慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	異質的期待が資産価格に与える影響
Sub Title	How does the heterogeneity of expectation affect an asset price?
Author	富田, 信太郎(Tomita, Shintaro)
Publisher	慶應義塾大学出版会
Publication year	2015
Jtitle	三田商学研究 (Mita business review). Vol.58, No.4 (2015. 10) ,p.19- 38
JaLC DOI	
Abstract	本稿では, 投資家の持つ情報にバラつきが存在する場合に, それが資産価格にどのように影響するのかを考察している。情報がバラついている場合には, 投資家は異質的期待を形成することになるが, 合理的期待均衡モデルの枠組みに基づき, 資産価格がどのように決まるのかを検討している。モデルでは, 数値例により資産価格変動のボラティリティを計算し, その結果, 多期間を考慮した場合には, 投資家の持つ情報のバラつきがボラティリティに与える影響は小さいものに留まることが示された。このことは, 投資家間の情報格差が存在しないのであれば, 情報のバラつきにより投資家が異質的期待を形成すること自体は, 資産価格の決定にそれほど影響しないことを示唆している。
Notes	論文
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-20151000-0019

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

三田商学研究
第58巻第４号
2015 年 10 月

2015年７月28日掲載承認

異質的期待が資産価格に与える影響

富　田　信太郎

＜要　　約＞
本稿では，投資家の持つ情報にバラつきが存在する場合に，それが資産価格にどのように影響するのかを考察している。情報がバラついている場合には，投資家は異質的期待を形成することになるが，合理的期待均衡モデルの枠組みに基づき，資産価格がどのように決まるのかを検討している。モデルでは，数値例により資産価格変動のボラティリティを計算し，その結果，多期間を考慮した場合には，投資家の持つ情報のバラつきがボラティリティに与える影響は小さいものに留まることが示された。このことは，投資家間の情報格差が存在しないのであれば，情報のバラつきにより投資家が異質的期待を形成すること自体は，資産価格の決定にそれほど影響しないことを示唆している。

＜キーワード＞
異質的期待，資産価格，合理的期待

１．はじめに

金融資産の価格がどのように形成されるのかという問題はファイナンスにおける最も基本的な関心事であり，これまで多くの研究が行われてきた。とりわけ，CAPM は代表的な資産価格理論であり，今日においても証券分析における基本的なツールとなっている。しかし，CAPM における均衡とは，価格は存在するけれども取引が行われない均衡（無取引均衡）であり，到底現実的なものではない。これは，CAPM が同質的期待を前提としていることに起因する。同質的期待のもとでは，資産のリスクとリターンについて，すべての投資家が同一の予想を立てる。例えば，ある資産について「割安」であると考える投資家がその資産を購入しようと思ったとしても，他の投資家も同様の予想をするため，資産を売る主体が現れず，取引が成立しない。その結果，価格は「割安」でない水準まで上昇するが，取引は全く行われないことになる。

現実的には，金融資産は日々取引を伴って価格を変化させる。取引が成立するという事実は，

売り手と買い手の投資家の予想が異なっていることを示唆する。それでは，なぜ投資家の予想が異なるであろうか。合理的な投資家を前提とするのであれば，それは投資家の持つ情報が異なるためであると考えられる。異なる情報を持っているのであれば，投資家の予想はそれぞれ異なるものとなり，結果として投資家間の行動が異なるため取引が成立する。したがって，資産の価格形成においては情報のバラつきを考える必要があろう。本稿では，異なる私的情報に基づき，異質的期待を形成する投資家を想定した場合に資産価格がどのように決定するのかを考えている。

一方で，投資家の投資行動を考えたとき，価格それ自体が投資家の意思決定に影響を及ぼすことは容易に想像ができる。多くの場合，投資家は自身の投資行動を決める際に価格を考慮しており，価格を全く見ずに意思決定を行うことは極めて稀である。価格には市場参加者の平均的な意見が反映されていると考えられており，このことは，資産価格が情報として機能することを示唆する。

価格が情報として機能するという考え方を資産価格の理論に明示的に取り入れた先駆的な研究として，Grossman（1975）の合理的期待均衡モデルがある。合理的期待均衡モデルにおいては，投資家の持つ情報にバラつきが存在する場合，価格は市場参加者の平均的な意見を反映したものとなり，さらにその価格を観察した上で投資家の投資行動が決定される。この考え方は，その後の多くの研究で用いられ，資産の価格形成において非常に重要なものとなっている。

本稿では，合理的期待均衡モデルを前提として，異質的期待を想定する場合に資産価格がどのように決定されるのかを考察する。まず，２節では１資産・１期間の基本的なモデルにおいて，資産価格がどのように決定するのかを理論的に考察し，３節において多資産・多期間の拡張モデルを提示する。その後，４節で数値例によりモデルの特徴を考察する。

２．基本モデル

ここでは，１つのリスク資産を想定した場合の１期間モデルを考えてみる。以下では，Hellwig（1980）や Admati（1985）を参考にした１期間の基本的なモデルを用いて，投資家間で情報のバラつきがある場合に，それがどのように価格に反映され，その価格を投資家がどのように投資行動に反映させるのかを考察する。

（１） 設定

まず，経済には１つの安全資産と１つのリスク資産が存在すると想定する。期首における安全資産の価格は１であるものとし，収益率を r，グロスのリターンを R で表す。これは，安全資産への１単位の投資が期末に $R=(1+r)$ の確実なペイオフをもたらすことを意味する。一方，リスク資産は期末に f のペイオフを生み出すと仮定する[1)]。f は不確実なペイオフであり，平均 $\bar{f}$，分

1） １期間モデルであるので，リスク資産が生み出すペイオフはこれがすべてであり，このペイオフは清算配当のようなものである。したがって，f はこのリスク資産のファンダメンタルズに基づく価値と考えられる。

散 σ_f^2 の正規分布に従うと仮定する。

$$f \sim N(\bar{f}, \sigma_f^2)$$

また，期首におけるリスク資産の価格を p で表す。

経済には合理的投資家（以下，投資家）が存在し，投資家は期首に投資を行い，期末にすべての富を消費するものとする。投資家は連続体として存在するものとし，その合計は1であると仮定する[2)]。また，投資家はCARA型の効用関数を持ち，投資家 $i \in [0,1]$ の期末の富を $w_{1,i}$ で表すとするとき，効用関数を以下のように仮定する。

$$u_i(w_{1,i}) = -\exp(-\theta w_{1,i})$$

ただし，θ はリスク回避度を表すパラメータであり，すべての投資家で一定と仮定する。

各投資家は，それぞれリスク資産の期末ペイオフ f に関する私的情報 z_i を手に入れることができるものとする。この私的情報はノイズを含んだものであり，以下に基づいて発生すると仮定する。

$$z_i = f + \epsilon_{z,i}$$

ただし，$\epsilon_{z,i}$ は平均0，分散 σ_z^2 の正規分布に従う。

投資家 i のリスク資産保有量（需要）を x_i とすると，リスク資産に対する期首における合理的投資家の需要量は x_i をすべての投資家について合計したものとなる。一方で，経済には合理的でない投資家も存在するものと仮定し，以下ではそれをノイズトレーダーと呼ぶことにする。ノイズトレーダーは情報に基づく取引を行うことはなく，リスク資産に対してランダムな需要をもたらす投資家である。ノイズトレーダーの需要は n で表し，n は平均0，分散 σ_n^2 の正規分布に従うものと仮定する[3)]。

単純化のため，リスク資産の供給量を0と仮定する[4)]。したがって，期首においてリスク資産の需給が一致するためには，投資家とノイズトレーダーの需要が合計で0になる必要があり，それを市場清算条件と呼ぶ。価格 p は市場清算条件を満たすように決定される。

2） この仮定は，有限でない投資家を想定する際に有用であり，Spiegel（1998）やWatanabe（2008）などの研究でも用いられている仮定である。微小単位の無数の投資家を想定し，それぞれの投資家の価格に対する影響は無視できるほど小さくなり，それぞれの投資家は価格受容者として振る舞うことになる。

3） ノイズトレーダーの需要についての経済的な意味づけについてはここでは踏み込まない。合理的期待均衡のフレームワークでは，価格に影響を与えるような「ノイズ」が存在しないのであれば，投資家が私的情報に基づいて投資を行うと，それが価格に反映されることで真の価値が完全に明らかになる。しかし，価格を観察するだけで真の価値が判明するのであれば，投資家は投資を自らの私的情報に基づいて行わなくなるという矛盾が生じる。そのため，価格にノイズを含ませるような仕組みが必要となる。この点について，詳しくはGrossman（1975），Grossman and Stiglitz（1980）等を参照されたい。また，このノイズは需要に関するノイズである必要はなく，供給にノイズがあるという想定でも構わない。Hellwig（1980）やAdmati（1985），Spiegel（1998）では，資産の供給にノイズが存在するようなモデルが示されている。

4） リスク資産の供給量を0とする仮定は，一般性を失うことはない。正の供給量を仮定した場合にも，以下の議論は同様である。

また，f，$\epsilon_{z,i}$，n は互いに独立であると仮定する。f，$\epsilon_{z,i}$，n の分布特性は投資家にとっては既知であるものとし，投資家は期首において，それぞれの私的情報とリスク資産の価格を観察することができるものとする。各投資家は自らの私的情報に基づいてリスク資産の保有量を決定するが，それは市場清算条件を通じてリスク資産の価格に反映される。そのため，価格にはすべての投資家の私的情報が集約的に反映されることになるが，個々の投資家はその価格を観察することができる。したがって，意思決定においては自らの私的情報のみならず，価格という全投資家の私的情報が集約された情報も用いて将来のペイオフを予想することになる。このように，各投資家が利用可能な情報をすべて用いて合理的に意思決定する結果として成立する均衡を合理的期待均衡と呼ぶ。[5)]

まず，リスク資産の価格関数を以下のように仮定する。

$$p = a_0 + a_1 \cdot f + a_2 \cdot n \tag{1}$$

均衡における価格には，すべての投資家の私的情報が集約されるため，将来ペイオフの f が含まれる。また，価格は市場清算条件を満たすように決定するため，ノイズトレーダーの需要 n が価格に影響する。そのため，p は f と n の関数となっており，(1) のような線形の価格関数を想定している。

投資家 i のリスク資産保有量を x_i，期首における富を $w_{0,i}$ とすると，期末における富 $w_{1,i}$ は以下のように書ける。

$$w_{1,i} = x_i \cdot q + w_{0,i} \cdot (1 + r)$$

ただし，

$$q = f - p \cdot (1 + r)$$

q は安全資産に対するリスク資産の超過収益を表している。

（2）　投資家の意思決定

以上の設定の下，個々の投資家の意思決定を考える。投資家はそれぞれ，自らの持つ情報の下で，期首時点における期待効用を最大化するようにリスク資産の保有量を決定する。すなわち，以下のような最適化問題を考えることになる。

$$\max_{x_i} \mathrm{E}[-\exp(-\theta w_{1,i}) | z_i \cdot p]$$
$$\text{s. t.} \quad w_{1,i} = x_i q + w_{0,i}(1 + r)$$

確率変数はすべて正規分布するので，$w_{1,i}$ も z_i と p の条件の下で正規分布する。そのため，対数正規分布の特性から，目的関数は以下のように変形できる。

5)　合理的期待と考えるのは，全投資家の私的情報が集約的に反映される結果として，価格が真の将来ペイオフの情報を内包することになるからである。

$$\max_{x_i} \mathrm{E}[w_{1,i}|z_i, p] - \frac{\theta}{2}\mathrm{Var}[w_{1,i}|z_i, p]$$

１階の条件より，リスク資産の最適需要量 x_i^* を求めると以下のようになる。

$$\frac{1}{\theta}\cdot\frac{\mathrm{E}[q|z_i, p]}{\mathrm{Var}[q|z_i, p]} \tag{2}$$

したがって，(2) より，最適なリスク資産保有量は q の条件付き分散と条件付き期待値を求めれば導出できる。$q = f - (1+r)p$ であるから，

$$\mathrm{Var}[q|z_i, p] = \mathrm{Var}[f|z_i, p]$$
$$\mathrm{E}[q|z_i, p] = \mathrm{E}[f|z_i, p] - (1+r)p$$

となる。すなわち，z_i と p の情報の下で f をどのように予測するのかということがリスク資産の保有量を決定することになる。少々煩雑な計算により $\mathrm{Var}^{-1}[f|z_i, p]$，$\mathrm{E}[f|z_i, p]$ を計算すると以下のようになる。

$$\mathrm{Var}^{-1}[f|z_i, p] = \sigma_f^{-2} + \sigma_z^{-2} + a_1^2 a_2^{-2}\sigma_n^{-2} = \sigma_q^{-2}$$
$$E[f|z_i, p] = \bar{f} + \sigma_q^2\{\sigma_z^{-2}(z_i - f) + a_1 a_2^{-2}\sigma_n^{-2}(p - E(p))\}$$

（３） 価格関数の導出

以上のように，投資家の意思決定においては，それぞれの主体均衡として最適なリスク資産の需要量を求めることができる。均衡においては，市場清算条件が満たされるように価格が決定することになるため，すべての投資家の需要量とノイズトレーダーの需要量の合計が 0 となるような価格関数を考えれば良い。市場清算条件は以下のようになる。

$$\int_0^1 x_i^* d_i + n = 0 \tag{3}$$

これを満たすように，a_0，a_1，a_2を求める。

投資家の合計は 1 であるため，大数の法則により，私的情報 z_i が集計化されると平均値である f に一致する。このことに注意して(3)を書き直すと，以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\theta}\sigma_q^{-2}\,[\{(1-\sigma_q^2\sigma_z^{-2}-\sigma_q^2 a_1^2 a_2^{-2}\sigma_n^{-2})\bar{f} - (1+r)a_0\\ &+\{\sigma_q^2\sigma_z^{-2}+\sigma_q^2 a_1^2 a_2^{-2}\sigma_n^{-2} - (1+r)a_1\}f\\ &+\{\sigma_q^2 a_1 a_2^{-1}\sigma_n^{-2} - (1+r)a_2 + \theta\sigma_q^2\}n] = 0\end{aligned} \tag{4}$$

(4)がすべての f と n について成り立つためには，それぞれの係数が 0 である必要がある。
これより，a_0，a_1，a_2を計算すると以下のようになる。

$$a_0 = \frac{1}{1+r}\sigma_q^2\sigma_f^{-2}\bar{f} \tag{5}$$

$$a_1 = \frac{1}{\theta(1+r)}\sigma_z^{-2}\left(\frac{1}{\theta}\sigma_q^2\sigma_z^{-2}\sigma_n^{-2} + \theta\sigma_q^2\right) \tag{6}$$

$$a_2 = \frac{1}{1+r}\left(\frac{1}{\theta}\sigma_q^2\sigma_z^{-2}\sigma_n^{-2} + \theta\sigma_q^2\right) \tag{7}$$

したがって，均衡においては(5)，(6)，(7)のような係数を持つ価格関数が成り立つことがわかる。

3．多期間・多資産のモデル

1期間・1資産の基本的なモデルでは，時間を通じた価格変動や資産間の連動性などについては考慮することはできない。そのため，研究の方向性として多期間・多資産へ拡張することを試みることは自然な流れであろう。これまでにも，いくつかの研究で，そのような試みがなされている。Admati（1985）では，1期間モデルの枠組みで複数の資産を考慮したモデルを展開しており，Spiegel（1998）はさらにそれを拡張させる形で多期間・多資産のモデルを展開している。ただし，Spiegel（1998）では，世代交代モデルを用いており，投資家は1期間ごとに世代交代すると想定されているため，多期間のモデルではあるものの，事実上，投資家は1期間の意思決定を行っているに過ぎない。一方，Wang（1994）では，1資産のモデルを用いて，多期間を通じて投資家の動学的な意思決定を考慮したモデルを展開している。ここでは，以上の研究を参考にして，多期間・多資産のモデルへの拡張を考える。

（1） 設定

1つの安全資産と k 個のリスク資産が存在する経済を想定する。基本モデルと同様に，安全資産の収益率は r（グロスでは R）であり，すべての期間で一定であると仮定する。t 時点におけるリスク資産の価格ベクトルを $\boldsymbol{p}_t$ で表す。また，それぞれのリスク資産は毎期に配当を生み出すものと仮定する。t 時点の配当ベクトルを $\boldsymbol{d}_t$ で表し，$\boldsymbol{d}_t$ は以下の確率過程に従うとする。

$$\boldsymbol{d}_t = \boldsymbol{f}_t + \boldsymbol{\epsilon}_{d,t}$$
$$\boldsymbol{f}_t = \boldsymbol{f}_{t-1} + \boldsymbol{\epsilon}_{f,t}$$

ここで，$\boldsymbol{f}_t$ は t 時点におけるファンダメンタルズを表す値のベクトルであり，リスク資産の本源的な価値を決めるものである。$\boldsymbol{\epsilon}_{d,t}$ と $\boldsymbol{\epsilon}_{f,t}$ はそれぞれ確率変数の $k\times1$ のベクトルであり，平均 $\mathbf{0}$，共分散はそれぞれ $\boldsymbol{\Sigma}_d$，$\boldsymbol{\Sigma}_f$ の正規分布に従う。経済に存在する主体は t 時点において，$\boldsymbol{d}_t$ を観察することは可能であるが，$\boldsymbol{f}_t$，$\boldsymbol{\epsilon}_{d,t}$，$\boldsymbol{\epsilon}_{f,t}$ を観察することは不可能であるとする。すなわち，リスク資産の配当はファンダメンタルズに依存して確率的に発生し，その値も時間を通じて確率的に変動することを仮定している。経済主体は，ファンダメンタルズの値自体を観察することはでき

ないが，それに連動して発生する配当にはその情報がノイズとともに含まれていることになる。

投資家はCARA型の効用関数を持つと仮定する。基本モデルの場合とは異なり，多期間を想定しているため，投資家は将来のすべての期間を考慮する必要があり，以下のような期待効用を最大化するように意思決定を行う。

$$\mathrm{E}_{t,i}\left[-\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{s}\exp(-\theta c_{t+s,i})\right]$$

ただし，$\mathrm{E}_{t,i}[\cdot]$はt時点における投資家iの情報に基づく条件付き期待値の演算子を意味し，$c_{t+s,i}$は$t+s$時点の消費，βは割引ファクター，θはリスク回避度を表す。

また，投資家は毎期に$\boldsymbol{f}_t$に関するノイズを含んだ私的情報を得るものとする。t時点における私的情報のベクトルを$\boldsymbol{z}_{t,i}$で表すと，$\boldsymbol{z}_{t,i}$は以下のようなプロセスで発生すると仮定する。

$$\boldsymbol{z}_t=\boldsymbol{f}_t+\boldsymbol{\epsilon}_{z,t,i}$$

ただし，$\boldsymbol{\epsilon}_{z,t,i}$は平均$\mathbf{0}$，共分散$\boldsymbol{\Sigma}_z$の正規分布に従う確率変数のベクトルである。

基本モデルと同様，経済にはノイズトレーダーも存在すると仮定し，そのt時点におけるリスク資産の保有量（需要量）を$\boldsymbol{n}_t$で表す。$\boldsymbol{n}_t$は以下のようなプロセスに従うと仮定する。

$$\boldsymbol{n}_t=\boldsymbol{n}_{t-1}+\boldsymbol{\epsilon}_{n,t}$$

$\boldsymbol{\epsilon}_{n,t}$は平均$\mathbf{0}$，共分散$\boldsymbol{\Sigma}_n$の正規分布に従う確率変数のベクトルである。$\boldsymbol{n}_t$と$\boldsymbol{\epsilon}_{n,t}$は投資家にとって観察不可能であるとする。また，$\boldsymbol{\epsilon}_{d,t}$，$\boldsymbol{\epsilon}_{f,t}$，$\boldsymbol{\epsilon}_{z,t,i}$，$\boldsymbol{\epsilon}_{n,t}$の分布については投資家にとって既知であるものとし，それぞれ互いに独立で，時系列的にも相関を持たないと仮定する。

t時点における投資家のリスク資産保有量のベクトルを$\boldsymbol{x}_{t,i}$で表し，基本モデルのときと同様にリスク資産の供給量ベクトルは$\mathbf{0}$であると仮定する。市場清算条件は以下のように書くことができる。

$$\int_0^1 \boldsymbol{x}_{t,i}\,d_i+\boldsymbol{n}_t=\mathbf{0} \tag{8}$$

したがって，t時点においては(8)を満たすようにリスク資産の価格が決定することになる。

リスク資産の価格関数については，基本モデルと同様，線形の価格関数を想定し，以下のように仮定する。

$$\boldsymbol{p}_t=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{f}_t+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{n}_t$$

ここで，$\boldsymbol{a}_0$は$k\times 1$のベクトル，$\boldsymbol{A}_1$と$\boldsymbol{A}_2$はそれぞれ，$k\times k$の行列である。また，投資家iのt時点における富を$w_{t,i}$で表すとすると，以下のように書ける。

$$w_{t+1,i}=\boldsymbol{x}'_{t,i}\boldsymbol{q}_{t+1}+R(w_{t,i}-c_{t,i})$$

ただし，

$$\boldsymbol{q}_{t+1}=\boldsymbol{p}_{t+1}+\boldsymbol{d}_t-R\boldsymbol{p}_t$$

であり，$\boldsymbol{q}_{t+1}$はt時点から$t+1$時点までの各資産の超過収益を表すベクトルである。

以上のような設定で，均衡価格がどのように決定するのか考える。基本モデルでは期末における最終的なペイオフが明らかになることを想定していたが，多期間におけるモデルにおいては永続的に続く経済を想定しているため，資産のファンダメンタルズの値が明らかになることはなく，資産からのペイオフはファンダメンタルズに基づいて確率的に生じることを想定している。投資家は資産からのペイオフや自らの持つ私的情報，資産価格を観察することで，異なる予想を形成することになり，それは最終的に資産価格に反映されることになる。

（2） 投資家による予測

t時点において投資家が観察することのできる情報は，$\boldsymbol{d}_t$，$\boldsymbol{z}_{t,i}$，$\boldsymbol{p}_t$のみであり，$\boldsymbol{f}_t$や$\boldsymbol{n}_t$は観察することができない。そのため，投資家はまず観察可能な情報から$\boldsymbol{f}_t$や$\boldsymbol{n}_t$を推測することになる。差し当たって，$\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$は所与であるものとして考える。$\boldsymbol{\pi}_t\equiv\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{f}_t+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{n}_t$と定義すると，$\boldsymbol{p}_t$の情報を持つことは，$\boldsymbol{\pi}_t$の情報を持つことに等しい。ここで，以下のように変数を定義する。

$$\boldsymbol{\lambda}'_{t,i}\equiv[\boldsymbol{d}'_t\ \boldsymbol{z}'_{t,i}\ \boldsymbol{\pi}'_t]$$
$$\boldsymbol{\xi}'_t\equiv[\boldsymbol{f}'_t\ \boldsymbol{n}'_t]$$
$$\boldsymbol{\epsilon}'_{t,i}\equiv[\boldsymbol{\epsilon}'_{d,t}\ \boldsymbol{\epsilon}'_{f,t}\ \boldsymbol{\epsilon}'_{z,t,i}\ \boldsymbol{\epsilon}'_{n,t}]$$

すなわち，$\boldsymbol{\lambda}_{t,i}$は投資家が$t$時点で手に入れる情報のベクトル，$\boldsymbol{\xi}_t$は予測するべき変数のベクトル，$\boldsymbol{\epsilon}_{t,i}$は付随するノイズのベクトルである。投資家がどのような予想を形成するのかについては，以上の変数を使って，以下のようなフィルタリング問題を考えれば良い。

$$\boldsymbol{\xi}_{t+1}=\boldsymbol{\xi}_t+\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{\epsilon}_{t+1,i}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{t,i}=\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\xi}_t+\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{\epsilon}_{t,i}$$

ただし，$\boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{H}_2$，$\boldsymbol{H}_3$はそれぞれ，$2k\times4k$，$3k\times2k$，$3k\times4k$の行列である。

t時点での変数の予測値ベクトルをそれぞれ，$\hat{\boldsymbol{f}}_{t,i}$，$\hat{\boldsymbol{n}}_{t,i}$で表し，$\hat{\boldsymbol{\xi}}'_{t,i}\equiv[\hat{\boldsymbol{f}}'_{t,i}\quad\hat{\boldsymbol{n}}'_{t,i}]$とすると，投資家の予測は以下のような更新式に基づいて更新される。

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t,i}=\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t-1,i}+\boldsymbol{G}^*(\boldsymbol{\lambda}_{t,i}-\boldsymbol{H}_2\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t-1,i}) \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{G}^*$は定常カルマンゲインであり，$2k\times3k$の行列である。(9)の導出については補論を参照されたい。

(9)は各投資家が手に入れた情報を用いて，観察できない変数をどのように予測するのかを表

している。各時点において，投資家は観察できない変数について予想を形成しているが，次の時点において新たな情報がもたらされると，(9) のような更新式に基づいて予想を変化させる。予測に利用する情報には，リスク資産からのペイオフや資産価格など，すべての投資家が同じものを観察するという意味で「公的」な情報を含んでいる一方で，ファンダメンタルズに関する「私的」な情報も含まれている。この私的情報の存在により，各投資家の予想はそれぞれ異なってくるため，意見のバラつきが生まれ，資産の取引が成立する。

（3） 均衡

利用可能な情報に基づいた予測が得られたならば，後は基本モデルのときと同様，期待効用を最大化させるように投資の意思決定を考えれば良い。ただし，基本モデルのときとは異なり，多期間の意思決定を考える必要がある点には注意が必要である。投資家は静学的な意思決定ではなく，動学的な意思決定を行わなければならず，すべての期間を通して期待効用を最大化するようなリスク資産の保有量と消費額を決定する必要がある。そして，各時点において市場精算条件を満たすようにリスク資産の価格が決定する。

線形の価格関数を想定して，資産に対する需給を均衡させるような価格を考えると，以下のようになる。

$$\boldsymbol{p}_t = \frac{1}{r}\boldsymbol{f}_t + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{n}_t \tag{10}$$

$\boldsymbol{A}_2$が満たすべき条件や，(10)の価格関数が解であることについては補論を参照されたい。この均衡における価格関数が示していることは，非常に単純なものである。第一に資産価格は $\boldsymbol{n}_t$ と $\boldsymbol{f}_t$ に依存して決まるということである。資産価格は市場精算条件を満たしているため，投資家の需要量とノイズトレーダーの需要量が反映される。そのため，$\boldsymbol{n}_t$ が資産価格に影響することは容易に想像できる。一方で，投資家はそれぞれ自らの予想に基づいて需要量を決めることになるが，それぞれの情報が異なっているため，需要量も投資家によって異なる。しかし，基本モデルの場合と同様に，合理的な投資家による予測は集計化されることで真の値に収束するため，資産価格は真のファンダメンタルズを反映したものとなる。

２つ目にファンダメンタルズを表す変数の係数が$\frac{1}{r}$となることである。これは，１期間モデルとは異なり，無限期間のモデルを考えているため，将来的にもたらされる永続的なキャッシュフローの価値が反映されていると考えられる。モデルにおいては，各時点で資産から配当が発生し，その配当はその時点のファンダメンタルズに依存して発生する。仮に不確実性が全く存在しないのであれば，配当はファンダメンタルズと完全に一致し，ファンダメンタルズはすべての時点で一定となるため，$\boldsymbol{f}_t$ の配当が永続的に支払われることになる。実際には，配当は$\boldsymbol{f}_t$ の周りにノイズを伴って確率的に発生するが，そのノイズの期待値は０である。また，ファンダメンタルズ自体も時間を通して確率的に変化していくが，その変化をもたらすノイズも期待値は０である。したがって，$\boldsymbol{f}_t$ が与えられた条件の下では，将来のどの時点の配当についてもその期待値は$\boldsymbol{f}_t$ で一

定となる。

この特徴を逆説的に考えると，モデルの中に組み込んでいるノイズの影響は，最初の項の係数には影響せず，専ら２つ目の項の係数にのみ影響を及ぼすということである。この点は基本モデルとは対照的な帰結であろう。基本モデルにおいては，期末におけるペイオフがファンダメンタルを表す変数に対応するが，(6) からも明らかなように，係数にはノイズの影響が入り込む。１期間モデルにおいては，終了時点で明らかになるペイオフが投資家の意思決定において非常に重要であり，その実現値を左右するようなノイズの影響が強く働く。一方，無限期間を想定したモデルでは，ファンダメンタルズの変数に依存してペイオフがノイズを伴って発生するが，ノイズは平均的には０であり，無限期間を考慮した場合にはその影響がなくなる。

４．数値例による価格変動の分析

以上のような多期間のモデルを考えることにより，各時点で資産価格がどのように決まるのかについて考えることができる。ここでは，時間を通じて価格がどのように変動するのかを考える。$t-1$ 時点から t 時点にかけての価格の変化は以下のように書くことができる。

$$\boldsymbol{\Delta p}_t \equiv \boldsymbol{p}_t - \boldsymbol{p}_{t-1}$$

(10) の価格関数を使って，価格変化の分散共分散を計算すると以下のように表すことができる。

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta p} = \frac{1}{r}\boldsymbol{\Sigma}_f + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\Sigma}_2\boldsymbol{A}_2' \tag{11}$$

モデルのパラメータの変化が資産価格のボラティリティにどのような影響を与えるのかについては，(11) を計算することで考えることができる。まず，リスク資産が１つである場合を考えよう。リスク資産が１つであるので，ノイズの分散はスカラーで表され，それぞれ，σ_n^2，σ_d^2，σ_f^2，σ_z^2 で表すものとする。モデルにおけるパラメータについては $r=0.05$，$\beta=0.95$，$\theta=1.0$ として計算する。

ベンチマークケースを考える上では，Cho and Krishnan（2000）を参考にしている。Cho and Krishnan（2000）では，S&P500先物のデータを用いて，Hellwig（1980）のモデルにおけるパラメータを推計している。その結果，最終的なペイオフの標準偏差が5.495，私的情報の標準偏差が12.541と推計している。この研究結果を踏まえ，本稿では $\sigma_d = \sigma_f = 3.886$，$\sigma_z = 12.541$ を与えている。[6] 一方で，σ_n に関しては参考となる値が存在しない。そのため，少し恣意的ではあるが，ベンチマークケースでは $\sigma_n = 0.001$ を与えている。[7] σ_n を小さく設定するということは，経済に対するノイズトレーダーの影響が軽微であることを意味し，資産価格に主として影響を与えるの

6） Hellwig（1980）のモデルは１期間モデルであるため，推計されたパラメータは本稿の基本モデルにおける σ_f と σ_z に対応している。多期間のモデルにおいては，ファンダメンタルズの変数は ϵ_d と ϵ_f の影響を受けるので，$\sigma_d^2 = \sigma_f^2 = 5.495^2/2$ となるように値を与えている。

はファンダメンタルズであることを想定しているといえる。

図１から図４はモデルの中における各ノイズの標準偏差が変化した時に資産価格のボラティリティにどのように影響するのか示している。これを見ると，それぞれのノイズについて，標準偏差が大きくなるにつれて，資産価格のボラティリティも大きくなっている。とりわけ，σ_fとσ_nは資産価格のボラティリティに対して大きな影響力を持つ。ボラティリティの計算式からも明らかなように，この２つの変数はボラティリティに直接影響を与えるため，その効果が強く働いていると考えられる。一方で，σ_dやσ_zのボラティリティに対する影響は小さい。σ_dとσ_zの場合には，ボラティリティに直接影響を与えるわけではなく，σ_nの係数であるA_2を通して間接的な影響を与えるのみである。そのため，影響が小さくなると考えられる。

留意すべき点として，このモデルでは投資家が取得する私的情報が異なるという意味で情報のバラつきを考慮しているが，情報の非対称性を考慮しているわけではないということがある。なぜなら，私的情報はすべての投資家について同様の分布から発生しており，事前段階における情報の質に違いはないからである。すなわち，すべての投資家は同様に確からしい私的情報を受け取るのであり，意思決定に際して利用可能な情報量に格差があるとは言えないため，情報優位の投資家は存在しないのである。

投資家の持つ私的情報は均衡において集計化されて資産価格に反映されるため，資産価格はファンダメンタルズの情報を正確に含むようになるが，投資家は自らの持つ私的情報が他者よりも優れているとは考えないため，投資の意思決定における私的情報の価値はそれほど大きくはない。端的に言えば，資産の本質的な価値を推測する上では，私的情報よりも資産価格を重要視することになる。これを反映して，私的情報に付随するノイズが資産価格に与える影響は非常に小さいものとなっており，価格形成において私的情報の重要性が低いことがわかる。このことは，情報量の格差という意味での情報の非対称性が存在しない想定の下では，たとえ投資家が異なる情報を持っていたとしても，それは価格にそれほど影響しないことを示唆している。[8)]

以上のことから，情報格差が存在しない場合には，異質的期待を想定したとしても資産価格の変動はそれほど影響を受けない。したがって，私的情報が投資家の意思決定において重要となるのは，情報の非対称性が存在している場合であろう。情報の非対称性を考慮した研究はこれまでにも数多く存在している。例えば，Wang（1994）のモデルでは，私的情報を持つ者と持たない者の２種類の投資家を想定して，情報の非対称性が与える影響を考えている。その場合には，情報優位の投資家が自らの情報を利用することで情報劣位の投資家との取引を有利にできるため，私的情報がより高い価値を持つようになる。本稿のモデルにおいても，保有する情報量が異なる

7） このようにな小さな値を想定する理由の１つにShiller（1981）の研究がある。Shiller（1981）では，1871年から1979年のS&Pのデータを用いて価格変化のボラティリティが25.24であることを指摘しているが，本稿のモデルにおいて，そのようなボラティリティを得るためには，かなり小さなσ_nを想定する必要がある。さらに，大きなσ_nを想定すると，モデルが収束しないという問題も生じる。

8） このことは，ノイズトレーダーの影響が軽微であることを前提としている。すなわち，資産価格が主にファンダメンタルズを反映して決定するような場合には，投資家の情報にバラつきが存在しているとしても大きな影響はない。しかし，ノイズトレーダーの影響が非常に大きい場合には，A_2を通して与える間接的な影響が非常に大きくなる可能性はある。

図 1　σ_n と価格のボラティリティ

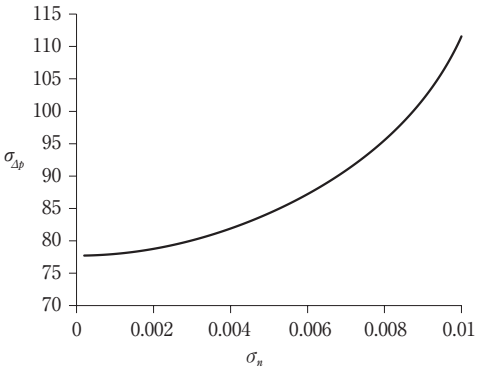


図 2　σ_d と価格のボラティリティ

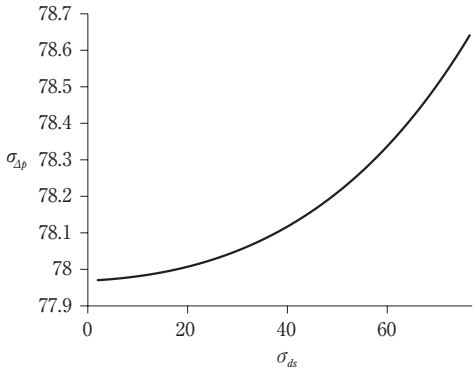


図 3　σ_f と価格のボラティリティ

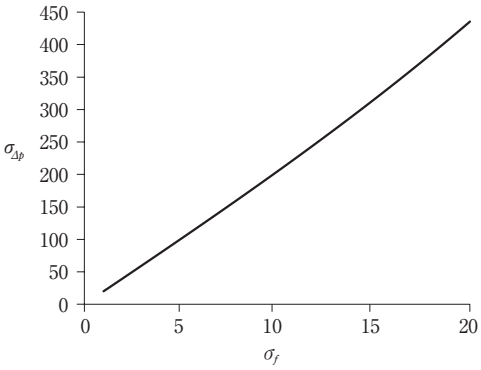
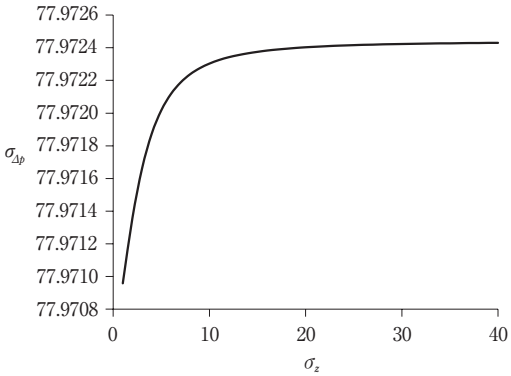


図 4　σ_z と価格のボラティリティ



タイプの投資家を考慮に入れてモデルを構築することは可能であり，情報の非対称性をモデルに導入することでさらなる精緻化をする必要があろう。この点は今後の課題である。

また，本稿のモデルは複数資産を想定しているため，それぞれの資産価格がどのように連動するのかを考えることも興味深い問題であろう。モデルにおけるそれぞれの資産は，ノイズの共分散構造によって互いに影響を与え合うものとなっている。そのため，当然ながら，各ノイズの共分散が 0 である場合には，資産価格に連動性は生じないが，ノイズに相関が存在する場合には，それが資産価格の連動性にどのように影響するのかを計算することができる。単純化のため，2 つの資産が存在する場合を想定し，以下のようなノイズを考える。

$$\boldsymbol{\Sigma_j} \equiv \sigma_j^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_j \\ \rho_j & 1 \end{bmatrix}$$

ただし，$j \in \{d, f, z, n\}$ である。つまり，ノイズはそれぞれの資産について分散が等しく，相関係数が ρ_j となっていることを仮定している。ρ_j が 0 であるならば，一方の資産に関連するノイズは他方の資産のノイズには影響せず，それぞれ独立に発生することになる。

図５から図８までは，それぞれの相関係数が変化した場合に，⑾から価格のボラティリティの相関係数（$\rho_{\Delta p}$）を計算したものである。なお，計算においては，対象となるノイズ以外のノイズの相関係数は０としている。これを見ると，どのノイズについても相関が高まるにつれて資産価格のボラティリティの相関も高まることが観察される。また，σ_n と σ_d については，標準偏差の水準が大きくなるにつれてその影響は強くなり，それに対して，σ_z は水準が大きくなるにつれてその影響が弱まる。σ_z は私的情報に関するノイズであり，その標準偏差が大きいということは私的情報の信頼性が小さいことを意味するため，資産価格に対する影響も小さくなるということであろう。ただし，σ_d と σ_z については，価格ボラティリティの相関に対する影響自体が極めて軽微である。情報の非対称性が存在しない場合には，これらのノイズのボラティリティに与える影響がそもそも小さいことを反映していると考えられる。σ_f については，相関が高まるほど価格ボラティリティの相関も高まっており，その効果も非常に強いものである。このノイズは資産のペイオフに永続的に影響するものであるため，その相関が高い場合には，価格の連動性も高まることは納得的であろう。そして，この結果については，σ_f の水準にほとんど影響を受けない。

５．結論

本稿では，合理的期待均衡の考え方に基づき，多期間・多資産のモデルを用いて資産価格がどのように決定されるのかを考察している。モデルでは，投資家間の持つ情報が異なることを想定するため，各投資家は異質的期待を形成することになり，結果として，市場において資産の取引が行われる均衡をもたらしている。この点はCAPMに代表される同質的期待の下での取引のない均衡との特徴的な違いである。しかし，たとえ異質的期待を導入したとしても，情報の非対称性を想定しない場合には，投資家の持つ私的情報の影響は小さいものに留まる。これは，情報面での優位性を持つ投資家が存在しないことにより，投資家が意思決定に際して自らの持つ私的情報にあまり価値を見出さないことを反映している。このことは，裏を返せば，情報の問題が資産価格に与える影響を考える上では情報の非対称性を考慮する必要があることを示唆する。

また，多資産を考慮したモデルを想定することで異なる資産間における双方向の影響を考察することも可能である。この観点からは，様々な分析の方向性が考えられる。例えば，複数資産のモデルにおいて，それぞれの資産を１つの市場と考え，ある市場でのショックが他の市場にどのように波及するのかを考えることや，新規株式公開などにより新たな資産が登場することが他の資産の価格形成にどのように影響するのかを考えることも可能かもしれない。また，多期間の動学的な意思決定を考慮していることから，観察可能な情報に対する一時的なショックと永続的なショックが時間を通じてどのように市場で認識されていくのかを考察するといった分析が可能かもしれない。以上のような分析は今後の方向性として非常に興味深いものであろう。

図５　ρ_n とボラティリティの相関

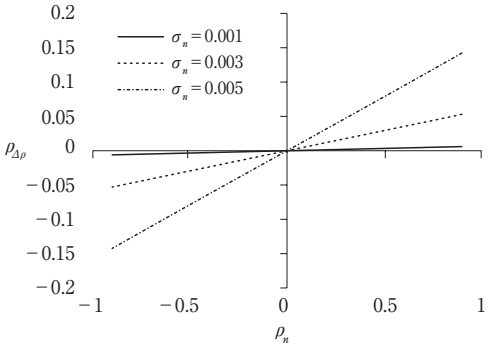


図６　ρ_d とボラティリティの相関

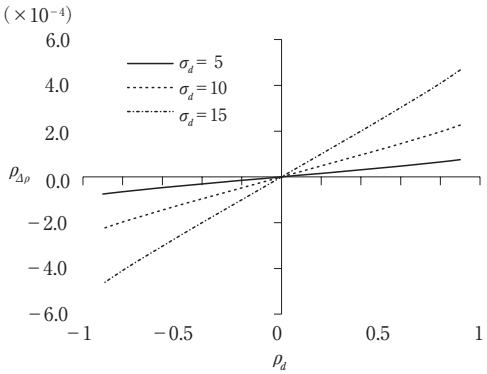


図７　ρ_f とボラティリティの相関

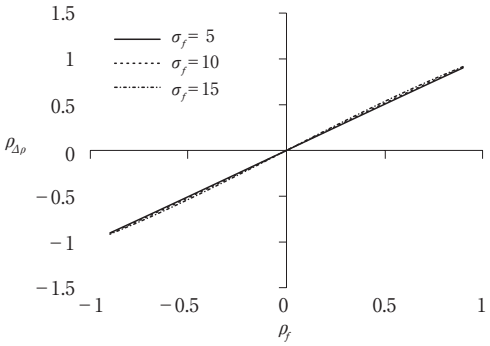
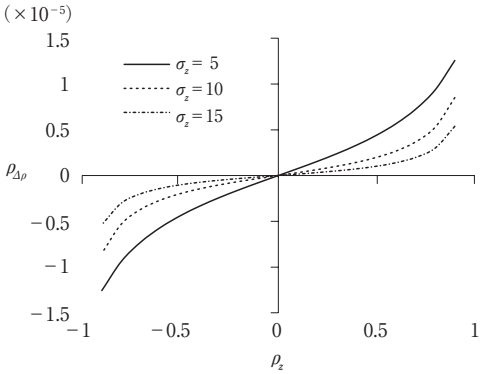


図８　ρ_z とボラティリティの相関



補論

（１）　変数の予測

以下のようなフィルタリング問題を考える。

$$\boldsymbol{\xi}_{t+1} = \boldsymbol{\xi}_t + H_1 \boldsymbol{\epsilon}_{t+1,i} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{t,i} = H_2 \boldsymbol{\xi}_t + H_3 \boldsymbol{\epsilon}_{t,i} \tag{13}$$

$\boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{H}_2$，$\boldsymbol{H}_3$はそれぞれ，$2k \times 4k$，$3k \times 2k$，$3k \times 4k$ の行列であり，以下のように定義される。

$$\boldsymbol{H}_1 \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_2 \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_3 \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

ただし，ここでの $\boldsymbol{0}$ は $k \times k$ の零行列を表し，$\boldsymbol{I}$ は $k \times k$ の単位行列を表す。投資家 i の t 時点における事前推定値を $\hat{\xi}_{t,i}^{-}$，事後推定値を $\hat{\xi}_{t,i}$ で表すものとする。まず，以下のような線形予測器を考える。

$$\hat{\xi}_{t,i} = \boldsymbol{K}_t \hat{\xi}_{t,i}^{-} + \boldsymbol{G}_t \lambda_{t,i} \tag{14}$$

$\boldsymbol{G}_t$ はカルマンゲインであり，$\boldsymbol{K}_t$ と $\boldsymbol{G}_t$ はそれぞれ，$2k \times 2k$，$2k \times 3k$ の行列である。

事後推定誤差と事前推定誤差を以下のように定義する。

$$\tilde{\xi}_{t,i} \equiv \xi_t - \hat{\xi}_{t,i}$$
$$\tilde{\xi}_{t,i}^{-} \equiv \xi_t - \hat{\xi}_{t,i}^{-}$$

ここで，直交性の原理より，

$$\mathrm{E}\left[\tilde{\xi}_{t,i} \cdot \lambda_{s,i}'\right] = \boldsymbol{0} \quad (s = 1, 2, \cdots, t-1)$$

が成り立つ。これは過去の情報は現在の予測誤差を説明しないことを意味している。つまり，過去の情報はすべて現在の予測に利用され尽くされているため，直交しているはずだということである。この条件より，計算して整理すると以下を得る。

$$\boldsymbol{K}_t = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}_t \boldsymbol{H}_2 \tag{15}$$

(15) を (14) に代入すると以下のようになる。

$$\hat{\xi}_{t,i} = \hat{\xi}_{t,i}^{-} + \boldsymbol{G}_t (\lambda_{t,i} - \boldsymbol{H}_2 \hat{\xi}_{t,i}^{-})$$

ここで，$t-1$ 時点までの情報に基づく $\lambda_{t,i}$ の事前推定値を $\hat{\lambda}_{t,i}^{-}$ とすると，(13) より以下のようになる。

$$\hat{\lambda}_{t,i}^{-} = \boldsymbol{H}_2 \hat{\xi}_{t,i}^{-}$$

出力予測誤差を以下のように定義する。

$$\hat{\lambda}_{t,i} = \lambda_{t,i} - \hat{\lambda}_{t,i}^{-}$$

直交性の原理より，事後推定誤差は過去の情報から求められる推定値とは直交しているはずであるので，以下が成り立つ。

$$\mathrm{E}\left[\tilde{\xi}_{t,i} \cdot (\hat{\lambda}_{t,i}^{-})'\right] = \mathrm{E}\left[\tilde{\xi}_{t,i} \cdot (\tilde{\lambda}_{t,i}^{-})'\right] = \mathbf{0}$$

この条件より，代入して整理すると以下のようになる。

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}_t \boldsymbol{H}_2)\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t}^{-}\boldsymbol{H}_2' = \boldsymbol{G}_t \boldsymbol{H}_3 \boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon} \boldsymbol{H}_3' \tag{16}$$

ここで，$\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t}^{-}$と $\boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon}$ はそれぞれ，事前推定誤差 $\tilde{\xi}_{t,i}^{-}$の共分散行列と $\epsilon_{t,i}$ の共分散行列である。$\boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon}$ については以下のとおりである。

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon} \equiv \mathrm{E}[\epsilon_{t,i} \cdot \epsilon_{t,i}'] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\Sigma}_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Sigma}_n \end{bmatrix}$$

(16) より，$\boldsymbol{G}_t$ について以下を得る。

$$\boldsymbol{G}_t = \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t}^{-}\boldsymbol{H}_2'(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t}^{-}\boldsymbol{H}_2' + \boldsymbol{H}_3\boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon}\boldsymbol{H}_3')^{-1} \tag{17}$$

また，事後推定誤差の共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t}$で表す。

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t} \equiv \mathrm{E}[\tilde{\xi}_{t,i} \cdot \tilde{\xi}_{t,i}']$$

今，$\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t-1}$は得られているものとして，$\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t}^{-}$の予測を考える。(12) より事前推定値について，$\hat{\tilde{\xi}}_{t,i}^{-} = \hat{\tilde{\xi}}_{t-1,i}$である。これより，事前推定誤差は以下のとおり。

$$\tilde{\xi}_{t,i}^{-} = \tilde{\xi}_{t-1,i} + \boldsymbol{H}_1 \epsilon_{t,i}$$

これを用いて，事前推定誤差の共分散を計算すると以下のようになる。

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t}^{-} = \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t-1} + \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon} \boldsymbol{H}_1' \tag{18}$$

この更新式により，$t-1$ 時点の事後推定誤差の共分散から t 時点の事前推定誤差の共分散を推定することができる。次に，$\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t}^{-}$から $\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t}$への更新を考える。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t} &\equiv \mathrm{E}[\tilde{\xi}_{t,i} \cdot \tilde{\xi}_{t,i}'] \\ &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}_t \boldsymbol{H}_2)\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\xi},t}^{-} \end{aligned} \tag{19}$$

(18) と (19) により，各時点の推定誤差の共分散を予測可能となる。

$\lambda_{t,i}$ が定常確率過程であると仮定すると，定常状態におけるカルマンフィルターを考えることができる。(17) と (19) を (18) に代入し，定常状態のおいては，事前推定誤差の共分散行列は時点によらず一定値となるので，$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi}}^{-} = \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi},t}^{-} = \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi},t-1}^{-}$であることに注意すると，以下のリカッチ方程式を得る。

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi}}^{-} = \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi}}^{-} - \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi}}^{-}\boldsymbol{H}_2'(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi}}^{-}\boldsymbol{H}_2' + \boldsymbol{H}_3\boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon}\boldsymbol{H}_3')^{-1}\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi}}^{-} + \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon}\boldsymbol{H}_1' \tag{20}$$

(20)の正定値解を $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi}}^{-*}$ とすると，定常状態のカルマンゲイン $\boldsymbol{G}^*$は以下のようになる。

$$\boldsymbol{G}^* = \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi}}^{-*}\boldsymbol{H}_2'(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi}}^{-*}\boldsymbol{H}_2' + \boldsymbol{H}_3\boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon}\boldsymbol{H}_3')^{-1}$$

したがって，定常状態におけるカルマンフィルターによる更新式として以下を得る。

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t,i} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t-1,i} + \boldsymbol{G}^*(\lambda_{t,i} - \boldsymbol{H}_2\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t-1,i})$$

（2） 価格関数の導出

まず，以下を定義する。

$$\boldsymbol{\phi}_{t,i}' \equiv [1 \quad \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t,i}']$$
$$\boldsymbol{\upsilon}_{t+1,i}' \equiv [\boldsymbol{\xi}_{t,i}' \quad \boldsymbol{\epsilon}_{t+1,i}']$$

定義より，投資家 i の t 時点における情報に基づく $\boldsymbol{\upsilon}_{t+1,i}$ の期待値は $\mathbf{0}$ である。

$$\mathrm{E}_{t,i}[\boldsymbol{\upsilon}_{t+1,i}] = \mathbf{0}$$

t 時点の情報に基づく $\boldsymbol{\upsilon}_{t+1,i}$ の共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{\upsilon}$ は以下のようになる。

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\upsilon} \equiv \mathrm{E}_{t,i}[\boldsymbol{\upsilon}_{t+1,i}\cdot\boldsymbol{\upsilon}_{t+1,i}'] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi}}^{-*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{\epsilon} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\xi}}^{-*}$ は (20) の正定値解である。ここで，(9) より，$\boldsymbol{\phi}$ を用いて以下のように書くことができる。

$$\boldsymbol{\phi}_{t+1,i} = \boldsymbol{\phi}_{t,i} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{\upsilon}_{t+1,i} \tag{21}$$

ただし，

$$\boldsymbol{L} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}' & \mathbf{0}' \\ \boldsymbol{G}^*\boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{G}^*(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_3) \end{bmatrix}$$

であり，$\boldsymbol{L}$ は第 1 行の要素がすべて 0 の $(2k+1)\times 6k$ の行列である。

また，超過収益率について，$\boldsymbol{q}_{t+1}$を $\boldsymbol{\phi}_{t,i}$ と $\boldsymbol{\upsilon}_{t+1,i}$ を用いて書き直すと以下のように書ける。

$$\boldsymbol{q}_{t+1}=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\phi}_{t,i}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{\upsilon}_{t+1,i} \tag{22}$$

ただし，

$$\boldsymbol{\Gamma}\equiv[-r\boldsymbol{a}_0 \quad (\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{A}_1) \quad -r\boldsymbol{A}_2]$$
$$\boldsymbol{M}\equiv[(\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{A}_1) \quad -r\boldsymbol{A}_2 \quad \boldsymbol{I} \quad (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_1) \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{A}_2]$$

以上のことを前提にして，t 時点における投資家の意思決定を考える。投資家は各時点において，自身の期待効用を最大化するようなリスク資産の保有量と消費を決定する。投資家の価値関数を以下のように想定する。

$$J_{t,i}=-\exp\left[-\alpha w_{t,i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}'_{t,i}\boldsymbol{V}\boldsymbol{\phi}_{t,i}\right] \tag{23}$$

ここで，α はスカラーの定数であり，$\boldsymbol{V}$ は $(2k+1)\times(2k+1)$ の対称行列である。このとき，解くべき問題は以下のようなベルマン方程式によって表現可能である。

$$J_{t,i}=\max_{x,c}(-\exp(-\theta c_{t,i})+\beta \mathrm{E}_{t,i}[J_{t+1,i}])$$
$$\text{s. t.} \quad w_{t+1,i}=\boldsymbol{x}'_{t,i}\boldsymbol{q}_{t+1}+R(w_{t,i}-c_{t,i})$$

これより，投資家の最適保有量と消費額を導くことができる。

(23) を (21)，(22) を用いて整理すると，$J_{t+1,i}$ は以下のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned}J_{t+1,i}=&-\exp\left[-\alpha R(w_{t,i}-c_{t,i})-\alpha\boldsymbol{x}'_{t,i}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\phi}_{t,i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}'_{t,i}\boldsymbol{V}\boldsymbol{\phi}_{t,i}\right]\\&\times\exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\upsilon}'_{t+1,i}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{L}\boldsymbol{\upsilon}_{t+1,i}-(\alpha\boldsymbol{x}_{t,i}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{\phi}'_{t,i}\boldsymbol{V}\boldsymbol{L})\boldsymbol{\upsilon}_{t+1,i}\right]\end{aligned} \tag{24}$$

ここで，$\boldsymbol{\upsilon}_{t+1,i}$ は投資家 i の t 時点における情報の下で正規分布し，期待値は $\boldsymbol{0}$，共分散行列は $\boldsymbol{\Sigma}_{\upsilon}$ である。したがって，(24) の両辺について期待値を取ると以下のようになる。[9)]

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{t,i}[J_{t+1,i}]=&-g\cdot\exp\left[-\alpha R(w_{t,i}-c_{t,i})-\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}'_{t,i}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{\phi}_{t,i}\right.\\&\left.-\alpha\boldsymbol{x}'_{t,i}\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{\phi}_{t,i}+\frac{1}{2}\alpha^2\boldsymbol{x}'_{t,i}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{M}'\boldsymbol{x}_{t,i}\right]\end{aligned} \tag{25}$$

ただし，

9) 正規確率変数 $\boldsymbol{\omega}$ が平均 $\boldsymbol{0}$，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ であるとき，以下が成り立つことを用いて計算している。

$$\mathrm{E}[\exp(\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{\omega}+c)]=|\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{b}'(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{b}+c\right]$$

$$g \equiv |\boldsymbol{\Sigma}_v \boldsymbol{\Omega}^{-1}|^{-\frac{1}{2}}$$
$$\boldsymbol{N}_1 \equiv \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{L}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{L} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{N}_2 \equiv \boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{V} \tag{27}$$

ベルマン方程式の右辺について，(25) を目的関数に代入し，$\boldsymbol{x}_{t,i}$ について 1 階の条件を考えると以下を得る。

$$\boldsymbol{x}^*_{t,i} = \frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{M}')^{-1}\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{\phi}_{t,i} \tag{28}$$

$c_{t,i}$ についても同様に 1 階の条件を考え，(28) を使って整理すると，以下を得る。

$$c^*_{t,i} = \bar{c} + \frac{\alpha R}{\theta + \alpha R} w_{t,i} + \frac{1}{2(\theta + \alpha R)} \boldsymbol{\phi}'_{t,i} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\phi}_{t,i} \tag{29}$$

ただし，

$$\bar{c} \equiv +\frac{1}{\theta + \alpha R} \ln\left(\frac{\theta}{\alpha R \beta g}\right)$$
$$\boldsymbol{\Phi} \equiv \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}'_2 (\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{M}')^{-1}\boldsymbol{N}_2$$

(28) と (29) を用いてベルマン方程式を書き直し，(23) の価値関数と係数を比較すると以下を得る。

$$\alpha = \frac{\theta r}{R}$$
$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{R}\boldsymbol{\Phi} - 2\left[\frac{1}{R}\ln(r\beta g) - \ln\left(\frac{r}{R}\right)\right]\boldsymbol{I}_1 \tag{30}$$

ただし，$\boldsymbol{I}_j$ は対角要素のうち，$j \times j$ 要素までが 1，それ以外の要素はすべて 0 であるような $(2k+1) \times (2k+1)$ 行列とする。

最後に，市場清算条件から $\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ を求めれば良い。(28) より，各投資家のリスク資産に対する需要が計算できる。投資家の合計は 1 であると仮定しているため，大数の法則により，集計化された事後推定値 $\hat{\hat{\boldsymbol{\xi}}}_{t,i}$ は $\boldsymbol{\xi}_t$ に収束するので，市場清算条件より以下を得る。

$$\frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{M}')^{-1}\boldsymbol{N}_2 = -[\boldsymbol{0}_{k \times (k+1)} \quad \boldsymbol{I}] \tag{31}$$

ただし，$\boldsymbol{0}_{k \times (k+1)}$ は $k \times (k+1)$ の零行列である。

(31) を満たすように $\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ を求めれば良い。ここで，$\boldsymbol{N}_2$ は $k+1$ 列までの要素は 0 なので，$\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{I}_{k+1} = \boldsymbol{0}$ である。(27) と (30) より，

$$\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{I}_{k+1}=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{I}_{k+1}=\boldsymbol{0}$$

となる[10]。したがって，$\boldsymbol{a}_0$と$\boldsymbol{A}_1$については以下のように計算できる。

$$\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{A}_1=\frac{1}{r}\boldsymbol{I}$$

参 考 文 献

[1] Admati, A. (1985) "A Noisy Rational Expectations Equilibrium for Multi-asset Securities Markets," *Econometrica*, Vol.53, No.3, 629–657.

[2] Cho, J., and M. Krishnan (2000) "Prices as Aggregators of Private Information: Evidence from S&P500 Futures Data," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.35, No.1, 111–126.

[3] Grossman, S. J. (1975) "Rational Expectations and the Econometric Modeling of Markets Subject to Uncertainty: A Bayesian Approach," *Journal of Econometrics*, Vol.3, 255–272.

[4] Grossman, S. J. (1981) "An Introduction to the Theory of Rational Expectations under Asymmetric Information," *Review of Economic Studies*, Vol.48, 541–559.

[5] Grossman, S. J., and J. E. Stiglitz (1980) "On the Impossibility of Informationally Efficient Markets," *American Economic Review*, Vol.70, 393–408.

[6] Hellwig, M. (1980) "On the Aggregation of Information in Competitive Markets," *Journal of Economic Theory*, Vol.22, 477–498.

[7] Kim, O., and R. E. Verrecchia (1991) "Trading Volume and Price Reactions to Public Announcements," *Journal of Accounting Research*, Vol.29, No.2, 302–321.

[8] Shiller, R. J. (1981) "Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends?" *American Economic Review*, Vol.71, No.3, 421–436.

[9] Spiegel, M. (1998) "Stock Price Volatility in a Multiple Security Overlapping Generations Model," *Review of Financial Studies*, Vol.11, No.2, 419–447.

[10] Wang, J. (1994) "A Model of Competitive Stock Trading Volume," *Journal of Political Economy*, Vol.102, No.1, 127–168.

[11] Watanabe, M. (2008) "Price Volatility and Investor Behavior in an Overlapping Generations Model with Information Asymmetry," *Journal of Finance*, Vol.63, No.1, 229–272.

10) (26) に (30) を代入して右から$\boldsymbol{I}_{k+1}$をかけて整理すると，

$$(r\boldsymbol{I}+\boldsymbol{L}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{L}\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{L}'\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{I}_{k+1}=\boldsymbol{0}$$

であり，$\boldsymbol{L}'\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{I}_{k+1}=\boldsymbol{0}$が解であることがわかる。これを使って，(26) より$\boldsymbol{L}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}_{k+1}=\boldsymbol{0}$が得られるので，(27) から求めることができる。