慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	「Fisher-Friedman=續-辻村(FF-TT)の定義」と交叉価格弾性
Sub Title	
Author	辻村, 江太郎
Publisher	慶應義塾大学産業研究所
Publication year	1987
Jtitle	Keio Economic Observatory review No.No.7 (1987. 7) ,p.1- 38
JaLC DOI	
Abstract	われわれの研究は、本報告の第II部で詳しく述べられるように、現実の市場に各種のインパクトが与えられたときに生じうる結果を予知するための実証分析を行うに当って、有効な事前情報を与えるような「競合・補完の定義」を得たい、という現実的な課題から出発した。既存の各種の定義を再検討した結果、われわれはミルトン・フリードマンの定義に着目し、その原論文を点検することによって、その源流がアービング・フィッシャーに発することをつきとめた。この「フィッシャー - フリードマン(FF)の定義」は、上述のスティグラーの要請
Notes	特集:「競合・補完」理論の再検討. 第I部
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00390376-00000007-0001

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

第Ⅰ部「Fisher-Friedman=續-辻村(FF-TT)の定義」と交叉価格弾性

辻　村　江太郎

第Ⅰ部「Fisher-Friedman=續-辻村(FF-TT)の定義」と交叉価格弾性

辻　村　江太郎

1. 実証理論の視点から見た「競合・補完」の定義

「競合・補完」に関する「エジワース－パレートの定義」が限界効用逓減を前提にしており、したがって効用（示標）関数の単調増加変換に耐えない、ということで、その理論的妥当性が否定されて以後、それに代るものとして最も普及している定義が、スルツキー式にもとずく「ヒックス－アレン－シュルツ（ＳＨＡＳ）の定義」であることは、よく知られている。

ＳＨＡＳの定義は、J 財の価格 p_j が変化したとき、それが I 財の需要量 q_i におよぼす効果を考えるのに、買手の効用水準が $u=\bar{u}$ と一定のままに保たれるような貨幣所得の変化を伴うものと仮定する。すなわち、価格線（収支均等線）の勾配の変化に伴う均衡点の移動を同一の無差別曲線（面）上で考える、という着想に立脚している。すなわち補償された価格効果 compensated price effect の在り方によって、二財間の「競合・補完」関係を分類するものである。

スルツキー式は、貨幣所得を m として、J 財の価格変化の I 財需要におよぼす効果を

$$\partial q_i/\partial p_j = (\partial q_i/\partial p_j)_{\bar{u}} - q_j(\partial q_i/\partial m)$$

価格効果　補償された代替効果　　所得効果

に分解するが、ＳＨＡＳの定義は、

$$S_{ij} = S_{ji} \equiv (\partial q_i/\partial p_j)_{\bar{u}} = (\partial q_i/\partial p_j)+q_j(\partial q_i/\partial m)$$

のように「補償された代替効果」compensated substitution effect　S_{ij} に注目し、

$S_{ij}>0$ のとき競合関係

$S_{ij}<0$ のとき補完関係

$S_{ij}=0$ のとき独立

という分類を提案している。

この定義の長所としては：イ)主観的な効用感覚に依存することなく、客観的な価格・数量資料に立脚すること、ロ) p_j から q_i への効果 S_{ij} と p_i から q_j への効果 S_{ji} とが等しいという対称性が維持されること、ハ) $S_{ij}\equiv\infty$ のときはフィツシャーの完全競合の定義に一致する点で直感に訴えるものがあること、などが挙げられている。その反面で欠点として：イ) 2財モデルでは、つねに $S_{12}>0$ と競合関係となり、補完の場合を含み得ないこと、ロ) 3財以上のケースでも、同一無差別曲面上に留ま

るという条件から、どうしても競合の場合が支配的となり、補完となる可能性が限られていること、ハ）総じて直感に訴えるところが稀薄であること、などが指摘されている。

「ＳＨＡＳの定義」の他にも多数の提案がなされていることは周知のごとくであるが、実際の需要分析に便利（アンリ・ポアンカレの意味で）な定義を見出すことは難かしいのが限状ではないかと考えられる。この事を最もよく指摘しているのはジョージ・スティグラー（1965）の以下の文章であろう。

「ジョンソンの競合・補完の定義だとか、ヒックス－アレンの定義だとかは、一体なにを目的になされているのか理解しがたい。それらは我々の日常経験からする直感を役立てて諸財間の関係を分類する上に利用価値がない。したがって、ヒックス－アレンのような分類基準を具体的に適用できるのは、我々がその財の需要関数について余ますところなく知っている場合に限られる。もし我々がその知識を持っているのであれば、需要の交叉価格弾性が分っているという事だから、上のような定義は、それ以上に重要な何の情報も与えないことになる。私の考えでは、効用概念を用いて競合・補完の分類基準を提供する主たる理由は、未知の可能性について耳馴れた名称が与えられれば、結果の明確性について信じられるような気分になりやすいということである。」

われわれの言葉で言えば、ここでスティグラーは、「競合・補完」の定義を行う以上それは、詳細な需要分析を行うに先立って、分析のガイドラインとなるような情報を前以て与えるようなものでなければ意味がない、と主張していることになる。

われわれの研究は、本報告の第Ⅱ部で詳しく述べられるように、現実の市場に各種のインパクトが与えられたときに生じうる結果を予知するための実証分析を行うに当って、有効な事前情報を与えるような「競合・補完の定義」を得たい、という現実的な課題から出発した。

既存の各種の定義を再検討した結果、われわれはミルトン・フリードマンの定義に着目し、その原論文を点検することによって、その源流がアービング・フィッシャーに発することをつきとめた。この「フィッシャー－フリードマン（ＦＦ）の定義」は、上述のスティグラーの要請に応える内容を豊富に含んでいることが見出されたが、半製品に留っており、改善の余地もかなり残されていることが明らかになった。

以下はわれわれの試みた改訂の記録であり、フィッシャーの競合・補完理論を濃縮された糖蜜、フリードマンのそれを黒砂糖とすると、白砂糖くらいのところまでは精製できたのではないかと自負している。しかし未だ結晶化が十分であるとはいえないし、思わぬ欠陥も多いと考えられるので、諸家の指摘をまって改良したい。

注）「競合・補完の理論」の学説史的展開についてはサミュエルソンのサーベイ論文に詳しいの

で、それを参照されたい。

P. A. Samuelson, " Complementarity - An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks - Allen Revolution in Demand Theory ", *Journal of Economic Literature*, Dec. 1974, Vol. No. 4.

2. ミルトン・フリードマンの競合・補完の定義

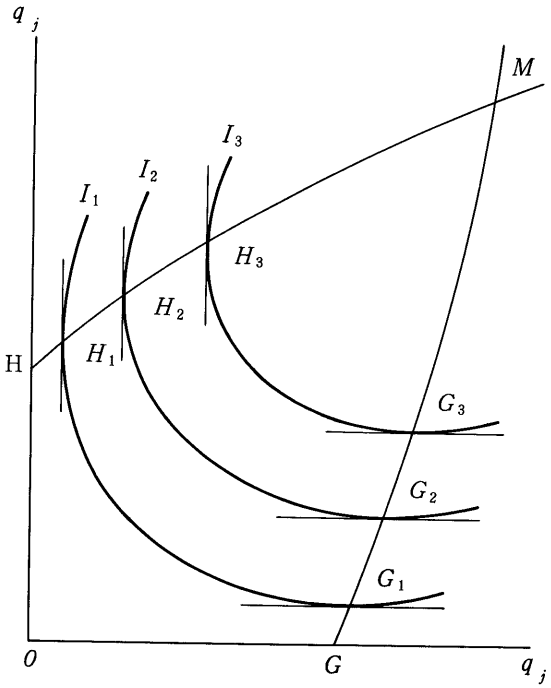
50年前、コロンビア大学の大学院生であった弱冠22才のミルトン・フリードマンは " The fitting of Indifference Curves as a Method of Deriving Statistical Demand Curves " (「統計的需要関数導出の方法としての無差別曲線の当て嵌め」) という論文を書いた。彼はこの論文で、彼独自の競合・補完の定義を行なった。彼の競合・補完の定義は、効用関数Uのいかなる単調増加変換$F(U)$, $F' > 0$ からも独立である。この論文は未公開であったため、ふつうフリードマンの定義は、計量経済学の偉大な先駆者ヘンリー・シュルツの書物 *The Theory and Measurement of Demand* (「需要の理論と測定」1938) に紹介された上記論文の要約を通して理解されている。フリードマンはI財の相対的限界効用 U_i が 0 で、無差別曲線への接近の勾配が q_j 軸に平行、則ち $dq_j / dq_i = -U_i/U_j = 0$ となるところをその財の " 飽和点 " と定義した。そしてその飽和点の軌跡を " 飽和曲線 " と呼んだ。もし、2つの財IとJの飽和曲線が一点で交わったなら、その点は " 総飽和 " の点である。Ⅰ図はフリードマンが与えたこれらの関係を図示したものである。この図の U^1、U^2、U^3 は q_i と q_j についての無差別曲線であり、GMは q_i の飽和曲線であり、それは無差別曲線への接線が水平、ないしは q_j からみて q_i の価格が $-dq_j / dq_i = 0$ となる点の軌跡である。HMは q_j の飽和曲線であり、それは無差別曲線への接線が垂直、ないしは $-dq_i / dq_j = 0$ となる点の軌跡である。Mは " 総飽和点 " と呼ばれた。そしてフリードマンは二財を、その飽和曲線の勾配の各々が正 ($U_{ii} / U_{ij} < 0$, $U_{ij} / U_{jj} < 0$) であるか負 ($U_{ii} / U_{ij} > 0$, $U_{ij} / U_{jj} > 0$) であるか、ないしは各々の軸に垂直 ($U_{ii} / U_{ij} = \infty$, $U_{ij} / U_{jj} = 0$) になるかによって補完財、競合財、独立財を定義しうることを示した。同時に彼は、飽和曲線の勾配がその全域に亘り同符号とならないかも知れない事をも示唆している。

当時フリードマンの師であったシュルツは、フリードマンの考えを理論的に非常に興味あるものとして賞賛したが、彼は次のようにコメントした。" フリードマンの定義は非常に明確な利点を持つ、…、しかし、それは実際に使用することが出来ない。この定義は (ジョンソン - アレンの定義と同じように) 統計的に導出された需要曲線に適用出来るような言葉に翻訳することが不可能であるという基本的限界を持つからである。" 1930年代の初期は、シュルツを含めた最も秀れた計量経済学者達

でさえ、間接的にでも消費者選好のパラメターを推定することが可能とは思っていなかったので、このコメントはもっともなことであった。この種の技術的可能性が識られるようになったのは、1940年代の後半からであった。

しかしながら、構造推定に関するコウルズ・コミッション以後の計量経済学的方法の知識で武装した今日の計量経済学者にとって、フリードマンの競合・補完の定義を実証的な需要分析に実際に応用する可能性を否定する理由はない。それは我々がシステムワイド・アプローチを適用する際には、そのシステムの構造式について何等かの特定型を前提せなばならないし、それゆえに前以てその関数型の境界条件を検討して置くことが可能だからである。フリードマンのこの原論文の題名が示唆しているように、彼はそこで、むしろ需要分析にシステムワイド・アプローチを用いることの長所を強調したのであるが、利用可能な計量経済学的方法の観点からすれば早きに失したのであった。例えば、我々がフリードマンの定義を線型支出体系に適用したならば、その体系については $U_{ii}/U_{ij}=\infty$, $U_{ij}/U_{jj}=0$ であることによって、それが独立財の型になっていることを見出すのである。

1図　フリードマンの飽和曲線



50年前に、実際に使用できなかった理論が、今日非常に有用となったとしても別に不思議なことではない。

シュルツの書物では「フリードマンの定義」を「ジョンソン－アレンの定義」と同系統のものとして分類している。それ以来、通常そのように理解されて来た。分析形式の観点から言えば、この分類は正しいが、実証的含意の観点からすればフリードマンの定義は、フィッシャーの概念の形式化として理解されるべきものである。

3. アービング・フイッシャーの定義

我々がフリードマンの原論文「…無差別曲線の当て嵌め」（1933）を読めば、彼が論文を書く前に

アービング・フイッシャーの『価値と価格の理論の数学的研究』（1892）を非常に注意深く読んでいたことは明らかである。フリードマンは競合・補完の定義を展開するに当たって、フイッシャーの完全補完と完全競合という極限の場合を出発展とした。

フイッシャーは彼の『価値と価格の理論の数学的研究』の中で、極限の場合についてのみならず、下の2図に再録したように、中間的な場合についても競合・補完の定義を与えている。

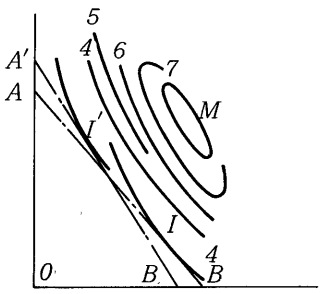
フイッシャーは図20で競合財についての無差別曲線を示し、図22で補完財の場合の無差別曲線を示した。同時に、図21と23で極限の場合を定義した。フイッシャーの図20と22はヒックス－アレン革命以後の経済学者達から特に注目されなかったが、これらの図を注意深く再検討すれば、幾つかの興味ある点に気付く。第1は、フィッシャーの画いた惰円状の円心曲線群の各々に「フリードマンの定義」を適用した時、「フリードマンの定義」と「フィッシャーの定義」とは互いに一致する。フィッシャーの図20では、フリードマンの"飽和曲線"は負の勾配となり、図22ではそれらは正の勾配を持つ。また、我々がフィッシャーの図18に「フリードマンの定義」を適用すれば、飽和曲線は水平、垂直となり、従って独立財の場合であることを見出す。第2には、フィッシーが競合財と補完財に関する概念をもとに、図21と24を図20と22それぞれの極限の場合として画いたものと推察することができる。フィッシャーは一対の靴をもって完全補完財の場合を論じた。即ち、「新しい左の靴が得られない限り、右の靴に対する欲望は消滅するが、しかし、新しい一対の靴に対する欲望は存在しうる」。

これは十分陽表的ではないにしても、フイッシャーが後にフリードマンの"飽和曲線"の基に成った"相対飽和"の概念を心に画いていたであろうことを示唆している。更に、フイッシャーは「もし二財が補完的（図22）であったなら、価格変化は、無差別曲線に対する接線の勾配の変化を通じて、二財の消費割合を非常に大きく変えることにはならない…；もし代替的（図20）なら価格の微少な相対変化でも消費割合を大きく変えよう」と述べている。ここで彼は、ヒックスの用語で言うところの"代替効果"について語っているのである。また、彼は"もし価格が一定で個人がより豊かになる"（所得増加）の場合を検討している。ここで彼は、ヒックスの用語で言うところの"所得効果"について述べているのであり、彼の描いた"A Tortuous Line"は、ヒックスの"所得－消費曲線"に対応するものである。フイッシャーの図22において、収支線ＡＢとA' B' 並びにそれらに対応する接点をみた時、彼が価格変化が所得効果と代替効果の両経路を経て消費に影響を与えることを識っていたということは殆ど確実だと言える。完全補完を示した図23では、所得効果のみが存在しうることが明らかである。極限でない場合を示した図22においてさえ、所得効果が重要であり、代替効果の作用する余地は小さいことが示されている。

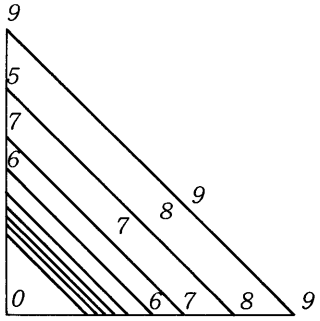
ここで我々は、図23を図22の極限の場合として理解することができるが、それは、フイッシャーの

2図　アービング－フイッシャー　概念図

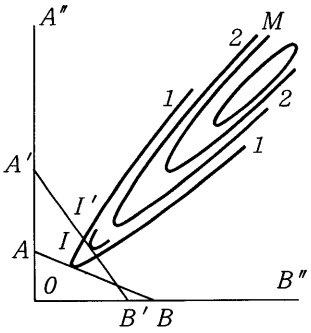
20.



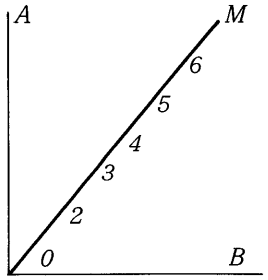
21.



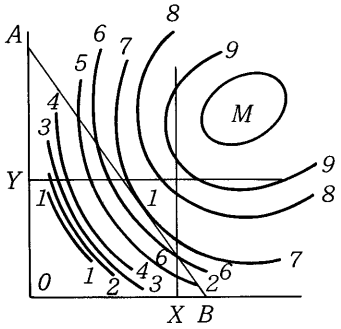
22.



23.



18.



意味において、二財の間の補完性が強まれば強まるほど、価格変価のもたらす代替効果の度合は所得効果に比較して弱まることを示している。方向は反対であるが類似の結論が、図20と21の間の関係についても言える。

しかしながら、フィッシャーはこれらの諸点を充分に陽表的には展開しなかったので、彼の競合・補完の概念は半製品にとどまった。フィッシャーの『価値と価格の理論の数学的研究』に書かれている概念の含意を洞察したのは、恐らく若きフリードマン唯一人であったろう。彼は40年後に、フイッシャーの豊潤だが粗削りの概念にみがきをかけて明確な定義に仕上げた。しかし、不幸にも彼は、彼の偉大な師によって激励されなかったので、フリードマン自身、フィッシャーの概念によってひらめいた彼自身の「競合・補完」理論を完全に展開する動機が欠けていた。ここで現著者達は、フリードマン自身がもしそうするように激励されたとしたなら、展開したであろう彼の全イメージの再構築を試みようとするものである。

4. 「フィッシャー－フリードマンの競合・補完の定義」の再述

いま述べたように、フィッシャーは需要分析に際して、代替効果とか所得効果という言葉は用いなかったが、それらの概念が念頭にあったことは確実である。

他方で、フリードマンはヒックス－アレンの「競合・補完の定義」(1934)の発表、ならびにアレン、ヒックスそしてヘンリー・シュルツによるスルツキー式の発見、再発見がなされる以前に論文を書いた。従って、フリードマンは自身の競合・補完の定義の含意を完全に表現しうる便利な術語を持ち合わせなかった。

「フィッシャー－フリードマンの定義」を現代語で再述する以下のようになる。

まず、二つの財 I と J に関して、限界代替率を定義する。

1.1) $R_{ij}=\dfrac{U_i}{U_j}$,　　1.2) $R_{ji}=\dfrac{U_j}{U_i}$

その時

2.1) $dR_{ij}=\dfrac{\partial R_{ij}}{\partial q_i}dq_i+\dfrac{\partial R_{ij}}{\partial q_j}dq_j$

2.2) $dR_{ji}=\dfrac{\partial R_{ji}}{\partial q_i}dq_i+\dfrac{\partial R_{ji}}{\partial q_j}dq_j$

となる。

フリードマンは 1.1) 式や 1.2) 式の限界代替率が0となる所を飽和点と定義した。$dR_{ij}=0$

$dR_{ji} = 0$ と置き、これらを 2.1）式と 2.2）式に代入すると

3.1） $$\frac{dq_j}{dq_i} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial q_i} \Big/ \frac{\partial R_{ij}}{\partial q_j}$$

3.2） $$\frac{dq_j}{pq_i} = -\frac{\partial R_{ji}}{\partial q_i} \Big/ \frac{\partial R_{ji}}{\partial q_j}$$

を得る。これらは q_i 軸に対する I 財と J 財の飽和曲線の勾配を表わす。

次に

4.1） $$\frac{\partial R_{ij}}{\partial q_i} = \frac{\partial (\frac{U_i}{U_j})}{\partial q_i} = \frac{U_{ii} U_j - U_{ji} U_i}{U_j{}^2}$$

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial q_j} = \frac{\partial (\frac{U_i}{U_j})}{\partial q_j} = \frac{U_{ij} U_j - U_{jj} U_i}{U_j{}^2}$$

4.2） $$\frac{\partial R_{ji}}{\partial q_i} = \frac{\partial (\frac{U_j}{U_i})}{\partial q_i} = \frac{U_{ji} U_i - U_{ii} U_j}{U_i{}^2}$$

$$\frac{\partial R_{ji}}{\partial q_j} = \frac{\partial (\frac{U_j}{U_i})}{\partial q_j} = \frac{U_{jj} U_i - U_{ji} U_j}{U_j{}^2}$$

を 3.1）と 3.2）に代入すると

5.1） $$\frac{dq_j}{dq_i} = \frac{-U_{ii} U_j + U_{ji} U_i}{U_{ij} U_j - U_{jj} U_i} = \frac{-U_{ii} + U_{ji} \frac{U_i}{U_j}}{U_{ij} - U_{jj} \frac{U_i}{U_j}}$$

5.2） $$\frac{dq_j}{dq_i} = \frac{-U_{ji} U_i + U_{ii} U_j}{U_{jj} U_i - U_{ji} U_j} = \frac{-U_{ji} + U_{ii} \frac{U_j}{U_i}}{U_{jj} - U_{ji} \frac{U_j}{U_i}}$$

となる。定義により 5.1）については飽和曲線に沿って $U_i / U_j = 0$ であり、5.2）については $U_j / U_i = 0$ となるから、これらの式から

6.1） $\dfrac{dq_j}{dq_i} = -\dfrac{U_{ii}}{U_{ij}}$,　　6.2） $\dfrac{dq_j}{dq_i} = -\dfrac{U_{ji}}{U_{jj}}$

を得る。6.1）と6.2）は q_i 軸に対する I 財と J 財の飽和曲線の勾配が、それぞれ $-(U_{ii}/U_{ij})$, $-(U_{ji}/U_{jj})$ であることを示している。

フリードマンは6)式に基づいて、I 財と J 財をその飽和曲線の q_i 軸に対する勾配の正（$U_{ii}/U_{ij}<0$, $U_{ij}/U_{jj}<0$）、負（$U_{ii}/U_{ij}>0$, $U_{ij}/U_{jj}>0$）ないしは両軸に垂直（$U_{ii}/U_{ij}=\infty$, $U_{ij}/U_{jj}=0$）によって補完、競合、独立と定義した。言うまでもなく、この定義は効用関数Uの任意の単調変換から独立である。

消費者均衡の条件 $R_{ij}=U_i/U_j=P_i/P_j$ を考慮しながら、$R_{ij}=P_i/P_j=$一定 となる場合を想定すると、その時にも $dR_{ij}=0$ が成り立つ。よって、5）式の U_i/U_j とU_j/U_i をそれぞれP_i/P_j と P_j/P_i に置き換えることができる。したがって5）式は、

7.1） $$\frac{dq_j}{dq_i} = \frac{-U_{ii}+U_{ji}\dfrac{P_i}{P_j}}{U_{ij}-U_{jj}\dfrac{P_i}{P_j}}$$

および

7.2） $$\frac{dq_j}{dq_i} = \frac{-U_{ji}+U_{ii}\dfrac{P_j}{P_i}}{U_{jjj}-U_{ji}\dfrac{P_j}{P_i}}$$

となる。7）式は価格が一定に保たれたとき、所得が増加するにつれて移動する均衡点の軌跡の勾配を示す、と解釈することができる。言い換えれば、これはヒックスの所得－消費曲線の勾配を示すものである。この意味でフリードマンの飽和曲線は $P_i/P_j=0$、$P_j/P_i=0$ という極限状態における、即ち、2財のうちの一つが自由財となる場合の、所得－消費曲線と解釈し直すことがでる。

5. 「飽和」の概念から「プロポーション」の概念へ：スミスとフィツシャー

われわれはフリードマンの「競合・補完の定義」に注目し、それがアービング・フィツシャーの概念と不可分につながっていることを見出した。

しかし、フリードマンの定義は学界で忘れられた訳ではなかったが、重要視されなかった。フリードマンの定義が、とくに現代において不人気な理由は、それが「飽和」の概念に依存している点にある。それを典型的に示す例は、アメリカ経済学の大宗 P. A. サミュエルソンの「競合・補完」理論に

に関する前掲の包括的なサーベイ論文（1974）に見ることができる。

サミュエルソンは“フリードマンの定義”について、“The concept has some intuitive appeal, but only at the uninteresting satiation border.”と論断している。

注）これはヒックス、サミュエルソン以後の学界の空気を代表しているものと見てよい。現代の教科書の消費の理論の項では、“非飽和”の仮定が置かれているのが普通だが、それはアングロ・アメリカンの経済学者にとって、単に形式上の仮定ではなく、一種の哲学的前提となっているようである。例えばH.S.ハウタッカー教授は、“フリードマンの定義”についてのわれわれの初稿に対する私信の中で、“飽和”という言葉に激しい拒否反応を示した。

“飽和”の概念は19世紀の限界効用理論において、ゴッセン、ジェボンズなどに見られるように、“限界効用逓減法則”と不可分の関係にあったようである。フィッシャーの『価値と価格の理論の数学的研究』（1892）は限界効用理論から選好理論への過渡期のものであり、前者から脱却しつつも、前者の遺物を残しており、フィッシャーの頭脳の中では旧い物と新らしい物とが混在していた。「飽和」の概念についても、この事が言える。

フィッシャーは、限界効用逓減を述べるくだりでアダム・スミスを引用し、「食物に対する需要は人間の胃の能力によって制限せられる」ことをその論拠としている。たしかにスミスは『道徳感情論』でも『国富論』でも、これに類したことを述べており、それがゴッセンやジェボンズのヒントとなった可能性は大きい。しかし、スミスは「飽和」の概念に執着した訳ではなく、彼の頭脳の中には別種の概念も存在した。スミスは『国富論』第4編第1章で次のように述べている。

「壷や鍋といった台所用品の数は、その用途によって必ず制限される。日常消費される食物を調理するのに必要とされる以上の壷や鍋を保有するのは不条理である。しかし、もし食物の量が増加するのであれば、食料品の増加量の一部は、壷や鍋を買うのに当てられたり、それらを作る職人たちを雇用するのに使われたりして、結果的に壷や鍋の数も増加することとなろう。」

ここでスミスが指摘しているのは、食物の量と台所用品の量との間に，ある程度の「プロポーション」が保たれねばならない、ということである。スミスが「胃の能力」について言うときは、財の消費量と消費者容力 consumer capacity との関係を指しており、これは「飽和」の概念につながるものであるが、台所用品の例で言っているのは、財と財との間の数量関係，つまり消費における「プロポーション」の問題をとり上げているのであって、両者は別個の概念である。

フィッシャーは、さきに再録した無差別曲線図を描くとき、総効用が最大となる点Mを示しているから、限界効用が逓減してゼロとなる点の存在するというイメージを捨て切れないで居ることは否定

できない。しかし、それにも拘らず、フィッシャーが「補完」の概念を説明するときは、明らかに「飽和」とは別種の、「プロポーション」の概念が頭に在ったことも確かである。彼は「完全補完」の例として第2部第1章4節で「靴と靴紐」の例を、第2部第2章10節で「銃と引金」の例を挙げているが、第2部第1章10節で前掲の23図を説明するところでは、

「一対の靴の右と左を別個の財と見なすと、右靴に対する欲望は、新たに左靴が与えられないときは直ちに消滅するが、それでも新しい一対に対する欲望は存在しうる。」

と述べている。ここでフィッシャーは、左右の靴の間の補完性はそれぞれの数の間の「プロポーション」の問題であって、「消費者容力」とは別個の問題であることを意識しているのである。この概念が完全補完の fixed proportion の場合にだけ留まるのではないことは、第1章12節での第22図の補完財一般についての説明から明らかである。

「補完財の場合、価格の変化による（価格線と無差別曲線との）接点の位置の移動は財の消費の比率 the proportion of consumption of the articles を著しく変えることにはならない。」

と述べ、また第20図について、

「もし代替財（競合財）であれば価格の軽微な相対的変化は使用量の比率 proportion に甚大な変化を起こさせることとなる。」

と述べている。

このようにフィッシャーが財やサービスの間の「競合・補完」関係を考える際には、「飽和」が問題なのではなく、消費量の間の「プロポーション」が問題だったのである。上の引用から明らかなように、フィッシャーは各財間のプロポーションの変化幅が狭い場合を「補完」に、プロポーションの変化幅が広い場合を「競合」に対置しているのであって、この基準からすれば、スミスの「食物と台所用品」は補完財の例をなすものと言える。

じつは、もともとアダム・スミスは「飽和」の概念がすべての財貨・サービスに適用できるとは考えて居なかったようである。ジェボンズもフィッシャーも「胃の容量」という部分だけを引用して限界効用逓減法則を説明しているが、『国富論』第1編11章2節の文章全体を見直おすと、次のようになっている。

「食物に対する欲求は、あらゆる人の胃の容量にかぎりがあるので、それによって制限されるが（limited by the narrow capacity of the human stomach）、建物、衣服、什器および家具という便益器や装飾品に対する欲求は、限度もなければ一定の限界もない（no limit or certain boundary）ように思われる。」

そして、『道徳感情論』第1篇第4部で類似の内容を述べている箇所では“insatiable desires”という語を使っているから、アダム・スミスは食物以外の財貨・サービスについては、むしろ非飽和

を考えていたようである。

フリードマンの「競合・補完」の定義でも、彼の"総飽和点"は実際には何の役割も果していないのだから、競合・補完の定義に関するかぎりは"飽和"の概念にこだわるべきではない、と考えたほうがよさそうである。

自動車とガソリン、ホットケーキとバターとメープルシロップ、刺身と醤油とワサビ、といった財の組合わせを考えれば、各財の消費量の間に、ある幅をもったプロポーショナルな関係が存在することは、客観的な日常観察から明らかであり、そのプロポーショナルな関係が「補完」の概念と直感的に結び付くことも明らかである。したがって、その視点から「競合・補完」を定義することができれば、計量経済学的な手法で需要の実証分析を行う際に、そのガイド・ラインとなるような役に立つ情報が用意されるものと期待することができる。

以下で、それを試みよう。

6. 「續一辻村の競合・補完の定義」

Friedman の定義は無差別曲線への接線が水平・垂直となる点の軌跡を飽和曲線と呼び、飽和曲線の勾配の正・負によって補完・競合を分類するものであった。彼の飽和という概念は、限界効用がゼロとなる点によって定義されている。

ここで示そうとする、われわれの定義は飽和の概念に依存することなく競合・補完を分類することができるという点に特徴がある。「續－辻村の定義」は、「飽和」(satiation ないし saturation) の概念ではなく「プロポーション」(均整) の概念に依存する。もともと Fisher の競合・補完の概念も、それを明確化した Friedman の定義も、じつは「飽和」の概念ではなく、「プロポーション」の概念に依るべきものであった事は前節に述べた。

1〕いうまでもなく、われわれの理論も無差別曲線 (等効用曲線) ないし限界代替率の概念を基礎とする。いま n 個の財・サービスのうち m 個からなる財集合 (q_1 , … , q_m) が他のすべての財・サービスの集合 (q_{m+1} , … , q_n) からセパラブルであるとして、前者を考察の対象とする。

効用関数を $U=U(q_1, \cdots, q_m)$ としたとき、その全微分は

$$1) \qquad dU=\sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k}\, dq_k \equiv \sum_k U_k\, dq_k, \qquad (k=1, \cdots, m)$$

であるが、

k 個の財のうち I 財と J 財 ($i \neq j$) の 2 財のみに注目して、他の ($k-2$) 個の財の量 $q_l \left({l \neq i \atop l \neq j} \right)$

を一定、すなわち $dq_l = 0$ と仮定すれば、1) 式は

2) $dU = U_i\, dq_i + U_j\, dq_j$

と書ける。

ここでU＝一定、すなわち $dU = 0$ とすれば、限界代替率の定義式

3) $^iR^j = \dfrac{U_i}{U_j} = -\dfrac{dq_j}{dq_i}$

が得られる。

現代の理論では、無差別（等効用）曲線ないし限界代替率がエッセンシャルなのであるから、限界効用 U_i や U_j は相対的にしか意味を成さないのであって、それらの絶対的な大きさは理論にとって不必要である。

さて、Edgeworth-Pareto の定義が放棄された理由は、効用関数Uの2次の交叉微係数 U_{ij} の正負で競合・補完を定義しても、Uの単調増加関数 $F(U)$, $F' > 0$を考えたとき、新たな効用示標 に関する交叉微係数は、

$$F_{ij} = F' U_{ij} + F'' U_i U_j$$

となって、F''の符号を特定しないかぎり、F_{ij} が U_{ij} と同符号となる保証が得られないからであった。これは2次微係数 F_{ii} についても同様で、

$$F_{ii} = F' U_{ij} + F'' U_i^2$$

となっている。

これに対して Friedman の定義は、

$$U_{ii} / U_{ij} \quad , \quad U_{ij} / U_{jj}$$

の符号で、競合・補完を分類するものであった。いま上と同様に理解すれば、U_{ij} / U_{ij} などの符号が F_{ii} / F_{ij} についても不変であるか否かが問題となる。これについてサミュエルソンは、フリードマンが飽和点 $U_i = 0$ または $U_j = 0$ における U_{ii} / U_{ij} などに着目したことによって、上の F_{ij} や F_{ii} の右辺第2項がゼロとなる場合を想定していると理解している。その場合には、

$$F_{ij} = F' U_{ij} \quad , \quad F_{ii} = F' U_{ii}$$

等と、2次微係数の符号の不変性が確保されることになる。

これについてサミュエルソンは“only at the uninteresting satiation border”と論評したのである。

しかし、フリードマンが彼の定義を考えたとき、限界効用がゼロ、というだけでなく、無差別曲線への接線の勾配がゼロないし無限大、というように、限界代替率のタームで考えてもいる点を重視すると、上とはやや異った解釈の余地もある。

フリードマンの図から明らかなように、彼の定義にとって重要だったのは indifference map の形状だったのであり、$U_i = 0$ はその手掛かりにすぎない。そして、すでに見たように、フィッシャーの場合も、彼の競合・補完の定義に関するかぎり、終始 indifference map の形状について考えていたのである。したがって、重要なのは限界代替率であって、限界効用 U_i や U_j は比 ${}^iR^j = U_i / U_j$ の構成要素としてしか意味をもたない。

そこで、われわれは以下のようにして、「競合・補完」の定義を行う。

いま m 個の財の数量 $q = (q_1, \cdots, q_m)$ に関する効用関数が

$$U = U(q) = U(q_1, \cdots, q_m)$$

であるとして、各財の限界効用

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1(q) = U_1(q_1, \cdots, q_m) \\ &\vdots \\ U_m &= U_m(q) = U_m(q_1, \cdots, q_m) \end{aligned}$$

が、それぞれ

$$\begin{aligned} U_1(q) &= U_1^*(q_1, \cdots, q_m) \cdot K(q_1, \cdots, q_m) \\ &\vdots \\ U_m(q) &= U_m^*(q_1, \cdots, q_m) \cdot K(q_1, \cdots, q_m) \end{aligned}$$

のように、各財個有の q の関数 $U_i^*(q)$ と、各財に共通な q の関数 $K(q)$ との積となっている場合を考える。

ここで効用関数 $U(q)$ の 2 次の微係数を、U_i そのままについて求めれば、

$$U_{ij} = U_{ij}^* \cdot K(q) + U_i^* K_i(q) \quad ,$$

$$U_{ij} = U_{ij}^* \cdot K(q) + U_i^* K_j(q)$$

のようになる。

しかし、各財の限界効用そのものでなく、各財間の限界代替率を重視する立場からすれば、

$$\frac{d}{dK(q)} \left(\frac{U_i(q)}{U_j(q)} \right) = 0 \quad ,$$

すなわち、限界代替率 U_i / U_j は $K(q)$ から独立であり、したがってまた無差別曲面系 indifference map の形状も $K(q)$ とは無関係であって、それらの決定に参与するのは、各財に個有な U_i^*, U_j^* 等である。

したがって indifference map の形状とのかかわりで限界効用式を考えるのであれば、

$$U_i(q)/K(q) = U_i^*(q) \quad ,$$

$$U_j(q)/K(q) = U_j^*(q)$$

のように、恣意的な定数因子は別として、限界代替率が既約分数のかたちとなるような、素因数としての相対限界効用を用いるのが適当であるう。これらU_i^*, U_j^*を「素型相対限界効用」the pime form of the relative marginal utilityと呼び、略号をPFORMUとしよう。

特殊な場合として$K=1$であれば、$U_i^*=U_i$として扱えることはいうまでもない。また、Uが効用示標たりうるときは、その単調増加関数$F(U)$, $F'>0$もまた効用示標たりうるが、そのとき$F_i=F'U_i$だから、

6) $$F_i = F'U_i = F'U_i^*K$$

$$F_j = F'U_j = F'U_j^*K$$

となって、

7) $${}^iR^j = \frac{F_i}{F_j} = \frac{F'U_i}{F'U_j} = \frac{F'U_i^*K}{F'U_j^*K} = \frac{U_i^*}{U_j^*}$$

であり、U_i^*やU_j^*は効用示標Uに関してと同様に効用示標$F(U)$に関しても素型相対限界効用であることは明らかである。つまり、素型相対限界効用（PFORMU）は効用示標関数の単調変換に関して不変である。

以上の理由により、以下では（絶対）限界効用U_iやU_jではなく、素型相対限界効用U_i^*やU_j^*によって理論を展開する。

注）いま効用関数

1) $U=U(q_1, q_2, \cdots, q_m)$

がr次同次だと仮定しうる場合、すなわち

2) $U(\lambda q_1, \lambda q_2, \cdots, \lambda q_m) = \lambda^r U(q_1, q_2, \cdots, q_m)$

である場合を考えると、

オイラーの定理によって、

3) $$rU = \frac{\partial U}{\partial q_1}q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}q_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_m}q_m$$

となるが、

このとき限界効用 $\frac{\partial U}{\partial q_i} \equiv U_i$ や $\frac{\partial U}{\partial q_j} \equiv U_j$ は（$r-1$）次の同次となるから

4）　$(r-1)U_i = \frac{\partial U_i}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial U_i}{\partial q_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial U_i}{\partial q_m} q_m$　,

$(r-1)U_j = \frac{\partial U_j}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial U_j}{\partial q_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial U_j}{\partial q_m} q_m$

のように書ける。すなわち

5）　$U_i = \frac{1}{r-1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial U_i}{\partial q_k} q_k$　,

$U_j = \frac{1}{r-1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial U_j}{\partial q_k} q_k$

となって、各財の限界効用 U_i や U_j は共通因子 $\frac{1}{r-1}$ を含む。したがって、公約数 $\frac{1}{r-1}$ で約分して、素型相対限界効用 U_i^*, U_j^* を求めれば、

6）　$U_i^* = U_i / \left(\frac{1}{r-1}\right) = U_i (r-1)$　,

$U_j^* = U_j / \left(\frac{1}{r-1}\right) = U_j (r-1)$

等を得る。

6）式に 5）式を代入すれば、

7）　$U_i^* = U_i (r-1) = \sum_k \frac{\partial U_i}{\partial q_k} q_k$　,

$U_j^* = U_j (r-1) = \sum_k \frac{\partial U_j}{\partial q_k} q_k$

のようになるから、 7）式の右辺の微分が左辺と整合的であるためには、

$U_i^* = \sum_k \frac{\partial U_i^*}{\partial q_k} q_k$　,　　$U_j^* = \sum_k \frac{\partial U_j^*}{\partial q_k} q_k$

のように、素型相対限界効用 U_i^* や U_j^* は 1 次同次であることが要請される。

このようにして、効用関数 U が r 次の同次式であると仮定されたとき、限界効用式 U_i や U_j は（$r-1$）次の同次式となるが、それをオイラー式のかたちで表現し、共通因子を約分して素型相対限界効用 U_i^* や U_j^* を求めると、U_i^* や U_j^* はもとの効用関数の次数 r のいかんにかかわらず、1 次同次性を満たすことが要請される。

したがって、素型相対限界効用 U_i^* と U_j^* の比によって限界代替率を定義する場合、それら

を同次式として扱おうとするならば、はじめから1次同次と仮定しても一般性を損うことにはならないのではないかと考えられる。（注おわり）

2〕素型相対限界効用によって効用関数Uの2階の全微分を表現すれば、

8）
$$dU_i^* = \frac{\partial U_i^*}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial U_i^*}{\partial q_j} dq_j \equiv U_{ii}^* \, dq_i + U_{ij}^* \, dq_j$$

$$dU_j^* = \frac{\partial U_j^*}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial U_j^*}{\partial q_j} dq_j \equiv U_{ji}^* \, dq_i + U_{jj}^* \, dq_j$$

のように書ける。ここでは $U_{ij}^* = U_{ji}^*$ を仮定する。

前節に述べたアダム・スミスの食物と食器（台所用具）の例では、食物の量が増えないのに食器の量を増やしてもしようがないけれども、食物の量が増えた時ならば、食物の一部を削って食器の購入に当てることは意味がある、というのだった。これはフィッシャーの書物と本棚、その他の例についても同様である。この事は、相対限界効用の言葉に翻訳すれば、食物の量と食器の量が一定の proportion を保ちつつ同時に増えた場合には、食物の相対限界効用や食器の相対限界効用が他財のそれに対して一定でありうる、と解釈する余地のあることを示唆している。

いま食物をI財、食器をJ財としたとき、$U_i^* =$ 一定 ないし $U_j^* =$ 一定 となる状況を想定すれば、$dU_i^* = 0$ ないし $dU_j^* = 0$ だから、8）式により、

9）
$$U_{ii}^* \, dq_i + U_{ij}^* \, dq_j = 0$$

$$U_{ij}^* \, dq_i + U_{jj}^* \, dq_j = 0$$

となるから、

10）
$$dU_1^* = 0 \quad \text{について} \qquad -\frac{U_{ij}^*}{U_{ij}^*} = \frac{dq_j}{dq_i} \quad ,$$

$$dU_2^* = 0 \quad \text{について} \qquad -\frac{U_{ij}^*}{U_{jj}^*} = \frac{dq_j}{dq_i}$$

のように書ける。無差別（等効用）曲線と限界代替率との関係と類推的に述べれば、10）式の $\frac{dq_j}{dq_i}$ は「定（素型相対）限界効用曲線」への接線の勾配を示すから、（2階の）限界プロポーションとでもいうべきものを示している。食物と食器というような補完財の場合は、両財ともに増（減）したとき、素型相対限界効用が一定に保たれるものとすれば、$\frac{dq_j}{dq_i} > 0$ だから、10）式において

11)　$sign\ U_{ii}^{*} \neq sign\ U_{ij}^{*}$　すなわち　$U_{ii}^{*} / U_{ij}^{*} < 0$,

$sign\ U_{jj}^{*} \neq sign\ U_{ij}^{*}$　すなわち　$U_{ij}^{*} / U_{jj}^{*} < 0$

であることが要請され、定限界効用曲線 constant PFORMU curve の勾配、すなわち限界プロポーション marginal proportion は正でなければならない。これで「補完財」を定義することとしよう。

つぎに競合財の例として、メープルシロップ（I 財）と蜂密（J 財）などの場合を考えると、I 財と J 財とが同時に増加すれば、各財の素型相対限界効用 U_i^* や U_j^* は、他財のそれ U_l^* に対して一定に保たれない。U_i^* や U_j^* が一定に保たれるためには、一方の財の量が増える（$dq_i > 0$）とき他方の財の量は減らねばならない（$dq_j < 0$）、と考えられる。その場合には $\frac{dq_j}{dq_i} < 0$ が要請されるから、10）式により、

12)　$sign\ U_{ii}^{*} = sign\ U_{ij}^{*}$,　すなわち　$U_{ii}^{*} / U_{ij}^{*} > 0$;

$sign\ U_{jj}^{*} = sign\ U_{ij}^{*}$,　すなわち　$U_{ij}^{*} / U_{jj}^{*} > 0$.

でなければならない。これが「競合財」の定義となる。すなわち定限界効用曲線の勾配である限界プロポーションが負であるとき、I 財と J 財は競合関係にあると定義される。

なお、ここで I 財と J 財とが補完的であると同時に競合的であるような、すなわち、

$$sign\ U_{ii}^{*} / U_{ij}^{*} \neq sign\ U_{ij}^{*} / U_{jj}^{*}$$

であるようなケースは考えにくいから、われわれの定義ではつねに、$sign\ U_{ii} = sign\ U_{jj}$ を前提することになる。

以上のように、ここでは定（素型相対）限界効用曲線が右上がりのときを「補完財」、右下がりのときを「競合財」、と定義したから、それと類推的に、定限界効用曲線が水平もしくは垂直、すなわち限界プロポーションがゼロまたは無限大、となる場合を「独立財」と定義する。これは I 財の量と J 財の量の間のプロポーションが、消費者から見て問題とされないケースであると解釈される。

この条件を満足するものとして、10）式から

13. 1)　$U_{ij}^{*} = 0$,　$U_{ij}^{*} \neq 0$,,　$U_{jj}^{*} \neq 0$;　または

13. 2)　$U_{ij}^{*} \neq 0$,　$U_{ij}^{*} = 0$,　$U_{jj}^{*} = 0$

によって、「独立財」が定義される。このとき、個々の定限界効用曲線上では、q_i ＝一定、　もしくは q_j ＝一定　となる。

3〕 「Fisher-Friedman の定義」と「續－辻村の定義」とのちがいは、前者が「飽和」すなわち $U_i=0$ や $U_j=0$ を条件として $dU_i=0$ または $dU_j=0$ を考えたのに対して、われわれの場合は I 財と J 財との数量間のプロポーションとの関係で $U_i^*=$ 一定 もしくは $U_j^*=$ 一定 を考え、それを $dU_i^*=0$ または $dU_j^*=0$ の条件としている点にある。

後者は、特殊な場合として、U_i^* や U_j^* がゼロで一定、というフリードマンの設定に一致するケースを含みうる。しかし、一般には I 財、J 財の数量が正（$q_i>0$, $q_j>0$）の領域（第1象限）内で $U_i^* \neq 0$, $U_j^* \neq 0$ と、「飽和」が生じない場合でも「競合・補完」を定義しうるのが特徴である。

また、フリードマンの飽和曲線上では両財間の限界代替率もゼロないし無限大で一定であるが、われわれの定（素型相対）限界効用曲線上では、当該財の限界効用は一定であるが、相手の財の限界効用は変化するから、限界代替率は一般には一定でない。さらにいうまでもないが、フリードマンの飽和曲線は各財につき唯1本であるのに対して、ここでの定（素型相対）限界効用曲線は、各財ごとに指定された限界効用の水準に応じて無数に引かれる点で、無差別曲線群と類推的である。そして I 財の定限界効用曲線群と I 財のそれとが共存する界域に両財間の無差別曲線群が成立することになる。

さて、補完の場合、われわれの定義では、Fisher-Friedman の場合と同様に、U_{ij}^* の符号が U_{ij}^* や U_{jj}^* の符号と異なることが要請されるが、

14) $U_{ij}^*<0$, $U_{ij}^*>0$, $U_{jj}^*>0$

では効用極大の2階の条件

$$D=2\,p_i\,p_j\,U_{ij}^*-p_j^2\,U_{ii}^*-p_i^2\,U_{jj}^*>0$$

を満足しないから、

15) $U_{ij}^*>0$, $U_{ii}^*<0$, $U_{jj}^*<0$

でなければならない。そして、15）の場合はさらに

16) $U_{ij}^{*2}>U_{ii}^*\,U_{jj}^*$ のときと 17) $U_{ij}^{*2}<U_{ii}^*\,U_{jj}^*$

の場合とがありうる。効用関数 U が2次形式で、2階の微係数が定数となるという最も簡単な場合からの類推として、一般に15)－16)の場合を「双曲型補完」、15)－17）の場合を「だ円型補完」と呼ぶことにしよう。後者は Fisher-Friedman の視覚的イメージにちかい場合である。

競合の場合は、U_{ij} の符号が U_{ii} や U_{jj} の符号と一致することが要請される。

18) $U_{ij}^*>0$, $U_{ii}^*>0$, $U_{jj}^*>0$

の場合は、$D>O$ の条件を満足するために

19)′ $p_i\, p_j\, U^*_{ij} > \dfrac{p_j^2 U^*_{ij} + p_i^2 U^*_{jj}}{2}$

でなければならず、したがって

19) $p_i\, p_j\, U^*_{ij} > p_i\, p_j \sqrt{U^*_{ij}\, U^*_{jj}}$ または $U^{*2}_{ij} > U^*_{ii}\, U^*_{jj}$

でなければならない。したがって、18）の型の競合は「双曲型競合」と呼ぶことにしよう。

これと異り、

20) $U^*_{ij} < 0,\quad U^*_{ii} < 0,\quad U^*_{jj} < 0$

の場合は、$D > O$ の条件から

21) $p_i\, p_j\, |U_{ij}| < \dfrac{p_j^2 |U^*_{ij}| + p_i^2 |U^*_{jj}|}{2}$

でなければならぬが、これを変形して

21)′ $p_i\, p_j\, |U_{ij}| < \dfrac{(p_j\sqrt{|U^*_{ij}|} - p_i\sqrt{|U^*_{jj}|})^2}{2} + p_i\, p_j \sqrt{U^*_{ij}\, U^*_{jj}}$

としたとき、この条件は

相対価格が $\dfrac{p_i}{p_j} = \sqrt{\dfrac{U^*_{ij}}{U^*_{jj}}}$ のとき、すなわち

$$(p_j\sqrt{|U^*_{ii}|} - p_i\sqrt{|U^*_{jj}|}) = 0$$

の場合にも成立せねばならぬから、

22) $p_i\, p_j\, |U^*_{ij}| < p_i\, p_j \sqrt{U^*_{ii}\, U^*_{jj}}$,

したがって、 $U^{*2}_{ij} < U^*_{ij}\, U^*_{jj}$

でなければならない。このようにして、符号条件が20）のような場合は「だ円型競合」ということになる。これも Fisher- Friedman の視角的イメージに類似する場合といえる。

独立財の場合は、13. 1）を採れば、$D > O$ であるためには、

23.1） $U^*_{ij} < 0$, $U^*_{jj} < 0$, $U^*_{ij} = 0$;

13. 2）を採れば、

23.2） $U^*_{ij} > 0$, $U^*_{ii} = 0$, $U^*_{jj} = 0$

が要請される。

4〕　Fisher-Friedman の元の定義と、われわれが改訂した定義との相違を際立たせるのは、「双曲型競合」の場合である。双曲型競合の最も簡単な場合の一例として、素型相対限界効用が数量に関して1次同次の場合を想定すれば

24)　$U_i^* = U_{ii}^* q_i + U_{ij}^* q_j$,

$U_j^* = U_{ij}^* q_i + U_{jj}^* q_j$

のように書ける。

いま q_i を横軸に、q_j を縦軸にとれば、縦軸上では、$q_i = 0$ だから奏型相対限界効用は

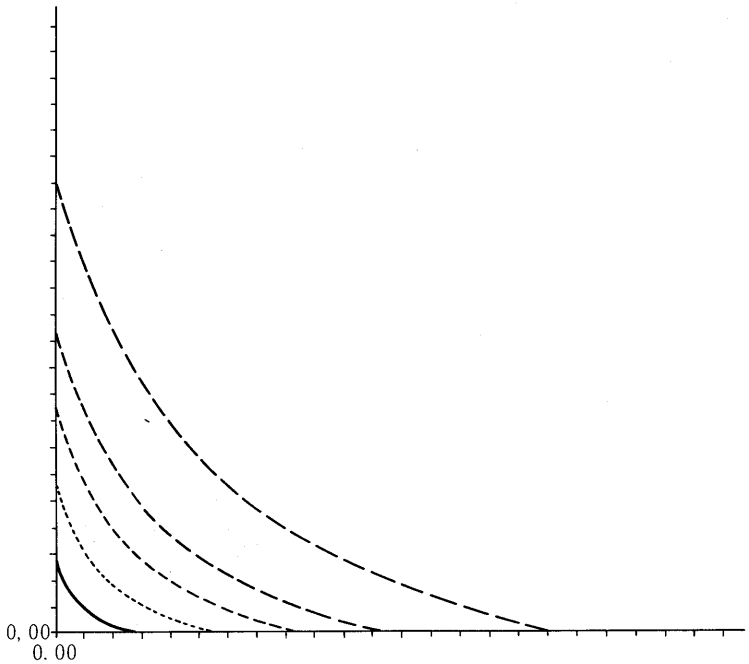
25. 1)　$U_j^* = U_{ij}^* q_j$,　　$U_j^* = U_{jj}^* q_j$

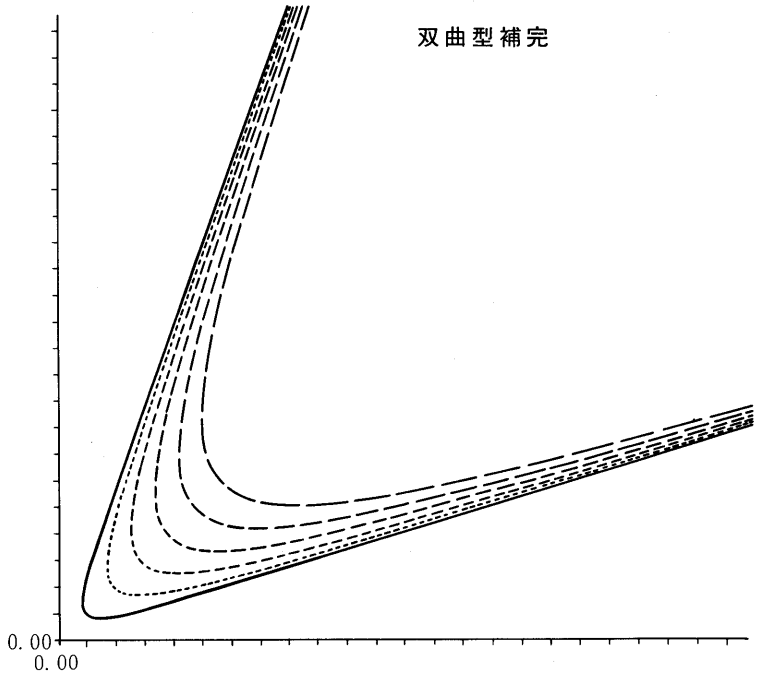
となり、横軸上では $q_j = 0$ だから

25. 2)　$U_i^* = U_{ii}^* q_i$,　　$U_j^* = U_{ij}^* q_i$

となる。双曲型競合では U_{ij}^* , U_{ij}^* , U_{jj}^* がすべて正だから、数量原点（ $q_i = 0$, $q_j = 0$ ）以外の縦軸上、横軸上で両財の素型相対限界効用はつねに正値をとり、また（ $q_i > 0$, $q_j > 0$ ）の第1象限において U_i , U_j はつねに正値をとる。したがって、この場合には、Friedmanの飽和点（$U_i^* = 0$ または $U_j^* = 0$）は存在しないことが明らかである。これは「續-辻村の定義」が一般には「飽和」の概念に依存しないことを例証するものである。

3図　双曲型競合





7. 1次同次の素型相対限界効用とフィツシャーの完全競合・完全補完

「續－辻村の定義」を素型相対限界効用が数量に関して1次同次の場合、すなわち前節の24）式が成り立つ場合に適用すると、

24） $U_i^* = U_{ij}^* q_i + U_{ij}^* q_j$,

$U_j^* = U_{ij}^* q_j + U_{jj}^* q_j$

だから、$U_i^* =$ 一定， $U_j^* =$ 一定　としたときは、

24′） $U_i^* = \bar{U}_i^*$ のとき、 $q_j = \dfrac{-\bar{U}_i^*}{U_{ij}^*} - \dfrac{U_{ii}^*}{U_{ij}^*} q_i$,

$U_j = U_j^*$ のとき、 $q_j = \dfrac{-\bar{U}_j^*}{U_{jj}^*} - \dfrac{U_{ij}^*}{U_{jj}^*} q_j$

のようになって、I財、J財の定限界効用曲線はそれぞれ、素型相対限界効用 $\bar{U}_i^*$ ないし $\bar{U}_j^*$ の水準に応じて、限界プロポーション $-U_{ii}^*/U_{ij}^*$ および $-U_{ij}^*/U_{jj}^*$ を勾配とする直線で示される。

そして、双曲型競合の場合には、前節の25）式から、$q_i = 0$ となる縦軸上では限界代替率が

26. 1） $U_i^* / U_j^* = U_{ij}^* / U_{jj}^*$

となり、横軸上では

26.2） $U_i^* / U_j^* = U_{ii}^* / U_{ij}^*$

となるが、各式の右辺はそれぞれ $U_j^* = \bar{U}_j^*$ および $U_i^* = \bar{U}_i^*$ についての定限界効用曲線の勾配すなわち限界プロポーションに一致している。

したがって、無差別曲線が縦軸、横軸と交わる点での均衡条件は、

27. 1） $U_i^* / U_j^* = U_{ij}^* / U_{jj}^* = p_i / p_j$,

27. 2） $U_i^* / U_j^* = U_{ii}^* / U_{ij}^* = p_i / p_j$

となって、それぞれ相対価格が定限界効用曲線の勾配に一致するところで勾衡が成立することが分かる。したがって、縦軸上では相対価格 p_i / p_j が等限界効用曲線の勾配より大となったとき（$p_i / p_j > U_{ij}^*/U_{jj}^*$）にコーナー・マキシム、横軸上では相対価格 p_i / p_j が等限界効用曲線の勾配より小となるとき（$p_i / p_j < U_{ii}^* / U_{ij}^*$）にコーナー・マキシムになる、というかたちをとる。したがって無差別曲線上で均衡が成立しうる相対価格の範囲は

$$\frac{U_{ii}^*}{U_{ij}^*} \leqq \frac{p_i}{p_j} \leqq \frac{U_{ij}^*}{U_{jj}^*}$$

となる。

いま 27) 式の意味で縦軸上、横軸上それぞれで均衡が成立する臨界的な 2 つの相対価格が、仮りに等しくなる場合を想定すれば、それは I 財、J 財それぞれの定限界効用曲線の勾配が一致する場合、すなわち、

28) $U_{ij}^* / U_{ij}^* = U_{ij}^* / U_{jj}^*$ あるいは $U_{ij}^{*2} = U_{ii} U_{jj}$ あるいは $U_{ij}^* = \sqrt{U_{ij}^*} \sqrt{U_{jj}^*}$

となっている場合である。

24) 式から得られる限界代替率の式に、28) 式の条件を代入すれば、

29) $$^iR^j = \frac{U_i^*}{U_j^*} = \frac{U_{ii}^* q_i + U_{ij}^* q_j}{U_{ij}^* q_i + U_{jj}^* q_j} = \frac{(\sqrt{U_{ii}^*}) q_i + \sqrt{U_{ii}^*}\sqrt{U_{jj}^*} q_j}{\sqrt{U_{ii}^*}\sqrt{U_{jj}^*} q_i + (\sqrt{U_{jj}^*})^2 q_j}$$

$$= \frac{\sqrt{U_{ii}^* q_i} + \sqrt{U_{jj}^* q_j}}{\sqrt{U_{ii}^* q_i} + \sqrt{U_{jj}^* q_j}} \cdot \frac{\sqrt{U_{ii}^*}}{\sqrt{U_{jj}^*}} = \frac{\sqrt{U_{ii}^*}}{\sqrt{U_{jj}^*}}$$

となり、U_{ii}^* や U_{jj}^* が定数である場合には、I 財と J 財の間の限界代替率がつねに一定、すなわち無差別曲線が $-\sqrt{\frac{U_{ii}^*}{U_{jj}^*}}$ の勾配をもつ右下がりの直線となる。

上の状況は、ただちに Fisher の完全競合の定義を想起させる。Fisher は彼の21図で完全競合を、23図で完全補完を定義した。彼の21図を20図と比較し、23図を22図と比較すると、Fisher の思考過程では、「だ円型競合」の極限として完全競合に、「だ円型補完」の極限として完全補完に、想到したようにも思える。しかし、彼が完全補完、完全競合を考えたとき、本当に「飽和」の概念に執着していたのか否かは疑問の余地がある。

むしろ Fisher の完全競合は、29) 式で示したように「双曲型競合」の極限として理解するほうが便利だし、彼自身の意に叶うのではないかと考えられる。この場合、完全競合の定義が「飽和」の概念と無関係なことはいうまでもない。

つぎに「双曲型補完」の場合について考えよう。ここでも素型相対限界効用が 1 次同次すなわち限界プロポーションが一定の場合を想定すれば、限界効用式は 24) 式で示されるが、ここでの符号条件は前述のように 15) − 16) で示される。

15) $U_{ij}^* > 0$, $U_{ii}^* < 0$, $U_{jj}^* < 0$.

16)　$U_{ij}^{*2} > U_{ii}^{*}\ U_{jj}^{*}$

したがって、定限界効用曲線の勾配すなわち限界プロポーションは

30)　I 財について　$-U_{ii}^{*}/U_{ij}^{*} > 0$ ，　J 財について　$-U_{ij}^{*}/U_{jj}^{*} > 0$

と正であり、さらに条件16)によって

31)　$-U_{ij}^{*}/U_{jj}^{*} > -U_{ii}^{*}/U_{ij}^{*}$

と、J 財に関する定限界効用曲線の勾配が I 財に関するものより大となる。すなわち、双曲型補完の場合は各財の定限界効用曲線は右上がりとなるが、J 財に関するものの勾配がよりキツクなる。

また、この場合は双曲型競合のときと異り、

24)　$U_{i}^{*} = U_{ii}^{*}\ q_i + U_{ij}^{*}\ q_j$ ，

$U_{j}^{*} = U_{ij}^{*}\ q_i + U_{jj}^{*} \cdot q_j$

に対し、U_{ii}^{*}，U_{jj}^{*} が負で、U_{ij} が正だから、q_i と q_j がともに正である第1象限内（$q_i > 0$，$q_j > 0$）でも、U_i^{*}や U_j^{*} がゼロとなることがありうる。つまり

$U_i^{*} = 0$ ：　$0 = U_{ii}^{*}\ q_i + U_{ij}^{*}\ q_j$ ，　すなわち　$\dfrac{q_j}{q_i} = \dfrac{-U_{ii}^{*}}{U_{ij}^{*}}$

32)　$U_j^{*} = 0$ ：　$0 = U_{ij}^{*}\ q_i + U_{jj}^{*}\ q_j$ ，　すなわち　$\dfrac{q_j}{q_i} = \dfrac{-U_{ij}^{*}}{U_{jj}^{*}}$

と I 財と J 財の数量比（平均プロポーション）がそれぞれの定限界効用曲線の勾配（限界プロポーション）に　致したとき、各財の素型相対限界効用はゼロとなる。

しかし、前述のように、これは消費者容力 consumer capacity とは関係のない、両財間のプロポーションの問題であるから、ここでの $U_i^{*} = 0$ ，$U_j^{*} = 0$ は「飽和」ではなく「プロポーションの限界」 the limits of proportion を示すと理解されるべきである。

このようにして双曲型補完の場合には、等限界効用曲線の特殊な場合として、各財の素型相対限界効用がゼロとなる軌跡が第1象限内に存在する。これは「均整臨界曲線」 proportional limit curve と呼ぶのが適当であろう。均整臨界曲線は「だ円型補完」、「だ円型競合」の場合にも存在するが、双曲型補完の場合は、2本の均整臨界曲線に画される無差別曲線群 indifference map の有効域が右上方に開いており「飽和」を連想させない点で、Fisher-Friedman の図で示された視覚的イメージと大きく異るのが特徴である。

双曲型補完の極限として、2本の右上がりの均整臨界曲線の勾配が一定で、互いに相等しい場合、

つまり1本の右上がりの直線となる場合を考えれば、それが Fisher の完全補完のイメージに一致することは明らかである。そのようになる条件は、23) 式から

33)　$U_{ii}^{*}/U_{ij}^{*} = U_{ij}^{*}/U_{jj}^{*}$　すなわち　$U_{ii}^{*}\,U_{jj}^{*} = U_{ij}^{*2}$

として導かれるが、完全競合の場合とのちがいは、符号条件として18) でなく15) を前提していることにある。

つまり、続－辻村により改訂された定義では、競合の場合の I 財と J 財それぞれの右下がりの等限界効用曲線群の成す角が拡き切って勾配が同じになった場合として、Fiaher の完全競合の無差別曲線群が再現され、補完の場合の各財の2本の右上がりの均整臨界曲線の成す角が縮まり切って無差別曲線群が1本の右上がりの直線に退化した場合として、Fisher の完全補完の図が再現されることになるのである。

8.　「競合・補完」の分類と「所得－消費曲線」の勾配

われわれの出発点となったフィッシャーの「競合・補完」概念の重要性は、スルツキー式の意味で、補完の場合には所得効果が現れやすく、競合の場合には代替効果が現れやすい、という特性を示唆している事にある。

そこでまづ、Ⅵ節で与えた定義と「所得－消費曲線」の在り方との関係を検討しておこう。

フリードマンの定義が導かれるときの理論展開にも見られたように、限界代替率を

1)　$^{i}R^{j} = U_{i}^{*}/U_{j}^{*}$

と置いて、その全微分を

2)　$dR = \dfrac{\partial R}{\partial q_i}\,d\,q_i + \dfrac{\partial R}{\partial q_j}\,d\,q_j$

と書いたとき、限界代替率 $^{i}R^{j} =$ 一定 となる点の軌跡の勾配は

3)　$$\frac{d\,q_j}{d\,q_i} = \frac{-U_{ii}^{*} + U_{ij}^{*}\,\dfrac{U_i^{*}}{U_j^{*}}}{U_{ij} + U_{jj}\,\dfrac{U_i^{*}}{U_j^{*}}}$$

となるが、これに均衡条件

4)　$\dfrac{U_i^{*}}{U_j^{*}} = \dfrac{p_i}{p_j}$

を代入すれば、

$$5)\quad \frac{dq_j}{dq_i}=\frac{-U_{ii}^{*}+U_{ij}^{*}\dfrac{p_i}{p_j}}{U_{ij}^{*}-U_{jj}^{*}\dfrac{p_i}{p_j}}$$

を得る。ここで相対価格 $\frac{p_i}{p_j}$ を一定とすれば、5）式は Hicks の意味での所得－消費曲線の勾配を示すこととなる。これとⅥ節で示した「競合・補完」の分類との関係は、どうなるだろうか。

まづ、I 財と J 財とが「独立」な場合は

前節 23. 1)　$U_{ij}^{*}=0$,　　$U_{ii}^{*}<0$,　　$U_{jj}^{*}<0$

か、もしくは

前節 23. 2)　$U_{ij}^{*}>0$,　　$U_{ii}^{*}=0$,　　$U_{jj}^{*}=0$

のような符号条件となる。

23.1）の場合に 5）式は

$$6)\quad \frac{dq_j}{dq_i}=\frac{-U_{ii}^{*}}{-U_{jj}^{*}\dfrac{p_i}{p_j}}=\frac{U_{ii}^{*}}{U_{jj}^{*}}\frac{p_j}{p_i}$$

となり、23. 2）のとき 5）式は

$$7)\quad \frac{dq_j}{dq_i}=\frac{U_{ij}^{*}\dfrac{p_i}{p_j}}{U_{ij}^{*}}=\frac{p_i}{p_j}$$

となる。7）の場合はもちろん $\frac{dq_j}{dq_i}>0$，6）の場合も、$U_{ii}/U_{jj}>0$ だから $\frac{dq_j}{dq_i}>0$ となって、独立財についての所得－消費曲線がつねに正の勾配をもつ右上がりの曲線となることは明らかである。

I 財と J 財とが「補完的」である場合は、前節で示したように、

前節 15)　$U_{ij}^{*}>0$,　　$U_{ii}^{*}<0$,　　$U_{jj}^{*}<0$

であるから、5）の分子も分母も正となって、つねに $\frac{dq_j}{dq_i}>0$ が成立つ。すなわち補完財についての所得－消費曲線は、つねに正の勾配をもつ右上がりの曲線となる。

フィッシャーの完全補完は、前述のように、I 財の均整臨界曲線と J 財のそれとが重なって、$U_{ii}^{*}/U_{ij}^{*}=U_{ij}^{*}/U_{jj}^{*}$ となる場合であるが、このとき $U_i=0$ または $U_j=0$ となるから、3）式から、

$$dq_j/dq_i=-U_{ii}^{*}/U_{ij}^{*}=-U_{ij}^{*}/U_{jj}^{*}$$

となって、右上がりの完全補完曲線そのものが所得－消費曲線となる。

「競合財」の場合は、その関係が「双曲型競合」であるか、「だ円型競合」であるかによって、所得－消費曲線の在り方は異ってくる。

「双曲型競合」すなわち

前節 18)，19)　$U_{ij}^{*}>0$ ，$U_{ii}^{*}>0$ ，$U_{jj}^{*}>0$ ；　$U_{ij}^{*2}>U_{ii}^{*}U_{jj}^{*}$

の場合は、すでに述べたように、均衡が成立しうる相対価格 $\frac{p_i}{p_j}$ の正常域は

8)　$$\frac{U_{ii}^{*}}{U_{ij}^{*}} \leqq \frac{p_i}{p_j} \leqq \frac{U_{ij}^{*}}{U_{jj}^{*}}$$

に限られる。

8）式で等号となる場合、相対価格を一定として所得を増加させたときの均衡点の軌跡は q_i 軸もしくは q_j 軸に一致し、また相対価格が正常域の外、すなわち $\frac{p_i}{p_j}<\frac{U_{ii}^{*}}{U_{ij}^{*}}$ のときは q_i 軸上のコーナー・マキシムとなり、$\frac{U_{ij}^{*}}{U_{jj}^{*}}<\frac{p_i}{p_j}$ のときは q_j 軸上のコーナー・マキシムとなるから、所得－消費曲線は q_i 軸もしくは q_j 軸に一致して、水平、垂直となる。

相対価格 $\frac{p_i}{p_j}$ が $\frac{U_{ii}^{*}}{U_{ij}^{*}}$ より大で、$\frac{U_{ij}^{*}}{U_{jj}^{*}}$ より小、という正常域にある場合は、

9.1)　$\frac{U_{ii}^{*}}{U_{ij}^{*}}<\frac{p_i}{p_j}$ から　$-U_{ii}^{*}+U_{ij}^{*}\frac{p_i}{p_j}>0$

9.2)　$\frac{p_i}{p_j}<\frac{U_{ij}^{*}}{U_{jj}^{*}}$ から　$U_{ij}^{*}-U_{jj}^{*}\frac{p_i}{p_j}>0$

となり、5）式の分子、分母はともに正となるから、つねに $\frac{dq_j}{dq_i}>0$ が成立つ。つまり所得－消費曲線は正の勾配をもつ右上がりの曲線となる。

前述のようにフィッシャーの完全競合は、$U_{ii}^{*}/U_{ij}^{*}=p_i/p_j=U_{ij}^{*}/U_{jj}^{*}$ となって相対価格の正常域が消滅した場合であり、このとき5）式の分子、分母はゼロとなって、所得－消費曲線の勾配は不定となる。これは右下がりの直線となる無差別曲線と価格線とが重さなってしまうからである。これ以外の相対価格については、所得－消費曲線は横軸または縦軸に一致する。

このようにして、双曲型競合の場合、所得－消費曲線は数量空間の第1象限内では正の勾配をもち、相対価格が $\frac{U_{ii}^{*}}{U_{ij}^{*}}$ もしくは $\frac{U_{ij}^{*}}{U_{jj}^{*}}$ に一致するか正常域外にある場合には、q_i 軸もしくは q_j 軸に一致して水平・垂直となる。いずれにせよ、所得－消費曲線の勾配が負となることはないのである。

競合関係が「だ円型競合」である場合は、上と大きく異る。だ円型競合のときは、

前節 20), 22)　$U_{ij}^{*} < 0$,　$U_{ii}^{*} < 0$,　$U_{jj}^{*} < 0$;　$U_{ij}^{*2} < U_{ii}^{*} U_{jj}^{*}$

である。

この符号条件からすると、5）式右辺の分子第1項は正、第2項は負、分母第1項は負、第2項は正となるから、相対価格 $\frac{p_i}{p_j}$ の値のいかんによって、5）式右辺の分子や分母はそれぞれに正とも負ともなりうる。

$$5)\quad \frac{dq_j}{dq_i} = \frac{-U_{ii}^{*} + U_{ij}^{*}\frac{p_i}{p_j}}{U_{ij}^{*} - U_{jj}^{*}\frac{p_i}{p_j}}$$

5）式の分子については

$$10.1)\quad -U_{ii}^{*} + U_{ij}^{*}\frac{p_i}{p_j} \gtreqqless 0 ,\qquad U_{ij}^{*}\frac{p_i}{p_j} \gtreqqless U_{ii}^{*} ,\qquad \frac{p_i}{p_j} \lesseqqgtr \frac{U_{ii}^{*}}{U_{ij}^{*}}$$

によって正、負が決まる。5）式の分母については、

$$10.2)\quad U_{ij}^{*} - U_{jj}^{*}\frac{p_i}{p_j} \gtreqqless 0 ,\qquad U_{ij}^{*} \gtreqqless U_{jj}^{*}\frac{p_i}{p_j} ,\qquad \frac{p_i}{p_j} \gtreqqless \frac{U_{ij}^{*}}{U_{jj}^{*}}$$

となる。ただし「だ円型競合」の場合は $U_{ij} < U_{ii}\ U_{jj}$ だから $\frac{U_{ij}^{*}}{U_{jj}^{*}} < \frac{U_{ii}^{*}}{U_{ij}^{*}}$ でなければならない。

したがって

$\frac{p_i}{p_j} < \frac{U_{ij}^{*}}{U_{jj}^{*}}$　と　$\frac{p_j}{p_j} > \frac{U_{ii}^{*}}{U_{ij}^{*}}$　とが同時に成立つことはないから、分子と分母が同符号で $\frac{dq_j}{dq_i} > 0$ となるのは

$$11)\quad \frac{U_{ij}^{*}}{U_{jj}^{*}} < \frac{p_i}{p_j} < \frac{U_{ii}^{*}}{U_{ij}^{*}}$$

のときだけである。すなわち相対価格が 11) 式の範囲に入るとき、「だ円型競合」における所得－消費曲線の勾配は正となる。これは、さきの双曲型競合の場合と類似する。ここでも 11) の範囲を相対価格 $\frac{p_i}{p_j}$ の正常域と呼ぶことにしよう。

10. 1) の $\frac{p_i}{p_j} < \frac{U_{ii}^{*}}{U_{ij}^{*}}$ と 10. 2) の $\frac{p_i}{p_j} < \frac{U_{ij}^{*}}{U_{jj}^{*}}$ が同時に成立つ場合、すなわち

$$12)\quad \frac{U_{ij}^{*}}{U_{ij}^{*}} > \frac{U_{ij}^{*}}{U_{jj}^{*}} > \frac{p_i}{p_j}$$

であるとき、5）式の分子は正、分母は負となるから、$\frac{dq_j}{dq_i} < 0$ となり、所得－消費曲線は負の勾

配をもつ。また、10. 1) の $\frac{p_i}{p_j} > \frac{U_{ii}^*}{U_{ij}^*}$ と 10. 2) $\frac{p_i}{p_j} > \frac{U_{ij}^*}{U_{jj}^*}$ とが同時に成立つ場合、すなわち、

13) $\frac{U_{ij}}{U_{jj}^*} < \frac{U_{ii}}{U_{ij}^*} < \frac{p_i}{p_j}$

であるとき、5）式の分子は負、分母は正となって、$\frac{dq_j}{dq_i} < 0$ となり、この場合も所得 - 消費曲線の勾配は負となる。マーシャル以来の伝統にならって、12)、13) のように所得 - 消費曲線 が負の勾配をもつ、右下がりの曲線となるような相対価格域はギッフェン域と呼ぶことにしよう。

この「ギッフェン域」の現れるところが、補完、独立はもちろん、双曲線競合とも異る、「だ円型競合」のきわ立った特徴であり、おそらく意識下で Fisher の頭脳の一角を占めていた事にちがいない。

（ $q_i > 0$， $q_j > 0$ ）という第1象限内で、相対価格のいかんにより、所得 - 消費曲線が右上がりになる界域と、それを挾んで上下に、所得 - 消費曲線が右下がりになる界域とが共存するとすれば、当然のこととして正常域とギッフェン域とを画する境界がなければならない。

10. 1）で $\frac{p_i}{p_j} = \frac{U_{ii}}{U_{ij}^*}$ 、 すなわち相対価格が I 財の定（素型相対）限界効用曲線の勾配（限界プポーション）に一致するとき、5）式の分子はゼロとなるから、$\frac{dq_j}{dp_i} = 0$，すなわち所得 - 消費曲線は水平となる。

また、10.2）で $\frac{p_i}{p_j} = \frac{U_{ij}}{U_{jj}^*}$ となるとき、5）式の分母がゼロとなるから、$\frac{dq_j}{dq_i} = \infty$ 、すなわち所得 - 消費曲線は垂直となる。これら水平、垂直な所得 - 消費曲線を与える相対価格は正常域とギッフェン域との境界を画するものであるからギッフェン閾 Giffen threshold と呼ぶのが適当であろう。

このようにして、「だ円型競合」の場合には、所得 - 消費曲線が正の勾配をもつ相対価格の正常域と、所得 - 消費曲線が負の勾配をもつようなギッフェン域と、それらの境界をなす水平、垂直な所得 - 消費曲線を与えるギッフェン閾とがありうるのである。

以上のように、Fisher- Friedman ＝ 続 - 辻村　の定義による補完・独立・競合の分類に対応する所得 - 消費曲線の在り方を整理すると、所得 - 消費曲線が正の勾配をもつ右上がりの曲線になる場合、水平もしくは垂直になる場合、負の勾配をもつ右下がりの曲線になる場合、等がありうることが示される。

しかし、そればかりでなく、補完・独立・競合の各ケースを比較すると、相対価格 $\frac{p_i}{p_j}$ と定（素型相対）限界効用曲線の勾配（限界プロポーション）$\frac{U_{ii}}{U_{ij}^*}$ ， $\frac{U_{ij}}{U_{jj}^*}$ との関係が重要であり、単に質的な分類を超えて、競合・補完の関係を量的に捉えることの重要性が示唆されるのである。

9. 「續－辻村の定義」とスルツキー式：交叉価格効果

スルツキー式は交叉価格効果 $\partial q_j / \partial p_i$ をつぎのように分解する。

1） $\partial q_j / \partial p_i = S_{ji} - q_i (\partial q_j / \partial y)$

価格効果　代替効果　　所得効果

ここでは、

2） $S_{ji} = U_i \, p_j / D = U_j \, p_i / D$

交叉代替効果

であり、

3） $-q_i (\partial q_j / \partial y) = q_i (p_j U_{ii}^* - p_i U_{ij}^*) / D$

交叉所得効果

となっている。ここで $D > 0$ である。

ここで2）式の U_i^* もしくは U_j^* のところに、

4） $U_i^* = U_{ij}^* \, q_i + U_{ij}^* \, q_j$,

$U_j^* = U_{ij}^* \, q_i + U_{jj}^* \, q_j$

と素型相対限界効用を1次同次と仮定した式を代入すれば、

5） S_{ji} の分子 $= p_i U_j^* = p_i \, q_i U_{ij}^* + p_i \, q_j \, U_{jj}^*$

となる。これに対して所得効果3）式右辺の分子は、

6） $-p_i \, q_i U_{ij}^* + p_j q_i U_{ij}^*$

となっている。

5）と 6）を 1）式の分子に代入すれば、

7）

補償された交叉代替効果	$p_i \, q_i \, U_{ij}^* + p_i \, q_j \, U_{jj}^*$	
交叉所得効果	$-p_i \, q_i \, U_{ij}^* + p_j q_i U_{ii}^*$	(+
交叉価格効果　$\partial q_j / \partial p_i$ の分子	$p_i \, q_j \, U_{jj}^* + p_j q_i \, U_{ii}^*$	

となる。

7）式の最下段において、いま I 財と J 財とが補完関係にあるとすれば、

$U_{ii} < 0$,　$U_{jj} < 0$,　$U_{ij} > 0$

だから、交叉価格効果 $\partial q_j / \partial p_i$ はつねに負となる。I 財と J 財とが双曲型競合であるとすれば、

$$U_{ii}^{*} > 0 \ , \qquad U_{jj}^{*} > 0 \ , \qquad U_{ij}^{*} > 0$$

だから、正常相対価格域で交叉価格効果はつねに正 となる。

だ円型競合については改めて検討するが、上の結果は、素型相対限界効用が数量 q の 1 次同次式であるとき、I 財と J 財とが補完ならば、正の交叉代替効果よりも負の所得効果がまさり、交叉価格効果はつねに負となること、また両財が競合関係にある場合は、正の交叉代替効果が負の所得効果より大きく、交叉価格効果はつねに正 となる、ことを示している。

I 財と J 財とが独立であるとき、「續－辻村の定義」では、

$$U_{ii}^{*} = U_{jj}^{*} = 0 \ , \qquad U_{ij}^{*} > 0$$

であるか、あるいは

$$U_{ii}^{*} < 0 \ , \qquad U_{jj}^{*} < 0 \ , \qquad U_{ij}^{*} = 0$$

であった。

前者の場合、素型相対限界効用は、4）式を前提すれば

4)′ $U_{i}^{*} = U_{ij}^{*} q_{j} \ , \qquad U_{j}^{*} = U_{ij}^{*} q_{i}$

となるから、2）式により交叉代替効果は

8） S_{ji} の分子 $q_{i} U_{j}^{*} = p_{i} q_{i} U_{ij}^{*}$

となり、交叉所得効果については、3）式から

9） 所得効果の分子 $- p_{i} q_{i} U_{ij}^{*}$

となる。8）式と 9）式から、 いまの場合には、補償された交叉代替効果の正値が、所得効果の負値によって、完全に相殺され、交叉価格効果がつねにゼロとなることは明らかである。

独立財で 2 次微係数の符号が

$$U_{ii}^{*} < 0 \ , \qquad U_{jj}^{*} < 0 \ , \qquad U_{ij}^{*} = 0$$

の場合に、素型相対限界効用が、上の 4)′ 式と類推的に

10） $U_{i}^{*} = r \ U_{ii} \ q_{i} \ , \ U_{j}^{*} = r \ U_{jj}^{*} \ q_{j}$

で表わされるとすると、$U_{i} > 0$ のためには $r < 0$ でなければならない。2)式から、補償された代替効果 S_{ji} の分子は

11） $\frac{1}{r} p_{j} q_{i} U_{ii}^{*}$

となり、所得効果3）の分子は、

12)　$p_j\, q_i\, U_{ii}^* < 0$

となる。したがって $r=-1$ のとき、すなわち U_i が（－1）次同次のとき交叉代替効果と交叉所得効果は完全に相殺する。

さて、スルツキー式において2財モデルの場合は一般に、交叉代替効果 S_{ji} はつねに正であることが知られている。そして既に見たように、補完、独立の場合に所得消費曲線はつねに右上がりであるから（$\partial q_j/\partial y$）＞0，したがって3）式で示される交叉所得効果は $-q_i(\partial q_j/\partial y)<0$ と、つねに負となる。

双曲型競合の場合にも、正常価格域 $\frac{U_{ii}^*}{U_{ij}^*}<\frac{p_i}{p_j}<\frac{U_{ij}^*}{U_{jj}^*}$ では、3）式のカッコ内が（$p_jU_{ii}^*-p_iU_{ij}^*$）＜0となるから、所得効果はつねに負となる。ただし、「双曲型競合」の場合には、初期の相対価格が $\frac{p_i}{p_j}\leqq\frac{U_{ij}^*}{U_{ij}^*}$ の界域にあると（$p_jU_{ii}^*-p_iU_{ij}^*$）≧0 となるが、このとき $\frac{p_i}{p_j}<\frac{U_{ii}^*}{U_{ij}^*}$ では初期点が q_i 軸上のコーナー・マキシマムになっているから J 財に対する交叉所得効果3）はゼロと読まれ、また交叉代替効果も生じないことになる。初期の相対価格が $\frac{U_{ij}^*}{U_{jj}^*}\leqq\frac{p_i}{p_j}$ であるとき、初期点は q_j 軸上にある、すなわち I 財は消費選好の対象から除外されているから、I 財の価格上昇 dp_i は q_j に対して何の効果ももたない。

「だ円型競合」の場合、4）式を仮定することはできないが、相対価格の正常域 $\frac{U_{ij}^*}{U_{jj}^*}<\frac{p_i}{p_j}<\frac{U_{ii}^*}{U_{ij}^*}$ では、3）式のカッコ内が（$p_jU_{ii}^*-p_iU_{ij}^*$）＜0 となるから、交叉所得効果は負で、補償された交叉代替効果の正値を減殺するかたちとなる。ただし、初期の相対価格が J 財のギッフェン域に近く、所得－消費曲線が水平に近い界域では、p_i の上昇が q_j におよぼす所得効果は小さい。他方で、この界域では無差別曲線の勾配が比較的垂直に近く、代替効果の正値が大きいから、交叉価格効果は正になりやすいといえる。

初期の相対価格が $\frac{p_i}{p_j}>\frac{U_{ii}^*}{U_{ij}^*}>\frac{U_{ij}^*}{U_{jj}^*}$ と J 財のギッフェン域にあるときは、3）式のカッコ内が（$p_jU_{ii}^*-p_iU_{ij}^*$）＞0 と正値をとるから、p_i の上昇が q_j におよぼす交叉所得効果は正で、交叉代替効果の正値を増幅し、両者を総合した交叉価格効果は、大きな正値をとることとなる。

初期の相対価格が $\frac{p_i}{p_j}<\frac{U_{ij}}{U_{jj}^*}<\frac{U_{ii}}{U_{ij}^*}$ と I 財のギッフェン域にあるときは、所得－消費曲線が負のキツイ勾配をもち、無差別曲線の勾配は比較的水平に近いから、負の所得効果が正の代替効果を上廻って、p_i から q_j への交叉価格効果は負となる可能性が大きい。

10. 「平均代用弾性」： 競合・補完の量的示度

前節の2財モデルで素型相対限界効用が、4）式のように、財の数量 q に関する1次同次式であると仮定できる場合には、交叉価格効果に関してまことに明快な結論が導かれる。

「補完財の間の交叉価格効果はつねに負、すなわち、I 財の価格上昇（下落）は必ず J 財の需要を減少（増加）させる。」

「財の間の競合関係が双曲型競合で示しうる場合、正常域内で交叉価格効果はつねに正、すなわち、I 財の価格上昇（下落）は必ず J 財の需要を増加（減少）させる。」

「独立財の間では、交叉価格効果はつねにゼロ、すなわち I 財の価格変化は J 財の需要に全く影響を与えない。」

ことを断定することができる。

実際上、上のようになるのは、いずれも双曲型の補完、競合、独立の場合と考えられ、すべてのケースをおおうとは言えないが、かなり多くの場合が双曲型で近似されうるように思われる。

各財の素型相対限界効用が、

$$1)\quad \begin{aligned} U_i^* &= U_{ii}^* q_i + U_{ij}^* q_j \quad , \\ U_j^* &= U_{ij}^* q_i + U_{jj}^* q_j \end{aligned}$$

で示されるとき、$\overline{U_i^*}$ および $\overline{U_j^*}$ の限界プロポーションは、それぞれ、

$$\overline{U_i^*}\text{一定について：}\quad \frac{dq_j}{dq_i} = \frac{-U_{ii}^*}{U_{ij}^*}$$

$$\overline{U_j^*}\text{一定について：}\quad \frac{dq_j}{dq_i} = \frac{-U_{ij}^*}{U_{jj}^*}$$

で一定となることは、さきにみた。

このとき限界代替率と相対価格との均等は、

$$3)\quad {}^iR^j = \frac{U_i^*}{U_j^*} = \frac{U_{ii}^* q_i + U_{ij}^* q_j}{U_{ij}^* q_j + U_{jj}^* q_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

となるから、これを変形すれば

$$4)\quad \text{平均プロポーション：}\quad \frac{q_j}{q_i} = \frac{p_j U_{ii}^* - p_i U_{ij}^*}{p_i U_{jj}^* - p_j U_{ij}^*}$$

となって、相対価格が与えられれば、所得に関係なく、I 財と J 財との平均プロポーションは一定となる。

いま、「補完」の場合には、相対価格は $\frac{p_i}{p_j} = 0$ から $\frac{p_j}{p_i} = 0$ まで変化しうる。$p_i = 0$ のとき

4）式から、

4. 1）　$\left(\frac{q_j}{q_i}\right)_{p_i=0} = \frac{-U_{ii}^*}{U_{ij}^*}$　　平均プロポーションの下限

となり、$p_j = 0$ のときは、

4. 2）　$\left(\frac{q_j}{q_i}\right)_{p_j=0} = \frac{-U_{ij}^*}{U_{jj}^*}$　　平均プロポーションの上限

となるから、中間的な相対価格の変化に対応して、平均プロポーション q_j / q_i は限界プロポーションの値 $-U_{ii}^* / U_{ij}^*$ から $-U_{ij}^* / U_{jj}^*$ まで変化しうることとなる。

q_i を横軸に、q_j を縦軸にとったとき、相対価格が $p_i / p_j = 0$ から $p_j / p_i = 0$ まで変化すれば、価格線の勾配は水平から垂直まで 90° 変化する。

これに対して、平均プロポーションは原点を通る右上がりの直線で示されるから、平均プロポーションの下限 $\left(\frac{q_j}{q_i}\right)_{p_i=0}$ から上限 $\left(\frac{q_j}{q_i}\right)_{p_j=0}$ までの回転角を $\theta°$ とすると、4）式から、

5）　$tan\,\theta = \frac{U_{ij}^2 - U_{ii}\,U_{jj}}{U_{ij}\,(U_{ii} + U_{jj})}$

となる。

このようにして、両財間のプロポーションの変化可能幅を $\theta°$ で表示すれば、相対価格線が 90° 回転する間にプロポーションの線は $\theta°$ 回転することになる。ヒックス、アレン以来財の間の代替関係を限界的な代用弾性

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{q_j}{q_i}\right)}{d\left(\frac{p_i}{p_j}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{p_i}{p_j}\right)}{\left(\frac{q_j}{q_i}\right)}$$

で表現するという便利な表示形式が用いられているが、これと類推的に考えれば、相対価格の変化に対応する数量比の変化の程度を平均的に示す「平均代用弾性」の概念があってもよさそうに思われる。そこで、

6）　$\Sigma = \theta°/90°$

と「平均代用弾性」を定義することとする。度数表示を用いるのは、財の間の「補完度」を連続的に測れるよう考慮したからである。

前述のように、完全補完の場合は 2 つの限界プロポーションが一致してしまうから、5）式の分子はゼロとなり、「平均代用弾性」がゼロとなることは言うまでもない。

一般に「補完」の場合には、$0 \leqq \Sigma < 1$　となる。

I 財と J 財とが双曲型の「競合」関係にある場合は、すでに述べたように、相対価格が

$$U^*_{ii}/U^*_{ij} \leqq p_i/p_j \leqq U^*_{ij}/U^*_{jj}$$

という正常域の範囲でのみ均衡が成立し、この範囲外では何れか一方の財しか需要されない。すなわち、4）式から明らかなように、相対価格 p_i/p_j が限界プロポーション U^*_{ii}/U^*_{ij} から、もひとつの限界プロポーション U^*_{ij}/U^*_{jj} まで変化する間に、数量比 q_j/q_i はゼロ（$q_j=0$）から無限大（$q_i=0$）まで変化する。つまり価格線の勾配が $-U_{ii}/U_{ij}$ から $-U_{ij}/U_{jj}$ まで変化する間に、数量プロポーションを示す直線は水平から垂直まで 90°回転する。

今度は価格線の回転度数が θ で示される。したがって、相対価格線が均衡成立可能範囲の下限から上限まで $\theta°$ 回転する間に、数量比線は 90° 回転するということで、「平均代用弾性」は

7）　$\sum = 90°/\theta°$

で示されることになる。

上述の理由で、$\theta° < 90°$ だから、競合財に関する平均代用弾性は 1 より大となる。そして、すでに述べたように、完全競合の場合は 2 つの限界プロポーションが一致し、相対価格の正常域が消滅するから、$\theta=0$ であり、平均代用弾性は、相対価格が $U^*_{ii}/U^*_{ij} = p_i/p_j = U^*_{ij}/U^*_{jj}$ であるときに無限大、$\sum=\infty$ となる。

このようにして、競合財については一般に、$1<\sum \leqq \infty$ となる。

I 財と J 財が「独立」である場合は、相対価格が $p_i/p_j=0$ から $p_j/p_i=0$ まで変化する間に、数量比 q_j/q_i は、4）式から明らかなように、ゼロから無限大まで変化する。すなわち価格線が水平から垂直にまで 90°回転する間に、数量比線も水平から垂直にまで 90° 回転する。したがって、「独立」の場合の「平均代用弾性」は

8）　$\sum = 90°/90° = 1$

となる。

以上のように「平均代用弾性」を定義すると、「補完」の場合には相対価格の変化ほどには数量比が変化せず、「競合」の場合は相対価格の変化に数量比が敏感に反応し、「独立」の場合は相対価格の変化と丁度同じだけ数量比が変化することが、$\sum$ の値によって表現されることになる。そればかりでなく、2 財間の補完関係の強さや競合関係の強さが連続的な示度で表現されるという利点があるといえる。

前節の結論と対比すれば、平均代用弾性$\sum$ が 1 より小な「補完」の場合は、交叉価格弾性がつねに負であり；$\sum$ が 1 より大な「競合」の場合は、交叉価格弾性がつねに正である。また、$\sum=1$ という「独立」の場合は、交叉価格弾性がつねにゼロである；というように、平均代用弾性の値が 1 以下か

1以上かという事と、交叉価格弾性が負か正かという事との間に、明瞭な対応関係のあることが確かめられるのである。

また、補完財の場合に、平均代用弾性が1以下だということは、I財価格の相対的上昇（J財価格の相対的下落）ほどにはJ財のI財に対する数量プロポーションが上昇しない、ということだから、I財の金額シェヤーは増え、J財の金額シェヤーは減ることを示唆している。

同様に、独立財の場合は、$\sum=1$だから、両財間の金額シェヤーは不変であり、また競合財の場合に、$\sum>1$だということは、I財価格の相対的上昇（J財価格の相対的下落）が、I財の金額シェヤーを縮小させ、J財の金額シェヤーを増大させること、を示唆している。

上の事は、相対価格（p_i/p_j）の限界的変化に対する数量比（q_j/q_i）の限界的反応についても見ることができる。

いま4)式を

$$\frac{q_j}{q_i}=\frac{p_j U_{ii}^* - p_i U_{ij}^*}{p_i U_{jj}^* - p_j U_{ij}^*}=\frac{U_{ii}^* - \left(\frac{p_i}{p_j}\right) U_{ij}^*}{\left(\frac{p_i}{p_j}\right) U_{jj}^* - U_{ij}^*}$$

と変形して微分すれば

$$9)\quad \frac{d\left(\frac{q_j}{q_i}\right)}{d\left(\frac{p_i}{p_j}\right)}=\frac{U_{ij}^{*2} - U_{ii}^* U_{jj}^*}{\left(\frac{p_i}{p_j} U_{jj}^* - U_{ij}^*\right)^2}$$

を得る。両財が「独立」のときは、$U_{ii}^*=U_{jj}^*=0$ だから、9)式の分母、分子が等しくなって、

$$10)\quad d\left(\frac{q_j}{q_i}\right)/d\left(\frac{p_i}{p_j}\right)=1$$

となる。

9)式右辺の分母を展開して1との大小関係を求めると、

$$9')\quad \frac{\partial(q_j/q_i)}{\partial(p_i/p_j)}=\frac{U_{ij}^{*2} - U_{ii}^* U_{jj}^*}{\left(\frac{p_i}{p_j} U_{jj}\right)^2 - 2\frac{p_i}{p_j} U_{jj} U_{ij} + U_{ij}^2} \gtrless 1$$

すなわち

$$U_{ij}^2 - U_{ii}^* U_{jj}^* \gtrless \left(\frac{p_i}{p_j} U_{jj}^*\right)^2 - 2\frac{p_i}{p_j} U_{jj} U_{ij} + U_{ij}^2$$

すなわち

$$11)\quad U_{jj}^*(2\,p_i\,p_j\,U_{ij} - p_j^2 U_{ii}^* - p_i^2 U_{jj}^*) \gtrless 0$$

となり、「補完」の場合は $U_{jj}^{*} < 0$ だから、

12)　$2\,p_i\,p_j\,U_{ij} - p_j^2\,U_{ii}^{*} - p_i^2\,U_{jj}^{*} \lesseqgtr 0$,

「競合」の場合は $U_{jj}^{*} > 0$ だから、

13)　$2\,p_i\,p_j\,U_{ij} - p_j^2\,U_{ii}^{*} - p_i^2\,U_{jj}^{*} \gtreqless 0$

となるが、効用極大の2階の条件から、12）式、13）式の左辺は正でなければならないから、9′）式から

14)　補完のとき $\dfrac{\partial(q_j/q_i)}{\partial(p_i/p_j)} < 1$;　競合のとき $\dfrac{\partial(q_j/q_i)}{\partial(p_i/p_j)} > 1$

という結果を得る。つまり、相対価格（p_i/p_j）の数量比（q_j/q_i）に与える限界的効果も、「補完財」については1より小、「競合財」については1より大、となる。