

日影の科学Ⅲ 「地球の影」

児玉光義*・表 實†

慶應義塾大学インターネット望遠鏡プロジェクト

Studies on the shadow III (the Earth's shadow)

Mitsuyoshi KODAMA and Minoru OMOTE
Keio University Internet-Telescope Project

1 序

日影の科学ⅠとⅡでは、地上にできる日影（地上の遮蔽物による日影：日影の科学Ⅰ）と月面上の日影（月面上のクレーターが作る日影：日影の科学Ⅱ）について考察した。日影の科学Ⅲでは、地球自身が作る日影について考察する。

2 本影と半影

地球の影の様子を詳しく調べるために、太陽と地球を表す円を描き、太陽の中心を O_S 、地球の中心を O_E で表す。地球の背後（太陽と反対側）に、点 O_S 、 O_E を結ぶ直線と垂直に仮想的なスクリーン S を置く。 O_S と O_E を結ぶ直線が太陽の表面と交わる点を A_0 とし、点 A_0 を通り地球の表面と接する直線を引いたとき、その直線と地球との接点を E_0 、 F_0 とする。

点 A_0 と F_0 を結ぶ直線がスクリーン S と交わる点を P_0 、点 A_0 と E_0 を結ぶ直線が S と交わる点を Q_0 とする。太陽表面の点 A_0 から放射された光のうち、直線 A_0F_0 と直線 A_0E_0 間に放出されたものは、地球にさえぎられてその背後には届かない。したがって、スクリーン S 上で点 P_0 、 Q_0 間には、点 A_0 からの光は届かない。言い換えれば、点光源 A_0 だけを考えると、スクリーン上の P_0 と Q_0 間に地球の影ができることになる。

* 五藤光学研究所

† 慶應義塾大学日吉物理学教室（〒223-8521 横浜市港北区日吉4-1-1）: Dept. of Phys., Keio Univ., 4-1-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8521 Japan. [Received May 5, 2005]

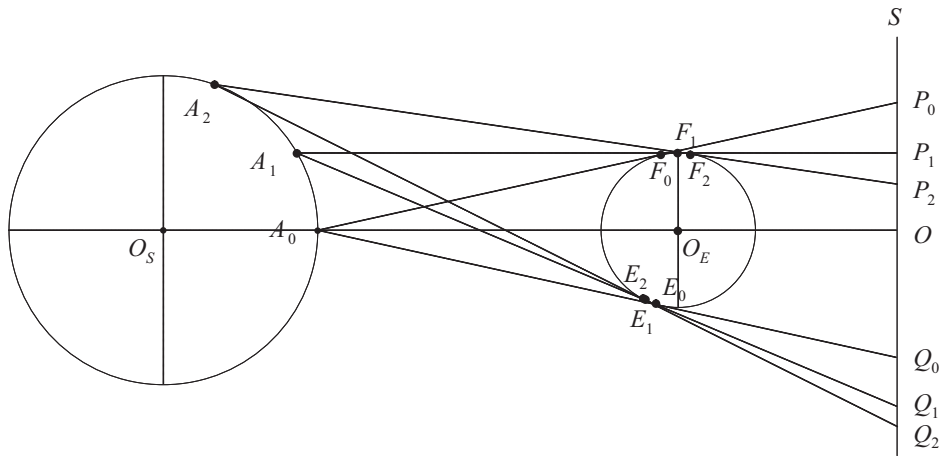


図1

太陽が小さな一つの点と考えても問題ない状況ではこれで話が済むが、実際には地球から見た太陽は大きさを持った天体である。この場合、太陽表面のいろいろな点から放出される全ての光を考慮して、地球が作る影の様子について考察することが必要となる。例として、図1の点 A_1 から放出される光を考えてみる。点 A_1 を通り地球と接する2本の直線がスクリーンと交わる点をそれぞれ P_1 、 Q_1 とすると、点 A_1 から放出された光は地球にさえぎられて点 P_1 と Q_1 の間には届かない。よって、 S 上に注目したとき、点 P_0 、 P_1 間には太陽表面の点 A_0 から放出された光は届かないが、 A_1 からの光は届く。逆に、点 Q_0 、 Q_1 間には点 A_0 からの光は届くが A_1 からの光は届かない。この意味で点 P_0 、 P_1 間および点 Q_0 、 Q_1 間は、太陽表面からの光が部分的にさえぎられているといえる。一方、 S 上で点 Q_0 、 P_1 間を考えると、この間には点 A_0 と A_1 からの光は、どちらも地球に遮られて届かないこと、それだけでなく太陽表面の点 A_0 、 A_1 間のすべての点から放出された光も届かないことがわかる。

太陽表面で光源の位置を、点 A_0 からさらに遠ざかる方向に移動しながら同様の考察を続けたとき、太陽からの光が部分的にさえぎられる領域は点 Q_1 を超えてさらに広がり、また太陽光線が完全にさえぎられる領域は点 P_1 までよりもさらに狭くなる。これらの境界を調べるために、太陽の上部と地球の下半分に接する直線と、太陽の上部と地球の上部に接する直線を引き、これらがスクリーンと交わる点をそれぞれ点 Q_2 、 P_2 とする。このとき、これまでの考察からわかるように、太陽表面の上部から放出された光が一部さえぎられる領域は、点 Q_2 まで広がりそれ以上外側では太陽光線がさえぎられることはない。また、太陽光線が完全にさえぎられる領域は、点 P_2 まで狭くなりそれ以上狭まることはない。太陽表面の下半分から放出される光線についても同様な考察ができる。

以上の結果、上部・下部を合わせた太陽表面の前面から放出される光が、地球でさえぎられる様子は図2に示したようになる。太陽と地球の共通接線 AF と CH がスクリーンと交わる点をそれぞれ J 、 L としたとき、 S 上の領域 JL には太陽光線は地球にさえぎられて全く届かない。

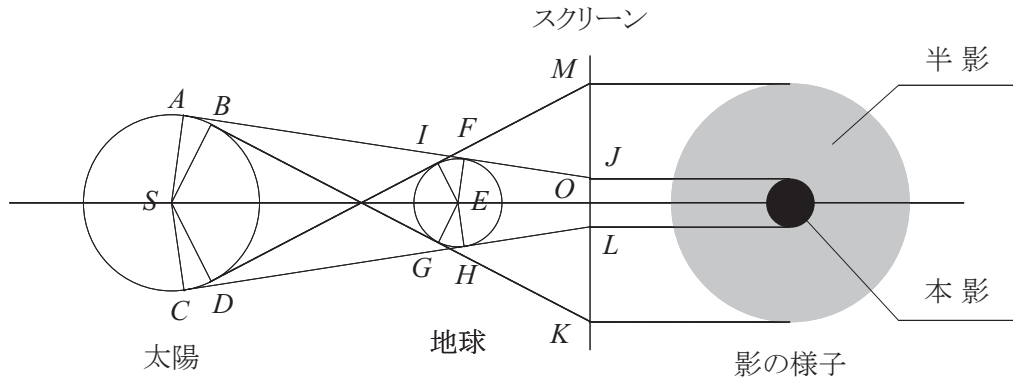


図2

また、共通接線 BG , DI がスクリーンと交わる点をそれぞれ K , M としたとき、スクリーン上の領域 MJ と KL に届く太陽光線は一部さえぎられて部分的にしか届かない。右の図はスクリーンの正面から見たときの、スクリーン上に出来る地球の影の様子を表したものである。点 O を中心に半径 \overline{OJ} の本影（太陽光線が完全にさえぎられる領域）が生じ、その外側に半径 \overline{OM} の半影（太陽光線が部分的にさえぎられる領域）が出来ていることがわかる。

3 半影の視半径と本影の視半径

次に太陽と地球および月からなる天体系を考える。スクリーンのかわりに月を置いて、月面に映る地球の影を考察しよう。月は半径 \overline{EO} の円軌道を描いて地球の周りを回っているものとする（図3参照）。線分 AK は、月の軌道上の点 K を通る太陽と地球の共通接線を表す。同様に、線分 BJ は、月の軌道上の点 J を通る太陽と地球の共通接線を現す。点 O は太陽の中心 S と地球の中心 E を結ぶ直線が月の軌道と交わる点であり、点 V は直線 SE と AK が交わる点を表す。また、点 I は直線 SE と直線 BJ の交点である。既に述べたように、領域 JO では太陽光線が部分的にさえぎられ（半影の範囲）、領域 KO では太陽光線が完全にさえぎられる（本影の範囲）。月はその軌道上を移動するにつれて、まず半影の範囲に入り、次に本影の範囲を通過する。月がこれらの領域を移動するとき、月面に当たる太陽光線が地球によってさえぎられる現象を月食という。

図3で、半影の範囲を表す角度 $\angle JEO$ を半影の視半径、本影の範囲を表す角度 $\angle KEO$ を本影の視半径と呼ぶ。このとき $\angle JEO$ と $\angle KEO$ を、月の視差 π_{\ominus} （月から見たときの地球の視半径）と太陽の視差 π_{\odot} （太陽から見た地球の視半径）および太陽の視半径 σ_{\odot} を用いて表すことを考える。

まず半影の視半径を調べるために、三角形 $\triangle JIE$ に注目する。求める $\angle JEO$ は三角形の頂点 E の外角だから、

$$\angle JEO = \angle JIE + \angle EJI \tag{1}$$

である。また、 $\angle JIE$ は三角形 $\triangle EIB$ の頂点 I の外角だから、

本影の視半径は

$$\angle KEO = \pi_{\ominus} + \pi_{\odot} - \sigma_{\odot} \quad (9)$$

で与えられる。

これで半影と本影の視半径が求められたが、実際の観測結果によれば、半影と本影の大きさは上式で与えられるものより大きいことが知られている。これは地球の傍を通る光が大気の影響で屈折するために生じたものと考えられている。この効果を取り入れて、観測される半影の視半径 I_1 と本影の視半径 I_2 は、幾何学的なものより2%だけ大きな値である次式

$$I_1 = 1.02 (\pi_{\ominus} + \pi_{\odot} + \sigma_{\odot}), \quad (10)$$

$$I_2 = 1.02 (\pi_{\ominus} + \pi_{\odot} - \sigma_{\odot}) \quad (11)$$

を用いることになっている。

4 月食

月の軌道が本影の中心を通る場合、半影の視半径が I_1 の角度であることから、月の中心がその軌道上で点 O から角度にして $L_1 = I_1 + \sigma_{\ominus}$ の位置にきたとき（半影の視半径 I_1 に月の視半径 σ_{\ominus} を加えた角度）、月は半影の範囲に入り始めることになる。さらに、月の中心が点 O から角度 $L_2 = I_1 - \sigma_{\ominus}$ の位置まで移動したとき、月ば全体がすっぽりと半影に入り込み月面の全面が少し暗くなる。同様にして、月の中心がその軌道上で点 O を通り過ぎ角度 L_2 の位置まで離れたとき、月は半影から抜け出し始め、角度 L_1 の位置まで移動したとき、月は完全に半影から出るようになる。月が半影に入り始めるときを半影食の始まり、半影から完全に出るときを半影食の終わりと呼ぶ。月が完全に半影に入り込むときを半影食との第二接触、半影から抜け出し始めるときを半影食との第三接触と呼ぶ。

同様にして、月が本影に入り始めるときを本影食の始まり、本影から完全に抜け出すときを本影食の終わりと呼ぶ。また、月全体が本影に入り込むときを皆既食の始まり、本影から出始めるときを皆既食の終わりと呼ぶ。したがって、月の中心と点 O 間の角度が、 $L_3 = I_2 + \sigma_{\ominus}$ まで近づいたとき本影食が始まり、角度 $L_4 = I_2 - \sigma_{\ominus}$ まで近づいたとき皆既食が始まる。また、皆既食の終わりは点 O から角度 L_3 離れたときに終了する。

以上、半影食と本影食をまとめると、月の中心と点 O 間の角度が、それぞれ次の角度まで

半影食の始と終：	$L_1 = I_1 + \sigma_{\ominus}$
半影食との第二・第三接触：	$L_2 = I_1 - \sigma_{\ominus}$
本影食の始と終：	$L_3 = I_2 + \sigma_{\ominus}$
皆既食に始と終：	$L_4 = I_2 - \sigma_{\ominus}$

近づいたときに始まり（離れたときに終わる）。

したがって、太陽と月の視差 π_{\odot} , π_{\ominus} と視半径 σ_{\odot} , σ_{\ominus} がわかれば、月の中心が点 O を通るときの日時から、月食の始まりと終わりの時を予測することが可能となる。

以上の考察は、月の軌道が図2の本影の中心を通る場合に成り立つ。多くの場合、月の軌道は本影の中心から外れたところにある。このような場合には、月が太陽の反対側にあるときでも、月食が起きないかまたは部分的に月面が地球の影に入る部分月食となる。

5 月食予報

2005年10月17日に部分月食が予測されている。この月食に関する予報を図式的に求めてみよう。月が地球を挟んで太陽と丁度反対側の位置にあるとき、月は衝の位置にあるという。この月食の際、赤経が衝になる日時は、力学時 (TD) で2005年10月17日12時58分23.30秒 ($\Delta T = +65s$) である¹⁾。このときの太陽と月のデータは表1の通りである。

このデータと(10), (11)から、半影の視半径 I_1 と本影の視半径 I_2 および月の視半径 σ_{\ominus} は

$$I_1 = 1.02 \times (3547.38 + 8.83 + 963.08)'' = 4609.675800'' = 76.830' \quad (12)$$

$$I_2 = 1.02 \times (3547.38 + 8.83 - 963.08)'' = 2644.992600'' = 44.080' \quad (13)$$

$$\sigma_{\ominus} = 966.6400'' = 16.110' \quad (14)$$

となる。

したがって、

$$L_1 = (76.83 + 16.11)' = 92.940' \quad (15)$$

$$L_2 = (76.83 - 16.11)' = 60.720' \quad (16)$$

$$L_3 = (44.08 + 16.11)' = 60.190' \quad (17)$$

$$L_4 = (44.08 - 16.11)' = 27.970' \quad (18)$$

である。

既に述べたように、月の軌道が O を通るときは、衝の位置に角度 L_i , ($i=1, 2, 3, 4$) だけ近づいたとき (離れたとき) 月食が始まる (終わる)。よって、月がその角度移動するに要す

表1 太陽と月のデータ

	太陽・	毎時変化・	月	毎時変化・
赤経	13h 29m 50.09s	0m 9.35s	1h 29m 50.09s	2m 8.88s
赤緯・	-9° 24' 18.3''	-0' 54.7''	10° 29' 24.2''	15' 58.2''
視差・	8.83 ⁰⁰		59' 7.38''	
視半径・	16' 3.08''		16' 6.64''	

¹⁾ 時刻の系については別に記述の予定。ここで用いた力学時TDは天体の軌道を計算するときに使われる時系で、協定世界時UTCとは $TD = UTC + \Delta T$ の関係にある。 ΔT は別に定める値をとる。本文中では $\Delta T = +65s$ となっている。また日本標準時JSTは、UTCに9時間を加えたもので与えられる。

る時間を求めれば、月食の開始・終了時間が求められるが、2005年10月の月食は、部分月食であるのでこの方法は使えない。かわりの方法として、ここでは図を用いてこれらの時間を計算してみることにする²⁾。

6 月食予報の図式計算法

点 O を中心とする円で、半影と本影の範囲を表す。月食の開始および終了時刻を分の単位で求めるためには、図はあまり大きくなくてもよい。そこで、視半径 I_2 の本影を半径 3 cm の円で表す。すべての角度をこの単位に変換すると（角度で $44.080'$ を 3 cm とおいたのだから）、本影(I_2)と半影(I_1)および月(σ_{\ominus})は、それぞれ半径

$$I_2 = 44.08' \rightarrow 3\text{ cm} \quad (19)$$

$$I_1 = 76.83' \rightarrow 3 \times (76.83/44.08)\text{ cm} = 5.23\text{ cm} \quad (20)$$

$$\sigma_{\ominus} = 16.11' \rightarrow 3 \times (16.11/44.08)\text{ cm} = 1.10\text{ cm} \quad (21)$$

の円となる。

また、天体の位置を表す赤緯と赤経を、この単位に変換すると

1) 赤緯に関して

$$1^\circ \rightarrow 3 \times (60/4.08)\text{ cm} = 4.084\text{ cm} \quad (22)$$

$$1' \rightarrow (4.084/60)\text{ cm} = 0.0681\text{ cm} \quad (23)$$

2) 赤経に関して

$$1^\circ \rightarrow 3 \times (60/44.08) \cos 9^\circ 57' \text{ cm} = 4.022\text{ cm} \quad (24)$$

$$1' \rightarrow (4.022/60)\text{ cm} = 0.067\text{ cm} \quad (25)$$

となる³⁾。

同じ図に、2005年10月10日の太陽の影の位置と月の位置を表すために、この日の各時刻の太陽と月の赤経と赤緯を調べると表2のようになる（天体位置表より）。表2の第3列は影の中心の座標を表す⁴⁾。第4列は、月の中心座標と影の中心の差を表し、第5列はその値を角度の分単位で表したものであり、最後の列はそれを図示するために長さの単位に変換したものである⁵⁾。

²⁾ 参考文献：「数理天文学」渡邊敏夫著；恒星社

³⁾ 赤経の差を長さの単位に変換するとき $\cos 9^\circ 57'$ 倍してあるのは、同じ経度差でも緯度の違いによって地軸から地球表面までの距離（地球の半径 $\times \cos$ 緯度）も変化するから、その経度差に対応する長さが異なるからである。また、角度 $9^\circ 57'$ は衝の時の月の赤緯と地球の影の赤緯の平均から求めたものである。

⁴⁾ 影は地球を挟んで太陽と反対側に出来るので、その赤経は太陽の赤経度から12時を引いた値、赤緯は太陽の赤緯の符号を変えた値となる。

⁵⁾ 赤経は $1' = 0.067\text{ cm}$ 、赤緯は $1' = 0.0681\text{ cm}$ であることに注意。

表 2

TD	太陽の視赤径	月の視赤径	地影の視赤径	月-地影	角度の分	cm
09h	13h29m13.01s	1h21m18.88s	1h29m13.01s	-7m54.13s	-118.53'	-7.94
10	13h29m22.37s	1h23m27.38s	1h29m22.37s	-5m54.99s	-88.75'	-5.95
11	13h29m31.72s	1h25m35.99s	1h29m31.72s	-3m55.73s	-58.93'	-3.95
12	13h29m40.96s	1h27m44.70s	1h29m40.96s	-1m56.26s	-29.07'	-1.95
13	12h29m50.42s	1h29m53.53s	1h29m50.42s	+0m03.11s	+0.78'	+0.05
14	13h29m59.77s	1h32m02.47s	1h29m59.77s	+2m02.70s	+30.68'	+2.06
15	13h30m09.12s	1h34m11.54s	1h30m09.12s	+4m02.42s	+60.61'	+4.06

TD	太陽の視赤緯	月の視赤緯	地影の視赤緯	月-地影	角度の分	cm
09h	-9° 20' 39.9"	9° 25' 26.4"	9° 20' 39.9"	+4' 46.5"	+4.78'	+0.33
10h	-9° 21' 34.6"	9° 41' 38.0"	9° 21' 34.6"	+20' 03.4"	+20.06'	+1.37
11h	-9° 22' 39.3"	9° 57' 45.9"	9° 22' 39.3"	+35' 06.6"	+35.11'	+2.39
12h	-9° 23' 24.0"	10° 13' 49.9"	9° 23' 24.0"	+50' 25.9"	+50.43'	+3.43
13h	-9° 24' 18.7"	10° 29' 50.0"	9° 24' 18.7"	+1° 05' 31.3"	+65.52'	+4.46
14h	-9° 25' 13.4"	10° 45' 46.0"	9° 25' 13.4"	+1° 20' 32.6"	+80.54'	+5.48
15h	-9° 26' 08.2"	11° 01' 37.9"	9° 26' 08.2"	+1° 35' 29.7"	+95.50'	+6.50

以上のデータから月食の予測図を作図する。まず、平面上に直交座標系をとり、横軸の左方向を赤経の正方向、縦軸の上方向を赤緯の正方向とする。座標系の原点を中心とした半径3 cmの円が本影を、また原点を中心とする半径5.23cmの円が半影を表す。太陽の赤経と赤緯は時間の経過によって変化するので、影の中心もその変化につれて移動する。しかし、月の中心の位置と影の中心の位置の差を問題にする場合には、本影（半影）の中心を原点にした座標系上で月の中心の移動を表すせばよい。力学時TDで、10月17日の9時から15時までの各時刻における月の中心と影の中心の座標の差は、表2の最後の列に与えられている。これらの座標値が表す点を図示することにより、影の中心を基準にとったときの月の中心の移動の様子が表示される。

図4から明らかのように、各時刻に対応した月の中心の位置を表す点は、一つの直線上に並ぶ。この直線上の任意の点を中心とする半径1.10cmの円を描くと、これらの円はその時刻の月面を表す。これらの円が、最初に半影を表す円と接するときの円の中心を M_1 、本影を表す円と接するときの円の中心を M_2 とし、次に本影を表す円と接するときの円の中心の位置を M_4 、最後に半影を表す円と接するときの円の中心を M_5 とする。このときそれぞれ、 M_1 は半影食の始まりの時刻、 M_2 は本影食が始まる時刻、 M_4 は本影食が終わる時刻、 M_5 は半影食が終わる時刻、における月の中心の位置を表す。また、原点からこの直線に垂線を下ろし、その足を M_3 とすれば、 M_3 は食が最大（食甚）のときの月の中心の位置を表す。

7 カリキュラム案

図4から月食の始めと終わりの時刻を求め、求められたデータを10月17日の月食の観測データと比べてみよう。半影食と本影食の始めと終わりの時刻と食甚の時刻は、それらに対応する M_1 の座標をそれを挟む2時刻から比例配分で求められる。

7.1 M_1 から M_5 までの各点の座標を求める

図4から、求めた M_2 から M_5 の座標を求めて、以下の表を完成させよ。

	赤経 (cm) ・	赤緯 (cm) ・ ・
M_1	-6.22	+1.21
M_2		
M_3		
M_4		
M_1		

7.2 1時間毎の月の中心の移動距離

9時から15時までの、月の中心の1時間毎の移動の大きさは

時刻 ・	移動距離 (cm)
9時から10時	$\{(-7.94+5.95)^2 + (0.33-1.37)^2\}^{1/2} = 2.245$
10時から11時	
11時から12時	
12時から13時	
13時から14時	
14時から15時	

となる。表を完成させよ。

7.3 半影食の始め

点 M_1 と時刻9時の距離は

$$\{(-7.94 + -6.22)^2 + (0.33 - 1.21)^2\}^{1/2} = 1.932$$

であるから、点 M_1 の時刻は9時と10時間を、図4上での時刻9時と10時の距離(2.245cm)と点 M_1 と時刻9時の距離(1.932cm)の比で配分し、それを時刻9時に加えることにより

$$9時 + 60分 \times \frac{1.932}{2.245} = 9時51.6分$$

となる。

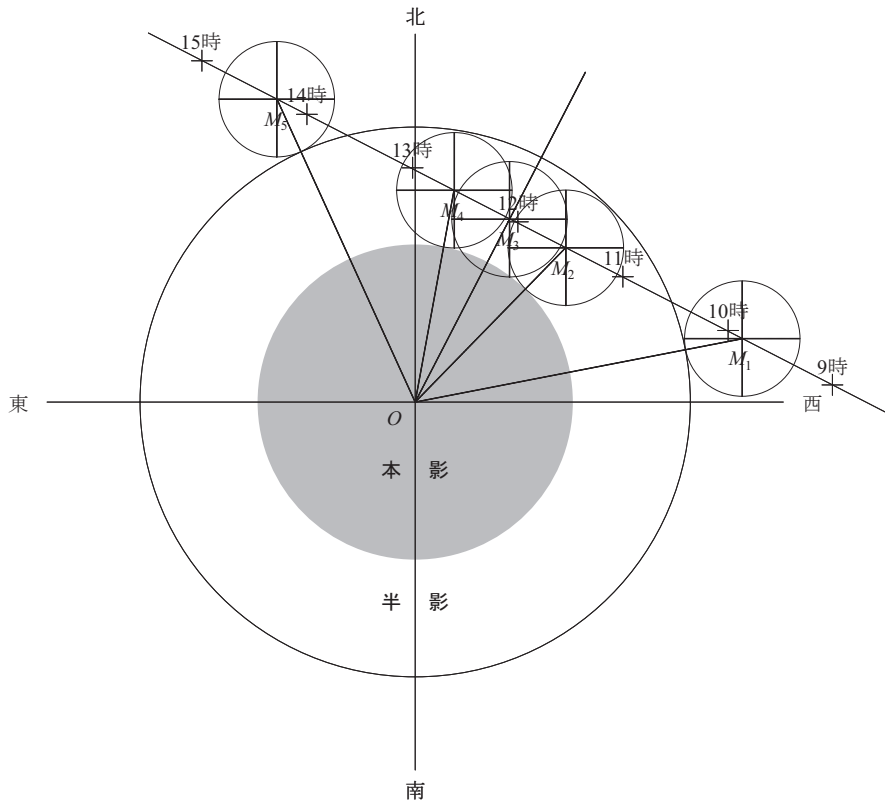


図4

7.4 本影食のはじめ

本影食の始まる時刻を求めよ。

7.5 食が最大（食甚）になる時刻

食が最大になる時刻を求めよ。

7.6 本影食の終り

本影食が終わる時刻を求めよ。

7.7 半影食の終り

半影食が終わる時刻を求めよ。

7.8 部分月食の観測

インターネット望遠鏡を用いて、10月17日の部分月食を観測し、上で求めたそれぞれの時刻と比較しよう。