粒子の入った水をスライドガラ

スに載せ、それを顕微鏡にセットする。ブラウン運動の様子を CCD カメラとビデオキャプチャーユニットを通して PC で録画する。録画したブラウン運動から粒子の軌跡を一定時間ごとにいくつかの粒子について測定する。同様に対物微尺の画像も録画する。

解析もわかりやすい。粒子の位置の測定から粒子の 2 次元面での移動距離 r が簡単に求まる。距離のスケールは対物微尺の画像より較正できる。2 次元の拡散であることに注意する。拡散は粒子の r^2 の平均を取ることににより以下のように表される。

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = 4Dt \quad (9)$$

これより拡散係数 D が求まる。Einstein の関係式(2)を用いて Avogadro 数 N_A を計算する。この際、 η , R , a は与えられているとする。

実験の構成と手順について実用面を考慮して幾つかコメントする。

- ・水とポリスチレンの選択は安全性、入手の容易さを考えたものである。また、水とポリスチレンの密度が近いこと（5%程度の差）は5節で説明するように重要である。
- ・ブラウン運動を観察するだけであれば機材は顕微鏡だけで十分である。しかし、粒子の運動を測定するとなると顕微鏡では正確に位置を測定するのは困難であり、可能であったとしても眼は疲労する。よって投影して測定するのが良い。
- ・投影して見る場合には録画ができた方が実験は大に行いやすい。なぜならば、観測途中で粒子を見失ったりすることが起こりやすいが、録画されていればもう一度再生できるからである。
- ・録画することのもう1つの大きな利点は長めに録画してあれば良い状況での観測がしやすいことにある。現実には実験室は理想的状況にはなく、机が揺れたり、粒子が流れるように運動したりと色々問題が起きる。このような場合に長めに録画してあれば、良い観測状況での観測データを選びやすい。
- ・録画の媒体としては DVD プレーヤーと TV モニタかキャプチャーユニットと PC の組み合わせが考えられる。後者を選んだのは、PCの方が汎用性が高く、他の実験でも利用できる可能性が高いのが主たる理由である。また、後者の方が収納時に小さくできるというのも軽視できない理由である。コスト的にはおおむね同じである。
- ・粒子の軌跡は画面に OHP 用紙を貼り付けてその上にペンで記録することにした。コンピューターで直接読み取った方が精度は高いと思われるが、この比較的原始的な方法を選んだ理由は以下の通りである。
 - 何をしているかが誰でも理解できる。
 - PC が不得意でも確実にこなせて、不必要な負担が増えない。
 - 書き込むことにより容易にレポートを提出できる。

3 実験実施に留意すべき点

以上で実験の概要は説明したが、実際に学生実験として導入するにあたって我々は以下のよ
うな点に留意する必要があると考えている。

1. 実験は十分安全であるか？
2. 実験は興味深いものであるのか？
3. 学生に理解できるのか？
4. 実験の困難さは適切か？
5. 時間的に可能か？
6. コスト的に適切か？
7. スペース的に可能か？

既に前節で幾点かについては言及したが、以下に我々の考察をまとめる。

1. 本実験は大変安全な実験な部類に入る。気を付ける必要があるのはスライドガラスとカバーガラスを割らないように扱うことであるがこれは顕微鏡を使う実験には常に付随する点である。
2. 学生にとっては原子・分子の存在を実感できる興味深い実験と思われる。他にも単分子膜の厚さとして分子の大きさを測定する実験も導入している。これに比べブラウン運動の観測実験は動的に分子の数を求めるので、定性的に異なった面白さがあると思われる。
3. ブラウン運動による拡散と分子の数を結び付ける Einstein の関係式(2)は2.2で導いたように決して難しくない。さらに、ブラウン運動は溶液の分子の揺らぎによって生じており、それが無限に多ければ拡散しないというのは直感的に理解ができる。よって最低でも定性的には Einstein の関係式は理解できるはずである。
4. 実験自体は決して困難ではない。むしろ簡単とも言える。
5. 時間的には軌道を測定する粒子数、時間を調節すれば十分に可能である（我々の実験では説明、実験、レポートを書く時間全てを合わせて3時間である）。
6. コスト的には決して高くはない。2005年現在でPCやキャプチャーユニットは合わせても10数万円程度である。また、CCDカメラは比較的安価（数万円程度）で高性能のセキュリティ用のカメラがあるのでそれを利用できる。顕微鏡は倍率40の対物レンズは必要であるが、CCDカメラ用のアダプターを付ければ通常の顕微鏡で行える。
7. 顕微鏡とPCを設置するスペースが必要である。ノートPCであれば収納時には場所をかなり節約できる。

以上で実施の問題を含めて実験について説明してきた。しかし、学生実験として導入するためには実験のパラメーターを含めまだ幾つか検討すべき課題がある。

- ・ポリスチレン粒子の大きさはどの程度が適切か？
- ・何粒子について平均を取るのか？
- ・1粒子についてどの程度の時間間隔で、合計どの程度の時間測定するのか？

これらのパラメーターは実験の行いやすさ、また実験時間の制限の下で調整する必要がある。よってこれらについては我々は色々なパラメーターで実験を行い、確かめた。

観測データについては多くの粒子について長い時間測定した方が精度が高い。しかし、実際には時間の制約、また学生にとっての教育効果も考慮せねばならない。我々は最終的な結果の精度として数10%以内の誤差でAvogadro数を求めることを基準とした。精度を高めることは可能であるが、その際、水の粘性係数が室温付近では5度につき10%程度変化することに注意する必要がある。光を照射していることも考慮すると水の温度を測定するのは簡単ではない。我々の実験法では精度は5~10%程度が限界だと推定される。

以下ではまず4節で粒子の大きさ等の実験パラメーターを変えた場合にどのような影響があるかを調べたので、その実験結果を説明する。多少長いですが、個々の実験で方法、調べた内容が少しずつ異なり、参考になりうるのでそれぞれについて結果を短く記す。次に、粒子の数密度は溶液中での高さに依存するが、それを5節で調べる。また、実験をしてみると予見されない問題が発見される場合もあり、それについては6節でまとめて考察する。特に学生実験としての適性について考慮している。現在の実験に用いている学生用のテキストを付録Aに添付する。

4 ブラウン運動の観測実験結果

この節ではブラウン運動の観測実験を様々な条件下で行った結果をまとめる。特に直径 $2a = 0.10 \sim 3.0 \mu\text{m}$ までの粒子について大きさの影響を調べた。実験の方法は基本的に前節で説明した通りである。実験での録画はDVDレコーダーとモニタを用いた場合と、キャプチャーボードとPCを用いた場合があるがこれに本質的差はない。以下では必要がある場合は個々の実験に関するコメントを付してある。全体的なコメントは6節の考察でまとめる。

水の粘性係数 η は共通に必要な物理量であるので表1にまとめる^[5]。

温度[°C]	$\eta [\times 10^{-3} \text{m}^{-1} \text{kg s}^{-1}]$
10	1.307
15	1.138
20	1.002
25	0.890

表1 水の粘性係数とその温度依存性

4.1 実験 1

4.1.1 実験パラメーター

ラテックスビーズの直径	$2a$	$0.804\ \mu\text{m}$
室温		$(25\pm 3)\text{°C}$
モニター画面サイズ		$(280\pm 5)\times(220\pm 5)\text{mm}$
モニター画面に対応する実領域		$(90\pm 5)\times(70\pm 5)\ \mu\text{m}$

4.1.2 測定結果

3粒子について画面上の位置 (単位 [mm]) を測定。

時間 [s]	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
0	155	95	100	93	211	118
30	167	98	110	105	197	140
60	210	126	125	121	198	177
90	193	157	142	153	220	175
120	205	185	156	172		
150	185	176	182	159		
180			200	146		

4.1.3 解析結果とコメント

ブラウン運動の様子は図2のようであり、それぞれの粒子について拡散係数を以下の関係式より求めた。

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = 4Dt \tag{10}$$

粒子 1 $D = (1.6\pm 0.2)\times 10^{-12}\text{m}^2/\text{s}$

粒子 2 $D = (1.8\pm 0.2)\times 10^{-12}\text{m}^2/\text{s}$

粒子 3 $D = (1.1\pm 0.3)\times 10^{-12}\text{m}^2/\text{s}$

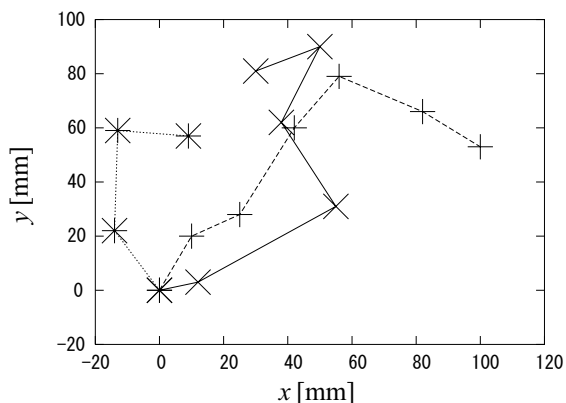


図2 ブラウン運動の様子 (スタート地点を原点とした)。粒子 1, 2, 3 を実線, 破線, 点線で表示。

Einstein の関係式(2)より, Avogadro 数を得る。

$$N_A = (2.5 \pm 1.5) \times 10^{23} \quad (11)$$

- ・全体としての定常的な流れは認められなかったが, 数分に一度程度の頻度で全体が大きく流れる現象が見られた。
- ・おおざっぱな実験でサンプル数も少ないことを考慮すると満足すべき結果である。
- ・個々の粒子の拡散係数の統計誤差は10~20%程度であるが, 実際の誤差はもっと大きいと思われる。今回は粒子の選び方が十分ランダムではなく, 比較的拡散の多い粒子を選んだという系統的誤差が生じていたように思われる。

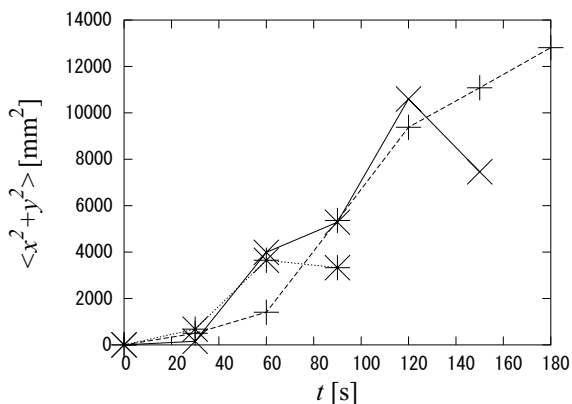


図3 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性。粒子1, 2, 3の場合を実線, 破線, 点線で表示。

- ・測定対象の粒子の数を10程度にまで増やし, 測定回数も10回ずつ程度に増やせば, 最終的な誤差は10~20%に押さえられると思われる。その際, 粒子を十分ランダムに選択するよう留意する必要がある。

4.2 実験2

4.2.1 実験パラメーター

ラテックスビーズの直径	$2a$	$0.804 \mu\text{m}$
室温	T	$(25 \pm 3)^\circ\text{C}$
モニター画面サイズ		$(404 \pm 3) \times (296 \pm 3) \text{mm}$
モニター画面に対応する実領域		$(148 \pm 5) \times (112 \pm 5) \mu\text{m}$

モニタの画面のサイズ, そして(12)式のスケールファクター γ は実験2~10について同じである。

4.2.2 測定結果

6粒子について位置をmm単位で測定。

$t[s]$	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5	x_6	y_6
0	0.0	2.5	2.0	0.0	0.0	1.5	0.0	3.0	0.0	1.0	0.0	0.0
30	2.0	26.0	-9.5	30.0	17.5	3.5	25.0	3.5	25.5	-14.0	-12.0	-6.5
60	-17.0	43.5	4.0	14.5	-1.5	5.0	21.5	-10.0	27.0	2.5	-2.0	7.5
90	-25.0	29.5	6.5	20.0	-4.0	-9.5	20.0	-15.0	30.5	4.0	0.0	40.0
120	-51.0	47.0	-15.5	5.0	-24.0	-15.0			14.0	4.5	35.5	55.0
150	-70.0	50.5	-20.0	10.0	-28.0	-16.0						
180	-109.5	45.0	-24.0	-9.5	-25.5	-39.5						
210					-30.5	-50.0						

4.2.3 解析結果とコメント

まず、モニター上でのスケールを実長に変換するスケールファクター γ を求める。 x, y 方向両方について求める。

$$\gamma = (3.66 \pm 0.1) \times 10^{-7} \text{ m (x 方向)}, \quad \bullet (3.78 \pm 0.1) \times 10^{-7} \text{ m (y 方向)} \quad (12)$$

両者の値は誤差内で一致しており、平均 $\gamma = (3.71 \pm 0.1) \times 10^{-7} \text{ m}$ を用いる。粒子 1 ~ 3, 1 ~ 6 の平均 2 乗距離 $\langle r^2 \rangle = \langle (x-x(0))^2 + (y-y(0))^2 \rangle$ を求める。以下で $(x(0), y(0))$ は $t=0$ 時の位置を意味する。

t	$\langle r^2 \rangle_{1-3}$	$\langle r^2 \rangle_{1-6}$
0	0	0
30	25.32	23.9
60	29.32	24.14
90	25.48	34.5
120	76.81	82.03
150	118.38	
180	225.25	
210	143.3	

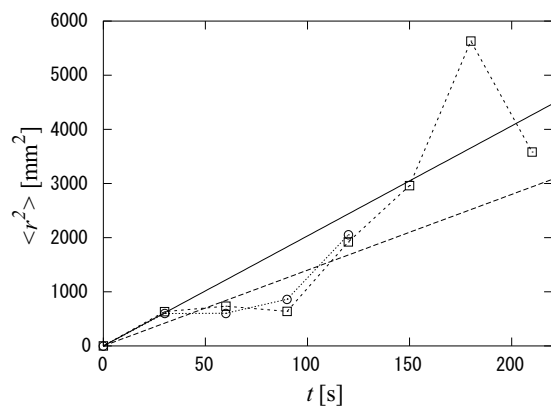


図4 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性。粒子 1 ~ 3 (\square), 1 ~ 6 (\circ) の場合の直線近似を破線, 点線で表示。

$$4D = \begin{cases} (24 \pm 3) \gamma^2 = (2.9 \pm 0.4) \times 10^{-12} \text{mm}^2/\text{s} & (\text{粒子 } 1 \sim 3 \text{ 平均}) \\ (17 \pm 2) \gamma^2 = (1.9 \pm 0.2) \times 10^{-12} \text{mm}^2/\text{s} & (\text{粒子 } 1 \sim 6 \text{ 平均}) \end{cases} \quad (13)$$

$$N_A = (5.0 \pm 1.0) \times 10^{23} \quad (14)$$

大体20%程度誤差でAvogadro数が求まり、この実験法としては理想的結果であろう。

4.3 実験3

4.3.1 実験パラメーター

ポリスチレン粒子の直径	$2a$	$0.804 \mu\text{m}$
室温	T	21.0°C

4.3.2 測定結果

3粒子について位置 ([mm]) を測定。

時間 [s]	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	$\langle r^2 \rangle [\text{mm}^2]$
0	117	104	186	62	70	110	0
30	140	111	170	50	92	133	664
60	128	88	165	39	69	135	658
90	122	85	173	40	91	122	541
120	111	85	162	45	98	96	747
150	106	88	181	48	99	101	507
180			187	42	93	68	1347

1/100mmのグリッドを顕微鏡に載せてモニター画面上の距離のスケールを測定する。

モニター画面上の距離	225 [mm]
実際の距離	0.08 [mm]

4.3.3 解析結果とコメント

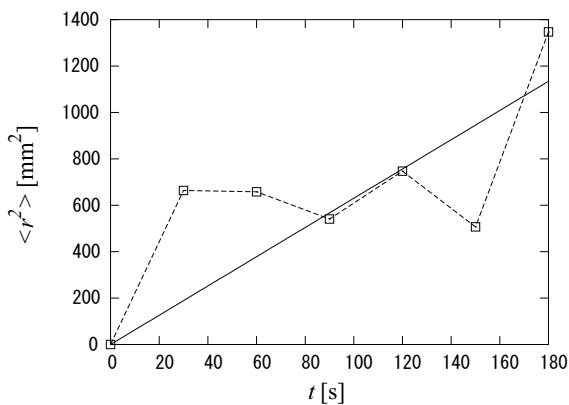


図5 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性とその直線近似

モニター上スケールを実長に変換するスケールファクターは $\gamma = 3.6 \times 10^{-4}$ 。実験 3～6 についてはこの値を用いた。

$$D = 2.0 \times 10^{-13} [\text{m}^2/\text{s}], \quad N_A = 1.6 \times 10^{24} \quad (15)$$

- ・時間間隔を知るのに、指定した時間で音が鳴るストップウォッチを使う方法とDVDレコーダー内臓の時計を見る方法があるが、後者の方がもし間違えてもやり直しが効くので使いやすいと思う。
- ・粒子全体がある方向に流れてしまうことがある。これはDVD録画前に目で見えてわかる程度から、DVDに録画した後に軌跡を測定してから気づくこともある。この場合実験をやり直さなければいけない。おそらく、いかに流れないようにするか、いかに流れているのに早く気づけるかがこの実験が成功するための最も重要なポイントであると思われる。
- ・実験結果はオーダーは悪くないがあまりいい値とはいえない結果になった。原因としてブラウン運動の測定数が少なかったことで統計誤差が大きかったことが考えられるが、粒子のブラウン運動の様子が目で見ても明らかに小さかったので他に原因があると思われる。
- ・少し粒子の濃度が濃いように感じられた（粒子同士の衝突が何度も観測された）。逆に濃度が薄すぎても測定しづらくなってしまうので、濃度の調整が必要である。

4.4 実験4

4.4.1 実験パラメーター

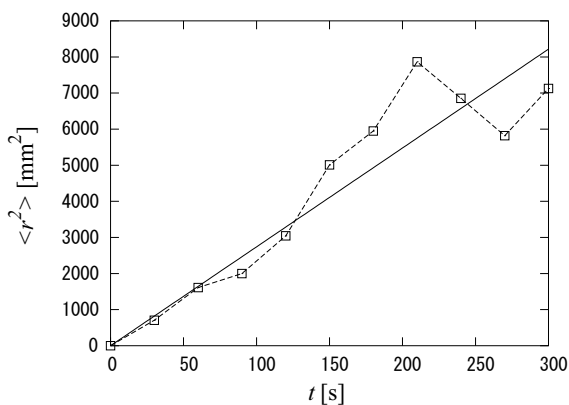
ポリスチレン粒子の直径	$2a$	$0.804 \mu\text{m}$
室温	T	21.0°C

4.4.2 測定結果

粒子の位置の測定結果をmm単位、 $\langle r^2 \rangle$ をmm²単位で記す。

$t[\text{s}]$	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5	x_6	y_6	x_7	y_7	$\langle r^2 \rangle$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	14	-32	13	30	-9	15	26	11	14	-8	-21	-14	11	-23	706
60	30	-25	30	20	-5	30	60	22	31	-24	-18	-28	1	-28	1609
90	65	2	2	39	-32	9	48	12	44	-21	-22	-30	-26	-16	2000
120	81	-19	4	22	-27	9	43	39	33	9	4	-74			3044
150	94	-44	42	34	-15	-8	79	-4	35	43	4	-82			5009
180	87	-4			24	-20	96	-8							5947
210	108	-22			35	-37	91	-24							7866
240	108	-30			14	-28	70	-46							6853
270					30	-52	73	-52							5819
300					19	-70	84	-44							7127

4.4.3 解析結果とコメント

図6 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性とその直線近似

$$D = 8.9 \times 10^{-13} [\text{m}^2/\text{s}], \quad N_A = 3.7 \times 10^{23} \quad (16)$$

- ・今回の実験では、ブラウン運動の軌跡を記録するために何も書いていない透明なシートを用いた。これは以下の点で透明な方眼用紙を用いる方法より優れていると考えられる。
 - 透明な方眼用紙を用いた場合、無意識に格子点上かもしくは逆に格子点上でないところを選んで軌跡を記録をしてしまう可能性がある。透明なシートを用いた方法はそれがない。
 - 座標を読み取る際、初期値と方眼用紙の原点を合わせれば、距離の計算がしやすい。計算時間が10分は省略できると思う。
- ・今回の実験では測定粒子数がかかなり多かったので、統計誤差が小さくなった。しかし、学生実験ではここまで測定回数を増やすのは不適切であろう。

4.5 実験5

前回、前々回で用いた粒子の約半分の大きさである半径 $a = 0.23 \mu\text{m}$ の粒子を用いて実験した。より顕著なブラウン運動が観測される。

4.5.1 実験パラメーター

ポリスチレン粒子の直径	$2a$	$0.46 \mu\text{m}$
室温	T	18.5°C

4.5.2 測定結果

8粒子について位置 ([mm]) を測定。

$t[s]$	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5	x_6	y_6	x_7	y_7	x_8	y_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	-20	-28	-4	-7	14	-1	5	-10	-13	-24	15	-23	26	-9	10	0
60	-35	-45	25	-18	32	-12			-13	-30	52	-55	21	-1		
90	-9	-50	56	-32	-2	-37			-5	-9	45	-31	12	-15		
120	-16	-66	25	-30					3	-60	51	-45	37	-54		
150	-34	-56	-3	-37					4	-68						
180	-45	-80							-3	-67						

$t[s]$	$\langle r^2 \rangle [mm^2]$
0	0
30	491
60	2101
90	1929
120	3731
150	3437
180	6462

4.5.3 解析結果とコメント

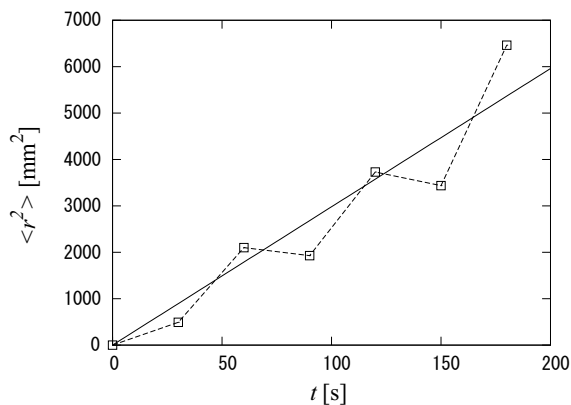


図7 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性とその直線近似

$$D = (9.7 \pm 1) \times 10^{-13} [m^2/s], \quad N_A = (5.5 \pm 0.6) \times 10^{23} \tag{17}$$

- ・小さい粒子を用いたことによりブラウン運動は大きくなった。しかし、顕微鏡の焦点が合いづらくなり、測定はしづらい。2～3分で粒子は被写界深度を外れて消えることが多く目にも負担をかける。よって学生実験としてはこの大きさの粒子を用いた測定は難しいと思われる。
- ・測定はしないで、ブラウン運動を観測するためだけに実験するのであれば、動きが激しくおもしろいのではないだろうか。
- ・実験値はとてもいい値がでた。これはブラウン運動が大きくなったために統計誤差が小さくなったからであると考えられる。

4.6 実験6

4.6.1 実験パラメーター

今回の実験では最も小さい大きさである $0.1\mu\text{m}$ の粒子を用いた。

ポリスチレン粒子の直径	$2a$	$0.1\mu\text{m}$
-------------	------	------------------

4.6.2 実験結果とコメント

2回実験を行ったが、ブラウン運動が観測できなかった。可視光の波長は数百nmであるが、光学顕微鏡では波長程度の大きさまでしか見えないのでブラウン運動が観測できなかったと考えられる。しかし、これはオーダーの話で $0.4\mu\text{m}$ の粒子ははっきりと見えるし、 2π の因子が式に含まれる可能性等を考えると理屈だけでは原因は明らかではない。事実、 $0.1\mu\text{m}$ の金属の粒子が光学顕微鏡で観測された報告はある。一方、 $0.1\mu\text{m}$ の粒子はモニター画面上では 0.27mm の大きさにしかならない。これも見にくくしている原因の1つと思われる。

4.7 実験7

今回の実験では最も大きい大きさである $3.0\mu\text{m}$ の粒子を用いた。ブラウン運動は観測できたが、粒子が流れてしまう現象がよくみられ、軌跡をうまく測定できなかった。よって、流れの速さを計算した。

4.7.1 実験パラメーター

ポリスチレン粒子の直径	$2a$	$3.0\mu\text{m}$
-------------	------	------------------

4.7.2 測定結果

30秒ごとの移動距離を、違うサンプルについて測定した(単位はmm)。

粒子1	粒子2	粒子3
27	21	39
29	18	40.5
32	23	37
28	17	24
	22.5	19
	5.5	54
		49

粒子1	粒子2	粒子3
65	62	75
57	38	53
36	13	62
	45	84
	27	

4.7.3 解析結果とコメント

- 測定結果を平均して速度を求めると、流れる速さはそれぞれ、 $0.34 [\mu\text{m/s}]$ 、 $0.62 [\mu\text{m/s}]$ であった。動く方向も速さも一定でないため流れの速さのオーダーを求めたと解釈すべきである。

- ・粒子の大きさが小さい他の実験に比べて、粒子が流れやすかった。
- ・粒子が大きい分、質量が大きいので、時間がたつと粒子が底に沈んでしまった。プレパラートを作って10分程度で全体の7割が沈み、17分程度でほぼ全部の粒子が沈んだ。

4.8 実験8

4.8.1 実験パラメーター

ポリスチレン粒子の直径	$2a$	$0.6\mu\text{m}$
室温	T	13.5°C

4.8.2 測定結果

位置の測定の単位はmmとする。

$t[\text{s}]$	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5	$\langle r^2 \rangle [\text{mm}^2]$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	22	-8	58	0	-11	0	35	34	0	-11	1307
60	68	29	84	-9	46	31	99	70	24	-13	6225
90	95	85			73	71			-8	-60	10095
120	105	65			91	68			15	-45	10135
150	116	51			115	56			-3	-38	11290
180									17	-20	689
210									-12	-52	2848
240									-24	-30	1476
270									-45	3	2034
300									-56	45	5161

4.8.3 解析結果とコメント

測定結果を図8に図示する。

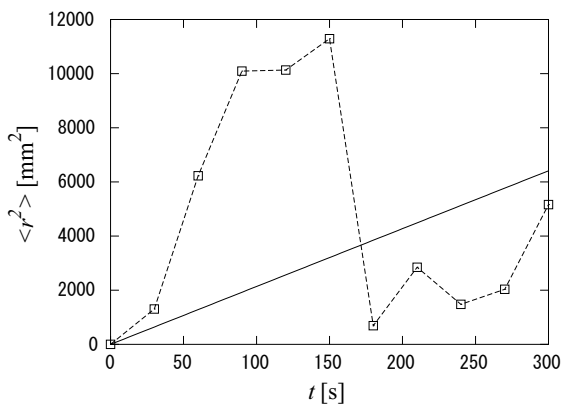


図8 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性と直線近似

$$D = (6.9 \pm 3) \times 10^{-13} [\text{m}^2/\text{s}], \quad N_A = (5.1 \pm 3) \times 10^{23} \quad (18)$$

4.9 実験9

4.9.1 実験パラメーター

ポリスチレン粒子の直径	$2a$	$1.0\mu\text{m}$
室温	T	15°C

4.9.2 測定結果

位置の測定の単位はmmとする。

$t[\text{s}]$	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	$\langle r^2 \rangle [\text{mm}^2]$
0	0	0	0	0	0	0	0
30	-4	-7	-11	-10	6	-7	124
60	-13	-9	-14	8	22	-6	343
90	-4	1	-21	26	32	-22	880
120	22	1	-14	35	20	-2	770
150	40	11	22	65	22	-3	2307
180	54	25			48	27	3287

4.9.3 解析結果とコメント

測定結果を図9に図示する。

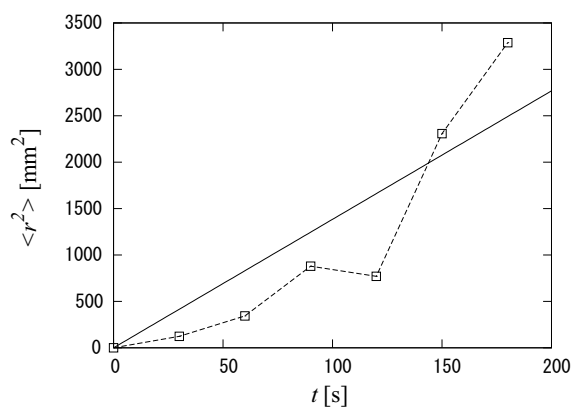


図9 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性と直線近似

$$D = (4.6 \pm 0.8) \times 10^{-13} [\text{m}^2/\text{s}], \quad N_A = (4.9 \pm 1.2) \times 10^{23} \quad (19)$$

- ・流れによって乱されないブラウン運動を測定できた。
- ・この実験では3次元のブラウン運動を2次元に射影して、測定をしている。これをさらに1次元に射影することを考えてみる。統計精度は下がるが1次元でもブラウン運動による拡散よりAvogadro数を求めることができる。実験9の結果を用いて計算すると以下のようになる。この結果よりブラウン運動は単に1次元ごとに独立に生じていることが実感できるはずである。しかし学生実験では手間のかかる割には実感するほどデータの統計精度が良くない。

- ・ 1次元に投影した測定より Avogadro 数を求める実験も考えられる。しかし、これは直感的にわかりにくくなり、統計精度も落ちるが実験の負担の減少にはほとんどつながらない。

	N_A
2次元	6.3×10^{23}
1次元 (x軸への射影)	5.1×10^{23}
1次元 (y軸への射影)	8.3×10^{23}

4.10 実験10

4.10.1 実験パラメーター

ポリスチレン粒子の直径	$2a$	$0.804 \mu\text{m}$
室温	T	14°C

4.10.2 測定結果

粒子の位置を測定する (単位はmmとする)。

時間[s]	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	$\langle r^2 \rangle [\text{mm}^2]$
0	0	0	0	0	0	0	0
30	7	-8	8	-7	28	-24	529
60	20	-3	40	9	52	-7	1614
90	45	6	52	30	67	-13	3441
120	43	1	67	48	59	-11	4082
150	69	18	51	37	52	2	3921
180	75	31	61	30	42	16	4409

4.10.3 解析結果とコメント

測定結果を図10に図示する。

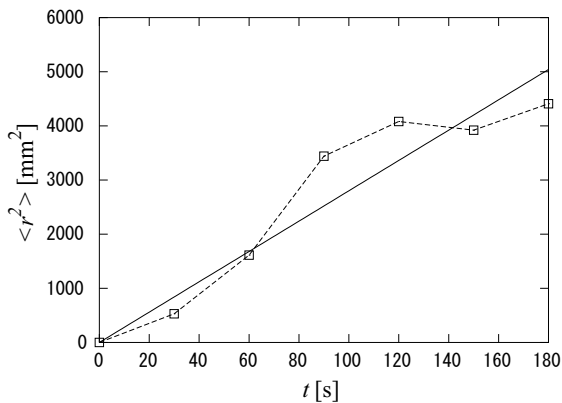


図10 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性と直線近似

$$D = (9.2 \pm 4) \times 10^{-13} [\text{m}^2/\text{s}], \quad N_A = (2.9 \pm 2) \times 10^{23} \quad (20)$$

4.11 実験11

4.11.1 実験パラメーター

実験11, 12では顕微鏡の映像をノートPCに出力して、測定を行った。方法は本質的に変わらないが、モニタの大きさが異なる。

ポリスチレン粒子の直径	$2a$	$0.6 \mu\text{m}$
室温	T	15°C

4.11.2 測定結果

目盛付きホログラムを用いてモニタ上での距離のスケールを較正する。

	モニタ画面上距離 [mm]	実長 [mm]
横方向	274	0.15
縦方向	170	0.090

粒子の位置を測定する（単位はmmとする）。スケールファクター γ は縦と横で少し差があるので $\langle r^2 \rangle$ の値は実長にした。

$$\gamma_{\text{縦}} = 5.47 \times 10^{-4}, \quad \gamma_{\text{横}} = 5.29 \times 10^{-4}$$

時間[s]	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	$\langle r^2 \rangle [\mu\text{m}^2]$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	18	14	24	-11	-2	6	-5	-5	96
60	40	10	41	-20	12	-12	12	3	313
90	54	-10	57	-17	14	-24	30	14	624
120	86	-12	54	-38	1	-24	24	9	972
150	95	-19			-12	-16	31	4	1069
180	120	2			-1	-15	47	-3	1679

4.11.3 解析結果とコメント

測定結果を図11に図示する。

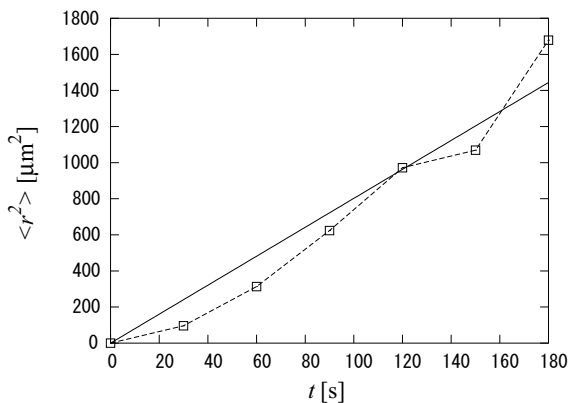


図11 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性と直線近似

$$D = (2.0 \pm 2) \times 10^{-12} [\text{m}^2/\text{s}], \quad N_A = (1.9 \pm 3) \times 10^{23} \quad (21)$$

・ 多少ビーズが流れ、拡散定数が大きくなり、アボガドロ数の実験値が小さくなったと思われる。

4.12 実験12

4.12.1 実験パラメーター

ポリスチレン粒子の直径	$2a$	$0.804 \mu\text{m}$
室温	T	15°C

4.12.2 測定結果

粒子の位置を測定した (単位 [mm])。以下ではこの結果の一部を使って時間間隔や測定時間の異なる場合について調べる。

時間[s]	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	$\langle r^2 \rangle [\mu\text{m}^2]$
0	0	0	0	0	0	0	0
10	3	2	4	-1	-3	-4	5
20	5	8	2	-3	6	0	13
30	7	17	7	-2	5	-2	41
40	16	16	7	0	11	5	69
50	13	15	13	2	5	17	86
60	9	19	6	-3	6	14	71
70	4	24	5	-1	3	16	88
80	-8	31	6	-2	4	20	147
90	-4	36	8	8	12	21	201
100	-3	30	16	7	12	18	166
110	10	34	14	12	10	22	216
120	12	33	22	11	9	28	267
130	10	26	19	5	17	33	250
140	15	26	22	15	16	37	318
150	10	32	26	14	14	52	484
160	13	26	29	18	6	42	375
170	5	30	20	18	5	45	367
180	25	24	16	14	7	46	377

4.12.3 解析結果とコメント

今回の実験については測定時間の間隔, 測定時間を変えることによりどのような影響が出るかを調べた。

1. 時間間隔…10秒, 測定時間…3分

測定結果を図12に図示する。

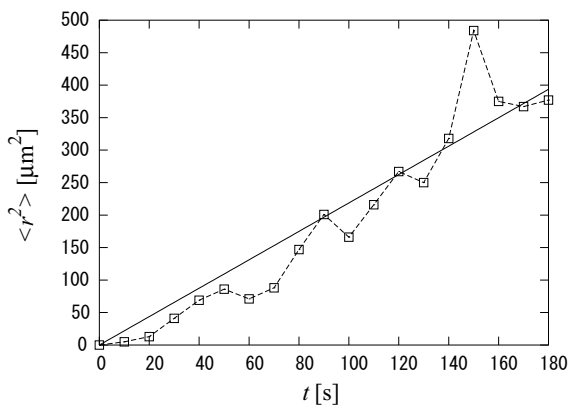


図12 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性と直線近似

$$D = 5.5 \times 10^{-13} \text{ [m}^2/\text{s]}, \quad N_A = 5.0 \times 10^{23} \quad (22)$$

2. 時間間隔…20秒, 測定時間…3分

測定結果を図13に図示する。

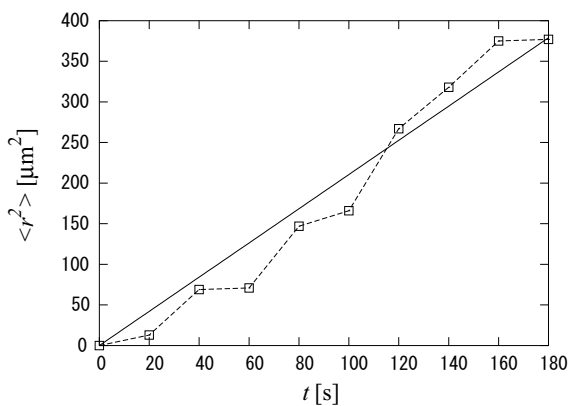


図13 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性と直線近似

$$D = 5.3 \times 10^{-13} \text{ [m}^2/\text{s]}, \quad N_A = 5.2 \times 10^{23} \quad (23)$$

3. 時間間隔…30秒, 測定時間…3分

測定結果を図14に図示する。

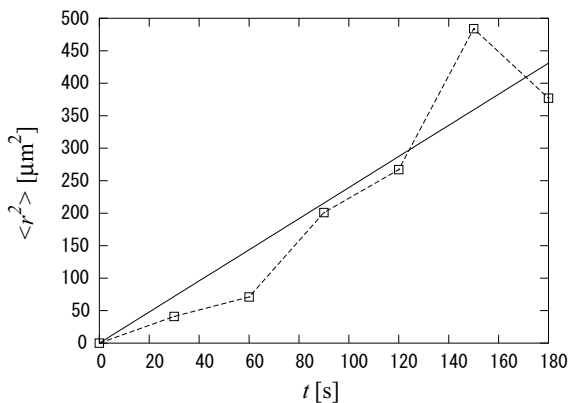


図14 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性と直線近似

$$D = 6.0 \times 10^{-13} [\text{m}^2/\text{s}], \quad N_A = 4.6 \times 10^{23} \quad (24)$$

4. 時間間隔…10秒, 測定時間…1分

結果を図15に図示する。

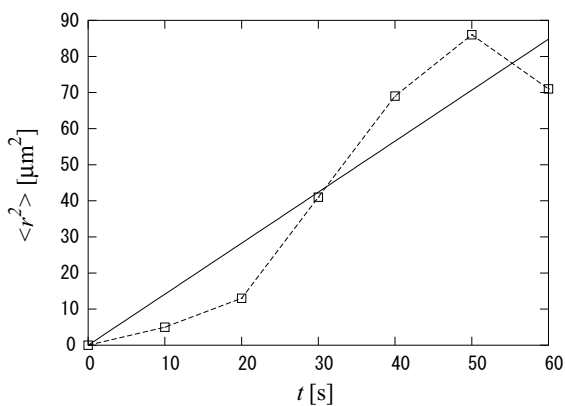


図15 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性と直線近似

$$D = 3.5 \times 10^{-13} [\text{m}^2/\text{s}], \quad N_A = 7.9 \times 10^{23} \quad (25)$$

- ・ 同じ統計量でも測定時間を短くすると誤差が大きくなるのがわかる。
- ・ 時間間隔を長くしても誤差はあまり変わらないのがわかる。結局、時間間隔が30秒で測定時間が3分が適切であると思われる。

5 数密度分布の測定

5.1 実験の目的および概要

ポリスチレン粒子は密度が水より高いため、平衡状態では上の方が数密度が低くなる分布になる。この分布はまさにブラウン運動の本質である熱運動と重力の競合によって決まる。また、

Einsteinのブラウン運動の測定に用いる機材で行える実験である。原理を手短にまとめる。ポリスチレンは水と密度が異なるため、ポリスチレン粒子を水に入れておくと最終的に平衡状態に達し、重力に対して上下方向に数密度分布ができる。その数密度分布 n は単純な下式のBoltzmann分布になるはずである。

$$\frac{n}{n_0} = \exp(-E/(kT)) = \exp(-\Delta\rho Vgh/(kT)) \equiv \exp(-h/h_0) \quad (26)$$

$\Delta\rho$ は水と粒子の密度差、 V は粒子の体積、 h は高さとする。数密度の変化のスケールは

$$h_0 = \frac{kT}{\Delta\rho 4\pi/3 a^3 g} \quad (27)$$

であり、粒子の大きさに強く $\sim a^{-3}$ のように依存する。大きいほど沈みやすいということは理論的にも確認できた。粒子が大きくなれば全て沈んでいるように見え、粒子密度変化は測定できないし、逆に小さければ粒子密度変化が緩やかすぎて実験精度では検出できない。以下に我々の実験で使っている粒子と溶液のデータを記す^[5]。

ポリスチレンの密度	1.056g/cm ³	
水の密度	0.998g/cm ³	(20°C時)
	0.996g/cm ³	(30°C時)

実験では測定できる高低差が大きくて $H\sim 0.5\text{mm}$ 程度である。粒子が小さすぎれば $h_0\gg H$ となり密度変化は誤差内で測定できない。逆に大きすぎれば $h_0\ll H$ となり全て沈んでいるように見えるのでやはり測定できない。 h_0 のオーダーが0.1mm程度であることが望ましい。 $h_0\sim a^{-3}$ であるので大きさへの依存性が強い。粒子の大きさと h_0 の値を表に記す。

粒子の直径 [μm]	0.1	0.4	0.6	0.8	1.1	3.0
h_0 [μm]	1.4×10^4	210	62	26	14	0.5

測定可能なのは0.4~0.8 μm 程度であろうと考えられる。

実際の実験では顕微鏡のステージを上下させ、いくつかの h で粒子数を数える。指数関数的な現象が見られ、理想的にはその減少の仕方が(26)と一致することを確認できるはずである。高さはステージを上下させるつまみの目盛から読み取る。

5.2 実験1

5.2.1 実験パラメーター

ポリスチレン粒子の直径	$2a$	0.60 μm
実験時の温度		$20\pm 2^\circ\text{C}$

5.2.2 測定結果と解析

高さの目盛の較正：カバーガラスの厚さをマイクロメーターで測定する。顕微鏡でカバーガ

ラスの上下面に焦点を合わせ、ステージを上下する δ_0 単位で数える。見かけの厚さは屈折率の分だけ小さいことに注意して、 δ_0 の大きさを求める。ガラスの屈折率は $n_{\text{ガラス}} = 1.50 \pm 0.05$ とした。原始的な方法であるが今回の実験には十分な精度で高さを較正できる。

$$n_{\text{ガラス}}(86 \pm 2\delta_0) = 0.155 \pm 0.005 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad \delta_0 = (2.7 \pm 0.2) \mu\text{m} \quad (28)$$

上の目盛の較正の結果を用いて実測値と理論式の Boltzmann 分布を比較する。

$-h/\delta_0$	粒子数
0	1
20	7
40	9
60	11
80	19
120	21
140	31
160	45
180	53

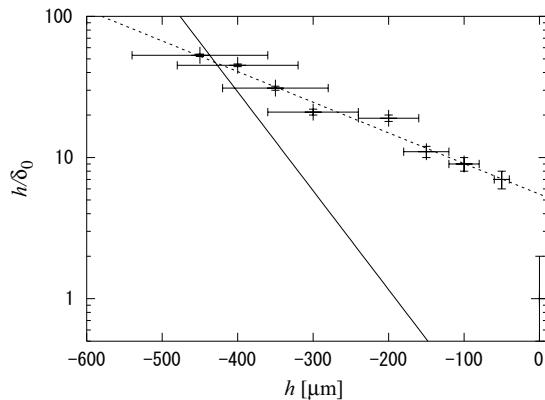


図16 粒子の密度分布。実線は(27)式の理論値を用いた場合の best fit, 破線は理論式(26)の h_0, n_0 を両方実験値より fit した結果。

1. 明らかに、理論値の h_0 は測定された値より小さい。オーダーは正しいが、実測値に合うのは $220 \pm 20 \mu\text{m}$ で値が数倍程度違う。
2. 合わないのはまだ定常状態に達していないという可能性が考えられる。
3. また、 h_0 は粒子の大きさに強く依存するので、実際の大きさが理論式で用いた $a = 0.3 \mu\text{m}$ の 0.7 倍程度であれば一致する。
4. 粒子の数を数える場合は基準を設けなければならない。実際には焦点面に存在する粒子以外にも大きなぼやけた粒子が多数見える。この実験の目的から、焦点面近辺の粒子数を数える。例えば、粒子の画面上最小の大きさ（焦点面にあるとき）の 2 倍まで等の基準を用いる。これは大体焦点面 $\pm 2\delta_0 \sim 5 \mu\text{m}$ 程度の厚さ内の粒子数になる。
5. 粒子数の測定には録画を用いると便利である。その際、上下方向の位置の情報は明示されないので 10 秒ごとに高さを変化させて録画時間と高さを連動させる等の工夫が必要であ

る。

5.3 実験2

粒子の直径が $0.80\mu\text{m}$ のものを使用した以外実験1と同じように実施した。

5.3.1 測定結果

以下に粒子密度の高さ依存性を表2にまとめ、理論式(26)をあてはめて h_0 を求めた場合の値をまとめる。結果と理論解析はグラフとして図17に図示してある。

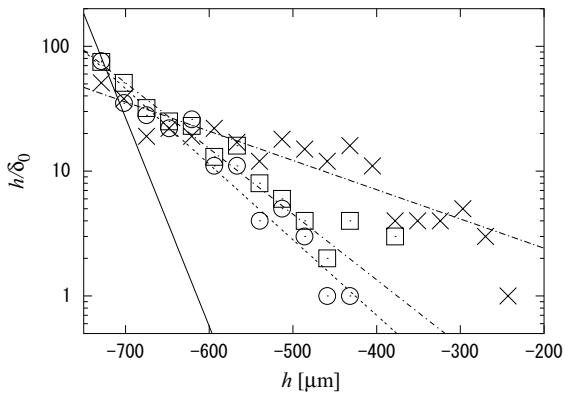


図17 直径 $2a=0.80\mu\text{m}$ の大きさの粒子の密度分布。 \times , \square , \circ はそれぞれ実験開始後75, 185, 230分後の数値。実線は h_0 , 理論を用いて fit した場合。破線は理論式を用いて h_0 を求めた場合の fit。

5.3.2 考察

1. h_0 の測定値は減少し続けており、まだ定常値に達していないと思われる。
2. 測定された h_0 は $2a=0.6\mu\text{m}$ の場合と同様、理論値 $26\mu\text{m}$ の2.3倍程度の大きさである。
3. 時間スケール1時間オーダーで数密度分布が変化することが観測された。
4. 水は蒸発し続けており、そのためカバーガラス面が下がり続けていることが確認された。

$-h/\delta_0$	粒子数75分後	粒子数185分後	粒子数230分後
90	1		
100	3		
110	5		
120	4		
130	4		
140	4	3	0
150	11	0	0
160	16	4	1
170	12	2	1
180	15	4	3
190	18	6	5
200	12	8	4
210	17	16	11
220	22	13	11
230	19	23	26
240	22	25	22
250	19	32	28
260	38	51	35
270	51	75	76
カバーガラス下面位置		131	139
h_0 , 測定 [μm]	185 ± 30	83 ± 8	72 ± 10

表2 粒子数密度の高さ依存性

6 まとめと考察

本論文ではブラウン運動を観測し、その結果を用いて分子の数を測定する実験を学生実験で行えるように調整した。特に、文系学生が実験時間内に十分終わられることに配慮した。実験の精度としては数10%程度の精度でAvogadro数を求めることを十分達成できた。

実験を行い、調整をしたのが観測するポリスチレン粒子の大きさである。一般的な理論よりある程度予想ができる点もある。まず、大きさは顕微鏡で見える必要があるので直径 $0.1\mu\text{m}$ 程度以上であることが要求される。また、ブラウン運動が容易に観測される必要があるのであまり大きくはない方が良い。実験をする以前には明らかではなかったが、調べて明らかになった点を大きさの問題を含め、以下で説明する。

- ・ポリスチレン粒子の場合は直径 $0.1\mu\text{m}$ であると観測ができない（金属片であれば同じ大きさであっても十分見られることは知られている）。直径 $0.46\mu\text{m}$ であれば十分観測可能であった。
- ・粒子は小さい方がブラウン運動の動きが大きく、拡散の様子が測定しやすくと予見される。しかし、現実には小さい粒子は運動途中で被写界深度より外れて見えなくなってしまう確率が高く実験が困難である。

・粒子が大きい場合はブラウン運動が緩やかで見やすい。しかし、大きい場合は2つ深刻な問題があることがわかった。

1. 粒子が大きい（直径 $1\mu\text{m}$ 程度以上）場合は非常に流れやすく、拡散を連続して観察しにくい。流れる現象がなぜ起きるのはか明らかではないが、突然全ての粒子が同じ方向に運動するような全体の流れが断続的に観察される。
2. 粒子が沈むために観測を早く行う必要があり、学生実験には向かない。沈む理由は重力の影響とおおむね理解でき、5節で解析したように長さのスケールは半径に a^{-3} のように依存するので粒子の大きさの影響は極めて大きい。

直径 $0.8\mu\text{m}$ 程度以下の粒子であれば実験時間内で問題になることはない。

- ・どのような大きさの粒子でも流れる状況が生じることがある。これも直径 $1\mu\text{m}$ 未満の粒子を使用すればかなり回避できる。しかし、学生実験の環境が完璧ではないためもあり、ある程度生じることが避けられない。この問題はこの実験実施上の一番の問題とも言える。これは、実際に長めにブラウン運動を録画し、その様子より流れていない時間帯を選んでデータとして使うことにより、解析の際の問題は避けることができる。
 - ・どのような大きさの粒子でも被写界深度より外れて観測できなくなることである。これは直径 $0.8\mu\text{m}$ 程度の大きさの粒子であれば、頻繁には起きないので、見えなくなってしまう粒子のデータは解析に使わないことで問題は生じない。
 - ・試料の粒子を含んだ溶液の温度がわからないのが一番大きな誤差の原因だと思われる。我々は室温を溶液の温度として採用しているが、溶液は光よりエネルギーを吸収している。さらにもっと影響が大きいと思われるのは照明により顕微鏡が温まっていることである。これらの要因により室温より溶液の温度が高いという系統的な誤差が生じていると考えられる。
- 実際、全体的に統計精度が良いと思われる結果から得られるAvogadro数は低めである。これは溶液の温度が室温より高く粘性を過大評価しているためであろう。

色々な大きさの粒子で実験した結果を総合的に考慮して、水中のポリスチレン粒子のブラウン運動の観測実験では、以下の実験パラメーターが学生実験に適していると結論した。

粒子の大きさ	$8\mu\text{m}$
測定粒子数	3
測定時間間隔	30秒
1粒子についての測定時間	3分間

これはあくまでも最低条件である。測定粒子数、測定時間を増やせばより説得力のあるデータを求められるし、実際それが望ましい。特に粒子数を増やさないと $\langle r^2 \rangle$ が時間に比例するという感覚は得にくい。学生実験を実施する場合には、最終的に全学生のデータを統計処理することなども、説得力のあるデータを求めるには良いと思われる。 $0.8\mu\text{m}$ は奇しくもEinsteinが1905

年に実験のために提案した値である^[1]。

現在、慶應日吉物理学教室では文系学生の実験として順調に実施されており、学生用実験テキストを付録Aに含める。細かい話であるが、実験のセットアップをどこまで学生が行う必要があるかという問題がある。現行の学生実験では顕微鏡、CCDカメラ等の接続は用意しておくことにした。理由は以下の通りである。

- ・接続にかける時間はむしろ測定に用いた方がより納得のできる結果が得られ、教育的効果が大きい。
- ・接続の際にCCDカメラと顕微鏡にほこりが入ったり、機材を破損する可能性がある。

現在の実験を発展させる可能性、検討課題について最後に議論する。ブラウン運動の観測実験の重要なポイントは全て測定できるマクロの量を用いてマイクロとマクロを結び付けるAvogadro数を測定することにある。その際使う物理量は気体定数 R 、温度 T 、水の粘性 η と粒子の半径 a である。実験として完結しているためにはこれらの量も本来測定すべきである。 R 、 η は他の状況で測定できる一般的な量であり、温度は測定する。 a も本来測定することを含めた方が概念的には良い。これを測定する簡易な方法としては画像より大きさを測定する方法があるが、この大きさを測定するには2つの問題がある。1つは直径 0.8μ の粒子は画面で1mm程度であり、正確に測定するのが困難であること。もう1つは、実際には観測する粒子は一般には焦点面よりずれており、そのため大きく見える。よって注意して運動している粒子の一番小さく見えるときの大きさを測定しないと直径を大きく間違える。このような理由から現在のテキストでは大きさを測定し、与えた値を確認することにとどめている。大きさを簡単により正確に測定できることが望ましい。

当然の事ながら、観測する粒子数と時間を多くすることにより実験精度をあげることができる。しかし、先に強調したように水の温度の誤差等があるため、統計精度だけを誤差10%程度よりあげても意味が無いと思われる。

7 謝辞

三井隆久氏には実験の実現へに向けて数々のアドバイスを頂き様々なポイントについて議論していただいたことに感謝します。また中村康二氏には初期の段階に実験に参加して頂き、議論していただいたことに感謝します。なおこの研究に対する慶應義塾大学2005年度部門内調整費による補助に感謝します。

A 学生用の実験テキスト ブラウン運動と原子の実在

【目的】

ブラウン運動の性質を用いて原子の数を数える。

【実験用具】

顕微鏡, CCDカメラ, ノートPC

【解説】

この実験ではブラウン運動における粒子の拡散の速さを調べ、それを用いて原子の数を数える。この原理は1905年に Albert Einstein が発表したものであり、それに基づいた実験を1906～1910に行った J. B. Perrin は1926年のノーベル賞を受賞している。

ブラウン運動は1827年に生物学者の Robert Brown が顕微鏡下で水中の花粉の粒子が不規則な運動をすることを発見したのが始まりであると通常はされている。初め Brown は花粉が生きていると考えたが、灰を含めあらゆるものが同じような運動をすることを確かめ、その由来は違うところにあることを明らかにした。

ではブラウン運動はどのように理解できるのであろうか？ 水中での粒子を考える。水は水分子により構成されており、分子は常に運動している。具体的には、絶対温度 T で平均の運動エネルギーは一方向 (x 方向としよう) あたり下式のようなになる ($\langle \dots \rangle$ は平均を表す)。

$$\left\langle \frac{1}{2} m v_x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{RT}{N_A} \quad R = 8.31 \text{ [JK}^{-1}\text{]} \quad (\text{気体定数}) \quad (\text{A-1})$$

ここで T は絶対温度, N_A はアボガドロ数 (物質 1 モルに含まれる分子数) である。水分子は全方向より常時水中の粒子に衝突している (図 A-1) 参照)。この衝突による粒子に与えられる運動量は平均的には 0 である。しかし、有限数の分子が衝突している以上、その揺らぎにより平均より少しずれ、粒子に運動量が与えられ、粒子が運動する。これがブラウン運動であり、分子の熱運動が原因であり、あらゆる状況で生じる。よってその応用は物理、化学、生物の至る分野にある。

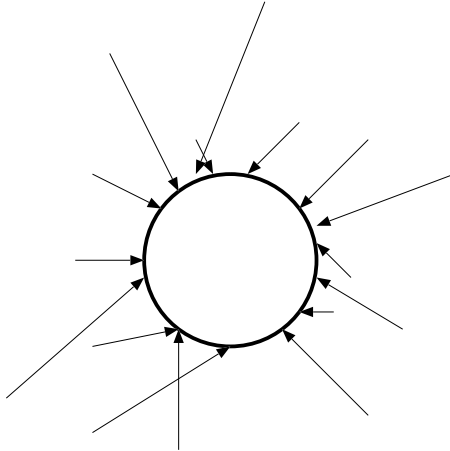
ブラウン運動は本質的に揺らぎであり、ランダムなものである。このような運動の変位に注目すれば良いと気づいたのが Einstein の視点であった。具体的には以下の「Einstein の関係式」を導いた。 x , t を観察し始めたときからの変位と時間とすると、平均的に下式が成り立つ。

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt, \quad D = \frac{RT}{6\pi r\eta N_A} \quad (\text{A-2})$$

ここで D は拡散係数と呼ばれる。 r はブラウン運動する粒子の半径, η は水の粘性係数, N_A はアボガドロ数 (1molあたりの分子数) である。Einstein の関係式で重要なのは N_A 以外の物理量 D , R , T , r , η は全て測定で得られる点である。よって、原子の性質を直接測ることせずして

魔法のように N_A を求められるのである。上の関係式は 1 次元あたりの式であり、次元が増え
ても方向による関連は無いので足されるだけである。例えば 2 次元では、以下ようになる。

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = 4Dt \quad (\text{A-3})$$



図A-1 水中の粒子のブラウン運動の模式図。丸は粒子，矢印は水分子の運動を表す。

Einstein の関係式を導く前にその意味を考えておこう。ブラウン運動は揺らぎによるものであるから、衝突している粒子が有限個であることが本質的である。もし、衝突している粒子数が増えれば粒子に与えられる揺らぎは多数の平均を取ることになり小さくなる。よって、 D が分子の数に依存し、分子の数が増えれば D が小さくなることは直感的に理解できる。また、一定の体積中の分子の数が数えられるということは大きさが測れることを意味する。ブラウン運動をしている粒子も水と同じ温度にあるわけだから、熱運動の式 (A-1) が適用できる。適用すると、半径 $0.8\mu\text{m}$ のポリスチレンの粒子の場合、平均速度は 3 mm/s 程度である。ブラウン運動はこの熱運動を見ていると考えることができる。

今でこそ原子による物質像は当たり前であるが、19世紀末から20世紀初頭にかけては原子の実在は確かめておられず、それに関しては激しい議論が交わされていた。実際に原子の数、大きさを求めるということは原子の実存の根拠として大きな意義を持った。Einstein がこの研究に力を注いだ源にも原子の実在を確かめたいという願望があった。1905年の論文にも以下のように書いている。

もし以下のような運動の性質が観測されれば……原子の大きさを正確に求めることが可能である。その一方、もしこれらの予想が間違いであれば、分子運動論的な熱の描像に対して強い反論となろう。

では Einstein の関係式 (A-2) を導いてみよう。1次元で考える。Newton の法則により

$$ma = F_{\text{total}} = -\mu v + F_{\text{random}} \quad (\text{A-4})$$

m , v , a はそれぞれブラウン運動する粒子の質量, 速度, 加速度である。 $\mu v = 6\pi r\eta v$ は水の粘性による抵抗力である。粒子が水中を進むときには粘性があるために抵抗があり, 粒子が大きいほど抵抗が大きいというのは当然であろう。 F_{random} は粒子が水分子から受けるランダムな力でブラウン運動の元である。両辺に x をかけると, 加速度 $a = d^2x/dt^2$, 速度 $v = dx/dt$ であることを使って以下のような式が得られる。

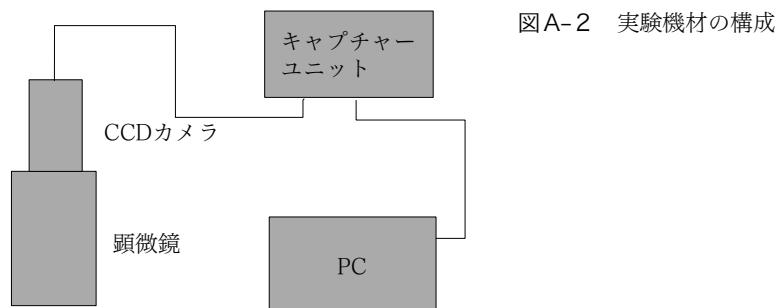
$$m \left[\frac{d}{dt} \langle xv \rangle - \langle v^2 \rangle \right] + \frac{1}{2} \mu \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = x F_{\text{random}} \quad (\text{A-5})$$

この式の平均を取ると, 過去はブラウン運動に関係なく, どこにいても同じなので, $\langle xv \rangle$ は定数でありその時間微分は0である。また, F_{random} はランダムに働いており, 位置 x とは無関係なので $\langle x F_{\text{random}} \rangle = 0$ である。よって (A-1) 式を用いて次の式が得られる。

$$\frac{RT}{N_A} = \langle mv^2 \rangle = \frac{1}{2} \mu \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle \quad (\text{A-6})$$

この式を解いて Einstein の関係式 (A-2) を得る。

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2RT}{N_A \mu} t = 2 \frac{RT}{6\pi r \eta N_A} t \quad (\text{A-7})$$



【実験方法】

- (1) 実験機材が図A-2の模式図のように構成されていることを確認する。

顕微鏡, PCの操作方法についてはそれぞれに添付されている説明を読むこと。

- (2) PCの画面の上に透明なシートを置き, PCの本体にテープで貼って固定する (テープを液晶画面の上に貼らないように注意すること)。
- (3) ガラスの対物微尺を顕微鏡のステージに載せ, 接眼レンズを通して顕微鏡で見えて焦点を合わせる。焦点が合ったら縦方向, 横方向で10秒ずつ程度録画する。
- (4) ポリスチレンの粒子の入った水をピンよりスポイトで取り, スライドガラスの上に1滴たらし, カバーガラスを上に乗せる。

- (5) 作ったスライドを顕微鏡のステージに載せ、ブラウン運動を接眼レンズを通して顕微鏡で観察する。運動を観察しやすいように、照明の明るさ、焦点面等を調整する。
- (6) 調整ができたなら、全体的に流れたりしていないことを確認して10分程度PCで録画する。
- (7) PCの画面で対物微尺の目盛を再生して見る。縦横両方向について10目盛の間隔をペンでシートの上に印を付ける（対物微尺の方眼の間隔は1/100mmである）。
- (8) PCでブラウン運動を再生し、全体的に流れたりしていない状態で、1粒子について位置を30秒ごとに3分間透明シートに記録する（粒子の位置の順序がわかるように記す）。粒子は無作為に選ぶこと（例えば、動きが良いからとか悪いから選ぶということはない）。
- (9) 全項目の記録を他に2粒子（計3粒子）について同様に行う（粒子ごとに色をわけるなどして混乱しないようにする）。
- (10) 張り付けた透明フィルムをPCより外し、初めの点よりの距離 r を3粒子について30秒ごとに測定して表に記録する。
- (11) 上の表より $\langle r^2 \rangle$ と時間 t との関係のグラフを描き、直線で近似して傾き C を求める。
- (12) フィルム上の距離と実際の距離との関係をマークした方眼の位置より求める。縦横両方向についての倍率が1割以上異なる場合は方眼の測定をもう一度行う。そうでなければ、両方向の倍率の平均を倍率として使う。
- (13) 画面上の粒子の中で焦点が合っているものから（一番小さく見える）上の倍率を用いて粒子の直径を測定する。
- (14) 上の倍率を用いて（A-3）式の拡散係数 D を求める。
- (15) D とEinsteinの関係式（A-2）よりアボガドロ数、 N_A を求める。

実験におけるパラメータ

ポリスチレン粒子の半径	$r = 0.40 [\mu\text{m}] = 4.0 \times 10^{-7} [\text{m}]$
水の粘性	$\eta = 1.0 \times 10^{-3} [\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}]$ (室温時)

【実験の解析】

粒子の距離と時間の関係

時間 [s]	粒子 1 r_1 [cm]	粒子 2 r_2 [cm]	粒子 3 r_3 [cm]	(距離) ² の平均 $\langle r^2 \rangle$ [cm ²]
0	0	0	0	0
30				
60				
90				
120				
150				
180				

グラフより直線近似で求めた傾き、 $\langle r^2 \rangle = Ct$: $C =$ [cm²/s]

方眼10目盛 (=0.01cm) のフィルム上での距離 d :

縦方向 [cm]	横方向 [cm]	平均 [cm]

$$\text{平均倍率 } \gamma = \frac{d [\text{cm}]}{0.01 [\text{cm}]} =$$

粒子の半径 : $\dots r =$

$$\text{拡散係数 : } 4D = \frac{C}{\gamma^2} = \dots \dots \dots [\text{cm}^2/\text{s}]$$

$$D = \dots \dots \dots [\text{cm}^2/\text{s}] = \dots \dots \dots [\text{m}^2/\text{s}]$$

Avogadro 数 : $\dots N_A =$

参考文献

- [1] Albert Einstein, "*Investigations on the theory of the Brownian movement*", Dover (1956)
- [2] J. B. Perrin, ノーベル賞講演, "*Nobel Lectures, Physics 1922-1941*", Elsevier Publishing Company (1965)
- [3] M. J. Nye, "*Molecular Reality*", Mac Donaldand Elsevier (1972)
- [4] R. P. Feynman, "*Feynman Lectures on Physics*", Addison Wesley Longman (1970)
- [5] 国立天文台, 「理科年表」, 丸善 (1991)