Title	連続時間の資本構成モデル（3)
Sub Title	
Author	辻, 幸民(Tsuji, Yukitami)
Publisher	慶應義塾大学出版会
Publication year	2006
Jtitle	三田商学研究 (Mita business review). Vol.49, No.3 (2006. 8) ,p.39- 55
JaLC DOI	
Abstract	本稿では，連続時間モデルにおける資本構成モデルをサーベイする。ここでの手法は，まず本稿で取り上げるモデルすべてを包含するような一般的なモデルを提示し，この一般的なモデルに様々な拡張･ 特殊性を加味することで個々のモデルを導出している。その際，数学的な厳密さにこだわることを避け，個々のモデルの経済学的な意義の説明に重点を置いた議論を展開する。また個々のモデルにシミュレーションを行い，モデルから決定される最適資本構成が現実企業の資本構成を実現できるかどうか確認する。こうすることで，モデルが現実企業の動向を把握できる道具となり得るかどうかを判断できよう。
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-20060800-0039

三田商学研究
第49巻第3号
2006年 8 月

2006年5月19日掲載承認

連続時間の資本構成モデル（3）*

辻　　幸　民

＜要　約＞
本稿では，連続時間モデルにおける資本構成モデルをサーベイする。ここでの手法は，まず本稿で取り上げるモデルすべてを包含するような一般的なモデルを提示し，この一般的なモデルに様々な拡張・特殊性を加味することで個々のモデルを導出している。その際，数学的な厳密さにこだわることを避け，個々のモデルの経済学的な意義の説明に重点を置いた議論を展開する。また個々のモデルにシミュレーションを行い，モデルから決定される最適資本構成が現実企業の資本構成を実現できるかどうか確認する。こうすることで，モデルが現実企業の動向を把握できる道具となり得るかどうかを判断できよう。

＜キーワード＞
資本構成，連続時間，倒産コスト，負債の再交渉，負債の再発行，オプション，デリバティブ

6　負債の再構成：GJL モデル

6.1　モデルの概要

Goldstein-Ju-Leland（2001）は（以下 GJL モデルと略称），4 節で述べた Leland モデルを拡張した。彼らは Leland モデルの欠点を克服した上で，さらに動学的な資本構成モデルの構築という点で著しい成果をあげたといってよい。

ここでいう動学的な資本構成モデルとは，複数時点での負債に関する意思決定をいう。それまでのモデルは基本的には 1 つの時点のみの意思決定であったが，彼らは将来に負債が再構成 debt restructuring される可能性を考慮して，現在時点の最適資本構成を決定しようとした。将来の負債の再構成ということで，将来に負債を改めて発行できるチャンスがあるなら，今，無理に過大な負債を発行する必要はないであろう。シミュレーションからわかるように，Leland モデルのような倒産コストモデルでは，最適な資本構成における負債が，現実企業の負債よりも相

＊　紙幅の都合により，本論文は 3 分割されている。前編の（1）は『三田商学研究』第48巻 6 号，（2）は第49巻 1 号に掲載されている。なお参考文献は（1）に掲載されているので，参照願いたい。

当過大になってしまう。これは意思決定が負債発行時点のみで行われ，将来に負債を拡大するチャンスがないからかもしれない。もし将来，幸なことに良好な状態が継続し，企業の規模が徐々に拡大していくなら，その規模に適った負債の最適量も大きくなるはずである。ところが将来に負債発行のチャンスがないなら，将来の負債拡大の可能性をも考慮して，今，負債の量を決めなければならないので，どうしても最適な負債依存度は過大になってしまう。これに対して，将来に負債発行のチャンスが存在するなら，今，無理をして大きな負債を発行する必要がないから，現在の最適な負債量は小さくできる。この理由から，将来の負債の再構成を考慮すると，たとえ倒産コストモデルであっても，現在時点での最適な負債量は現実企業の水準並みに小さくできるかもしれない。

将来の負債の再発行というこのアイディア自体はGJLモデルが最初ではなく，Fischer-Heinkel-Zechner（1989）に依る。GJLモデルは，Lelandモデルを修正・拡張して，このアイディアを包含することに成功したモデルであり，今後，様々なトピックスに応用され得るモデルであるから，ここで詳しく触れておこう。

6.2　モデルの前提

Lelandモデルでは，コンソル債を想定し連続的な利子支払と法人税の節税を考慮していたにもかかわらず，企業の資産の産み出すキャッシュフローを明示的に取り扱わなかったため，利子や法人税がどのように支払われているのかという点が曖昧であった。GJLモデルではこの欠点を修正すべく，企業の保有資産の産み出すキャッシュフローをEBITとして明示的にモデルに取り入れる。

負債はここでもコンソル債が想定され，連続的に利子 C（定数）が支払われる。ただしここでは未知の将来時点で，倒産発生の可能性のみならず，負債が再構成され得ることを考慮する。負債が再構成される場合，単純化のため，既発行の負債すべてが一旦途中償還され，その時点で最適な負債量のコンソル債が再発行されるものとする。なお負債の償還価格は発行価格でなされるものとする。

ところで，もし負債を再構成する際の取引コストがゼロであるなら，負債の再構成は状態変数の値に応じて連続的に実行されるであろう。この点をLelandモデルを借用して説明すると，最適な利子支払額 C^* は負債発行時点の状態変数の値 A_0 の一次同次関数であった。状態変数が刻々と変化するのに対し，利子支払額は負債が一度発行されてしまえば定数である。時間が経過し状態変数の値が変化すれば，前に発行された負債の利子支払額はもはや最適値ではない。状態変数の新しい値に対応した利子支払額の新しい最適値が存在するであろう。従って負債の再構成の取引コストがゼロであるなら，状態変数の変化に伴って連続的に負債はそのときの最適値に調整される。しかし取引コストがゼロでないなら，このような負債の再構成は起らない。取引コストが存在すると，連続的な調整ではコストが大きくなり過ぎるからである。取引コストが存在するときの調整方法は，臨界値を設定しておいて，状態変数がその臨界値に到達するときに，一度に調整を行うのが最適であることが知られている。すなわち，負債の再構成は将来時点において

離散的な間隔をもって（可付番無限個で）発生する。このような負債の再構成を発生させる状態変数の臨界値を，ここでは負債再発行点と称しよう。負債の再構成に伴う取引コストは負債の発行価格に比例するものとし，その比率は κ である。

モデルの状態変数は唯一 EBIT で，以下では EBIT を δ_t で表す（$x_1 = \delta_t$）。δ_t の確率過程は

$$d\delta_t = \alpha\delta_t dt + v\delta_t dZ_1 \tag{41}$$

のような確率微分方程式に従うとする（α と v は定数）。この状態変数に基づく証券価格の均衡条件では，δ_t が証券価格ではないので，状態変数 δ_t に伴う λ_1 は決定できずにそのまま式の中に残ることになる。ここで将来 EBIT の $\delta_l(l \geqq t)$ を価値還元した価格 W_t を考えよう。W_t は市場取引可能な証券価格であると考え，第 1 番目の証券価格であるとしよう（$f_1 = W_t = W(\delta_t, t)$）。すると(7)式を適用して，

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial \delta_t}(\alpha - \lambda_1 v)\delta_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \delta_t^2}v^2\delta_t^2 - rW_t + \delta_t = 0$$

が W_t に関する均衡条件である。なお W_t から連続的に δ_t のキャッシュフローが産み出されるので，(7)式の c_k に相当するのが δ_t である。この均衡条件に Feynman-Kac 公式の(8)式を当てはめたいのであるが，今 $T \to \infty$ である。通常の数学的条件の下では $T \to \infty$ の下，(8)式の第 2 項はゼロになり，期待値自体も収束すると考えられるので，(8)式は

$$W_t = \mathrm{E}_t^*\left[\int_t^\infty \delta_l e^{-r(l-t)} dl\right]$$

のように書ける。もし λ_1 が定数であるなら[20]，δ_l は

$$\ln\delta_l \sim \mathrm{N}\left(\ln\delta_t + \left(\alpha - \lambda_1 v - \frac{v^2}{2}\right)(l-t),\ v^2(l-t)\right)$$

という δ_t を条件とした確率分布に従うので，これを使って期待値を評価すると

$$W_t = \frac{\delta_t}{r - \alpha + \lambda_1 v} \tag{42}$$

となる。このことから W_t は δ_t と線形関係にあることがわかり，δ_t の値がわかれば W_t の値もわかるので，W_t も状態変数ということになる。

そこで次に状態変数としての W_t の確率過程を(41)式と(42)式とから導くと，

$$dW_t = \alpha W_t dt + vW_t dZ_1 \tag{43}$$

20） もちろん本稿の範囲内のモデルでは，λ_1 が定数であると仮定する理由は何もない。λ_1 が定数でないなら，$\ln\delta_t$ は正規分布には従わない。Goldstein-Zapatero（1996）は実物経済を考慮した（消費を内生化した）モデルを作って，この λ_1 に相当する変数が定数になるための条件を検討している。

が得られる。W_t は証券価格でもあるから，状態変数が証券価格でもあるときに成立する(11)式を書き換えると，

$$(\alpha-\lambda_1 v)W_t = rW_t - \delta_t \equiv \gamma W_t$$

という関係が成立する。この式の最左辺は，状態変数が(43)式に従うときの $m_1-\lambda_1 s_1$ に相当する。この中の $(\alpha-\lambda_1 v)$ の部分は定数と仮定され，これを γ で記そう。このとき他の任意の証券価格 $f_k(W_t, t)$ の均衡条件および Feynman-Kac 公式は，

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_k}{\partial t}+\frac{\partial f_k}{\partial W_t}\gamma W_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_k}{\partial W_t^2}v^2W_t^2-rf_k+c_k(t)=0\\ f_k(W_t, t)=\mathrm{E}_t^*\left[\int_t^\infty c_k(l)e^{-r(l-t)}dl\right]\end{gathered} \tag{44}$$

となる。ただし $c_k(t)$ はこの証券の時点 t におけるキャッシュフローである。この期待値を評価するには，

$$dW_t=\gamma W_t dt+vW_t dZ_1^*$$

から求められる次の正規分布を用いればよい。

$$\ln W_l \sim \mathrm{N}\left(\ln W_t+\left(\gamma-\frac{v^2}{2}\right)(l-t),\ v^2(l-t)\right)$$

ただここでは Leland モデルと同様，負債はコンソル債が想定されているので，負債の満期という特定の時点は存在せず，すべての時点は同質的である。すなわち，$\dfrac{\partial f_k}{\partial t}=0$ であるから均衡条件の(44)式は常微分方程式になって，Feynman-Kac 公式を使うことなく解を導出できる。この常微分方程式の解は次のとおりであり，具体的な証券の価値は境界条件から特定化される。

$$\begin{aligned}f_k(W_t)&=F_{PS}+G_1W_t^{-Y}+G_2W_t^{-X}\\ X&=\frac{1}{v^2}\left[\gamma-\frac{v^2}{2}+\sqrt{\left(\gamma-\frac{v^2}{2}\right)^2+2rv^2}\right]>0\\ Y&=\frac{1}{v^2}\left[\gamma-\frac{v^2}{2}-\sqrt{\left(\gamma-\frac{v^2}{2}\right)^2+2rv^2}\right]<0\end{aligned}$$

この F_{PS} は特殊解であり，例えば $c_k(t)=\delta_t$ のとき $F_{PS}=W_t$ であり，$c_k(t)=C$ のとき $F_{PS}=C/r$，$c_k(t)=0$ のとき $F_{PS}=0$ である。

6.3 価値の定式化

ここでは前で述べた GJL モデルの前提に基づいて，株式価値や負債価値を定式化する。資本構成理論ではその伝統として，EBIT に対して負債や株式に帰属する部分を考え，EBIT を分割したキャッシュフローに対応する価値として負債価値や株式価値を定式化した。これに対し

GJL モデルでは，EBIT 全体に対する価値をまず W_t として，この W_t を適当に分割することで株式価値と負債価値を導出する。

この価値の導出方法を直感的にいうと次のとおりである。負債（コンソル債）が 0 時点で発行されるとする。その利子支払額は C である。倒産発生点を W_B で，負債再発行点を W_U で表そう。今，任意時点 t で W_t は $W_U > W_t > W_B$ であるとする。将来の未知の時点 l で，W_l が W_B に到達すると倒産であり，W_l が W_U に到達すると負債の再構成（途中償還・再発行）が行われる。$W_U > W_t$ であるから $W_l = W_U$ のとき，企業規模は時点 t より拡大しているので，最適な負債は増大するであろう。また W_l が W_B にも W_U にも達しない限り C が支払われ続ける。これらのことから将来の状態は，負債の利子支払，倒産，負債の再構成という 3 つの状態が起り得る。これら 3 つの状態に基づいて，W_t を 3 つに分解しよう。永久に負債利子が支払われ続けるという将来の状態に基づく価値を $W_{sol}(W_t)$ で，倒産という状態に基づく価値を $W_{ban}(W_t)$ で，負債の再構成という状態に基づく価値を $W_{res}(W_t)$ で表す。当然，$W_t = W_{sol}(W_t) + W_{ban}(W_t) + W_{res}(W_t)$ である。次に $W_{sol}(W_t)$ と $W_{ban}(W_t)$，$W_{res}(W_t)$ の各々について，株式に帰属する部分と負債に帰属する部分，そして税金に帰属する部分と倒産コストに帰属する部分の 4 つに分解する。これらの中で株式に帰属する部分を合計したのが株式価値であり，負債に帰属する部分を合計したのが負債価値である。最後にこうして求められた株式価値＋負債価値の 0 時点における値を最大化すべく，最適な C，W_B，W_U が決定される。後でも説明されるが，モデル内の内生変数，つまり株式価値や負債価値などの証券価格，そして C，W_B，W_U はすべて W_0 に関する 1 次同次関数になる。

以上の説明はごく直感的なもので，厳密には以下のとおりもう少し細かい話となる。まず W_t が未知の将来時点で W_U に到達するとき，1 円が支払われる証券の t 時点の価値を $p_U(W_t)$ で定義する。これは $c_k(t)=0$ のケースで，境界条件を $p_U(W_U)=1$，$p_U(W_B)=0$ として解を求めると，

$$p_U(W_t) = \frac{-W_B^{-X}}{\Sigma} W_t^{-Y} + \frac{W_B^{-Y}}{\Sigma} W_t^{-X} \quad ただし \quad \Sigma = W_B^{-Y} W_U^{-X} - W_U^{-Y} W_B^{-X}$$

のようになる。次に W_t が未知の将来時点で W_B に到達するとき，1 円が支払われる証券の t 時点の価値を $p_B(W_t)$ として定義すると，その境界条件は $p_B(W_U)=0$，$p_B(W_B)=1$ であるから，解は

$$p_B(W_t) = \frac{W_U^{-X}}{\Sigma} W_t^{-Y} - \frac{W_U^{-Y}}{\Sigma} W_t^{-X}$$

である。こうして求められた $p_U(W_t)$ と $p_B(W_t)$ を用いれば，上で述べた $W_{sol}(W_t)$ や $W_{ban}(W_t)$，$W_{res}(W_t)$ は非常に簡単な形で表現できるようになる。

$W_{res}(W_t)$ から始めよう。これは将来時点 l の W_l が W_U に到達してはじめて，EBIT への請求権が発生する証券の t 時点の価値と考えられるので，その境界条件を $W_{res}(W_U) = W_U$，$W_{res}(W_B)=0$ とすると，解は

$$W_{res}(W_t)=W_U p_U(W_t)$$

である。$W_{ban}(W_t)$ の方は，W_t が W_B に到達してはじめて，EBIT への請求権が発生する証券の t 時点の価値であるから，その境界条件は $W_{ban}(W_U)=0$ と $W_{ban}(W_B)=W_B$ である。このとき，

$$W_{ban}(W_t)=W_B p_B(W_t)$$

が解である。最後に $W_{sol}(W_t)$ は，W_t が W_U や W_B に到達しない限り，EBIT への請求権を保持する証券の t 時点の価値であると考えられる。これは $c_k(t)=\delta_t$ のケースの解を適用し，境界条件は $W_{sol}(W_U)=0$ と $W_{sol}(W_B)=0$ のように書けるので，

$$W_{sol}(W_t)=W_t-W_U p_U(W_t)-W_B p_B(W_t)=W_t-W_{res}(W_t)-W_{ban}(W_t)$$

という解が導出される。$p_U(W_t)$ と $p_B(W_t)$ の定義から，これら $W_{sol}(W_t)$ や $W_{ban}(W_t)$，$W_{res}(W_t)$ の定式化は整合的なものであることが容易に確認できよう。

もう 1 つ後で有用になるので，$W_{int}(W_t)$ という価値を導出しておきたい。これは，W_t が W_U や W_B に到達しない限り，C を支払い続ける場合の t 時点の価値とする。解を求めると，$c_k(t)=C$ のケースの解を適用し，境界条件を $W_{int}(W_U)=0$ と $W_{int}(W_B)=0$ とすると，

$$W_{int}(W_t)=\frac{C}{r}[1-p_U(W_t)-p_B(W_t)]$$

のように書くことができる。この定式化は，$W_{sol}(W_t)$ の中で負債に帰属する部分と考えることができる。このことは $p_U(W_t)$ と $p_B(W_t)$ の定義からも明らかであろう。

今までは任意の時点を対象にしていた。ここで導出したいのは，負債が発行される 0 時点の株式価値と負債価値であり，これらを導くのに，説明の便宜上「期間」という用語を定義しておこう。現在を第 0 時点としよう。そして $W_l(l>0)$ がはじめて W_U に到達するまでの期間を第 0 期という。第 0 期の期末が第 1 時点である。第 0 期に関する倒産発生点が $W_B^{(0)}$，負債再発行点が $W_U^{(0)}$，負債の利子支払額が $C^{(0)}$ であり，これらが第 0 時点で選択される。次に $W_U^{(0)}$ の定義から，第 1 時点において，第 0 時点で発行された負債の再構成（途中償還・再発行）が行われる。そして第 1 時点から次に W_l が W_U に到達するまでの期間が第 1 期である。第 1 期の期末を第 2 時点という。第 1 時点において第 1 期に関する倒産発生点 $W_B^{(1)}$ と負債再発行点 $W_U^{(1)}$，負債利子支払額 $C^{(1)}$ が選択されている。そして第 2 時点においては，第 1 時点で発行された負債の再構成がまた実行される。このように倒産しない限り，将来の無数の離散的な（可付番無限個の）時点で負債の再構成が実行される。

期間という用語を用いると，その定義から $W_{res}(W_0)$ は，上で述べた第 1 期以降のすべての期間の EBIT に対する価値評価ということになる。また第 0 期の EBIT に対する価値評価は $W_{sol}(W_0)$ と $W_{ban}(W_0)$ の合計である。それでは $W_{sol}(W_0)$ と $W_{ban}(W_0)$ の中で，株式と負債に帰属する部分および税金，倒産コストに帰属する部分を求めよう。まず $W_{sol}(W_0)$ の中で負債に帰属する部分であるが，これは前で述べた $W_{int}(W_0)$ である。この $W_{int}(W_0)$ を $W_{sol}(W_0)$ から

控除した部分が税金に帰属する価値と株式に帰属する価値となる。これらは法人税率 τ と残りの $1-\tau$ で分配される。次に $W_{ban}(W_0)$ であるが，この中で株主に帰属する部分はゼロである。倒産になると倒産コストが発生する。倒産コストは kW_B であるとすると，$W_{ban}(W_0)$ の中で倒産コストに帰属する価値は $kW_{ban}(W_0)$ であり，残りの $(1-k)W_{ban}(W_0)$ が負債に帰属する価値となる。

第 0 期の EBIT の価値評価は $W_{sol}(W_0)+W_{ban}(W_0)$ であり，これを第 0 期の EBIT に対する分け前として適当に分割してみよう。第 0 期の EBIT の中で負債に帰属する部分の第 0 時点での価値を $d^{(0)}(W_0)$，株式に帰属する部分の第 0 時点での価値を $e^{(0)}(W_0)$，税金に帰属する部分の第 0 時点での価値を $g^{(0)}(W_0)$，倒産コストに関する第 0 時点での価値を $bc^{(0)}(W_0)$ のように記す。これらは

$$
\begin{aligned}
d^{(0)}(W_0)&=W_{int}(W_0)+(1-k)W_{ban}(W_0)\\
e^{(0)}(W_0)&=(1-\tau)[W_{sol}(W_0)-W_{int}(W_0)]\\
g^{(0)}(W_0)&=\tau[W_{sol}(W_0)-W_{int}(W_0)]\\
bc^{(0)}(W_0)&=kW_{ban}(W_0)
\end{aligned}
$$

である。これらを合計すれば当然，次のような関係が成立している。

$$
\begin{aligned}
e^{(0)}(W_0)+d^{(0)}(W_0)+g^{(0)}(W_0)+bc^{(0)}(W_0)&=W_{sol}(W_0)+W_{ban}(W_0)\\
&=W_0-W_Up_U(W_0)(=W_0[1-p_U(W_0)\theta])
\end{aligned}
$$

続いて第 1 期以降のすべての EBIT に対する価値評価を求めなければならない。これについては同次性を考慮する。第0時点で選択される負債の利子支払額 $C^{(0)}$，倒産発生点 $W_B^{(0)}$，証券の価値はすべて W_0 に関して 1 次同次である。これは Leland モデルからの類推としてそうなるものと予想できるが，とりあえずここではこれらが一次同次であるものと仮定しよう。さらに負債再発行点 $W_U^{(0)}$ も W_0 に関して 1 次同次を仮定する。ここで $W_U^{(0)}/W_0\equiv\theta$ とすると，定義から第 1 時点の $W_1(=W_U^{(0)})$ は W_0 の θ 倍の値である。ということは，第 1 時点で選択される負債の利子支払額 $C^{(1)}$ や倒産発生点 $W_B^{(1)}$，負債再発行点 $W_U^{(1)}$，証券の価値はすべて第 0 時点の値を θ 倍したものである。さらに，定義から第 2 時点の $W_2(=W_U^{(1)})$ は W_1 の θ 倍であり，W_0 の θ^2 倍である。ということは，第 2 時点で選択される負債の利子支払額 $C^{(2)}$ や倒産発生点 $W_B^{(2)}$，負債再発行点 $W_U^{(2)}$，証券の価値はすべて第 1 時点の値を θ 倍，そして第 0 時点の値を θ^2 倍したものである。要するに負債の再構成が実施される各期の期首では，前の期の期首に比べて，すべてが θ 倍になっているのである。ここで $C^{(0)}\equiv C$，$W_B^{(0)}\equiv W_B$，$W_U^{(0)}\equiv W_U$ のように記号を改めて定義しておく。

この同次性の性質を考慮すれば，第 1 期以降について定式化するのは容易である。第 1 期以降のすべての EBIT に対する第 0 時点の価値評価は $W_{res}(W_0)$ であるが，これの分け前として負債に帰属する価値と株式に帰属する価値，そして税金や倒産コストに帰属する価値はどのようになるか。第 1 期以降のすべての EBIT に対して，負債に帰属する部分の第 0 時点での価値を

$d(W_0)$ で表す。第 0 期の EBIT に対する負債に帰属する価値は $d^{(0)}(W_0)$ であった。第 1 期の EBIT に対するそれは $d^{(0)}(W_0)$ を θ 倍した大きさになるはずで，これを第 0 時点の価値に割引くのに $p_U(W_0)$ を乗ずればよい。また第 2 期の EBIT に対するそれは $d^{(0)}(W_0)$ を θ^2 倍した大きさになるはずで，これを第 0 時点の価値に割引くには $p_U(W_0)^2$ を乗ずればよい。このように考えれば，$d(W_0)$ は

$$d(W_0)=[p_U(W_0)\theta+(p_U(W_0)\theta)^2+\cdots]d^{(0)}(W_0)=\frac{p_U(W_0)\theta}{1-p_U(W_0)\theta}d^{(0)}(W_0)$$

のように書ける。次に第 1 期以降のすべての EBIT に対して，株式に帰属する部分の第 0 時点での価値を $e(W_0)$，税金に帰属する部分の価値を $g(W_0)$，倒産コストに関する価値を $bc(W_0)$ で表すと，これらは負債の場合と同様の考え方で，

$$e(W_0)=\frac{p_U(W_0)\theta}{1-p_U(W_0)\theta}e^{(0)}(W_0)$$

$$g(W_0)=\frac{p_U(W_0)\theta}{1-p_U(W_0)\theta}g^{(0)}(W_0)$$

$$bc(W_0)=\frac{p_U(W_0)\theta}{1-p_U(W_0)\theta}bc^{(0)}(W_0)$$

として書くことができるであろう。いうまでもなく，これらの合計は $W_{res}(W_0)$ に等しくなる。

$$e(W_0)+d(W_0)+g(W_0)+bc(W_0)=W_U p_U(W_0)=W_{res}(W_0)$$

さて第 0 時点の負債価値を $B(W_0)$ とする。第 1 時点でこの負債は全額途中償還される。償還価格は発行価格であると仮定されているので，第 1 時点では債権者に $B(W_0)$ が支払われる。従って第 0 時点の負債価値は，第 0 期の EBIT からの分け前 $d^{(0)}(W_0)$ と，第 1 時点での途中償還額 $B(W_0)$ に関する第 0 時点価値 $p_U(W_0)B(W_0)$ とから成り，これら合計が第 0 時点の価値 $B(W_0)$ に等しいということになる。つまり

$$B(W_0)=d^{(0)}(W_0)+p_U(W_0)B(W_0)$$

であるから，これを書き換えて負債価値 $B(W_0)$ の定式化は次のとおりである。

$$B(W_0)=\frac{d^{(0)}(W_0)}{1-p_U(W_0)}$$

第 0 時点の株式価値の方は複雑である。これを $S(W_0)$ で表すが，これを求めるには次の 3 つを考慮しなければならない。1 つは EBIT からの分け前の価値である。2 つめは，将来の負債の発行と償還に伴うキャッシュフローが存在するため，これも株式価値の一部となる。というのは，負債の再構成として途中償還と再発行が同時になされるが，ここのモデルでは絶えず途中償還額よりも再発行の金額の方が大きい。つまり再構成時点の毎に企業には現金が流入する。この

現金は即株主に配当されなければならない。このため負債の発行と償還に伴うキャッシュフローは株式価値の一部となる。3つめは負債発行に伴う調整コストである。これは企業によって負担されるが，この負担は当然株式価値を減じることになる。以上の3つを考慮して株式価値が計算される。

1番目のEBITからの分け前としての価値であるが，これは第0期のEBITからの分け前と第1期以降のすべてのEBITからの分け前の合計である。

$$e^{(0)}(W_0)+e(W_0)=\frac{e^{(0)}(W_0)}{1-p_U(W_0)\theta}$$

次に2番目の負債の発行と償還に伴うキャッシュフローであるが，これらキャッシュフローの第0時点における価値は下の表のようにまとめられる。

$+B(W_0)$	第0時点で発行される $B(W_0)$ の負債
$-p_U(W_0)B(W_0)$ $+p_U(W_0)\theta B(W_0)$	第1時点で途中償還される第0時点発行の負債 第1時点で発行される $\theta B(W_0)$ の負債
$-p_U(W_0)^2\theta B(W_0)$ $+p_U(W_0)^2\theta^2 B(W_0)$	第2時点で途中償還される第1時点発行の負債 第2時点で発行される $\theta^2 B(W_0)$ の負債
$-p_U(W_0)^3\theta^2 B(W_0)$	第3時点で途中償還される第2時点発行の負債

これらを合計すると次のような式になる。

$$B(W_0)[1-p_U(W_0)][1+p_U(W_0)\theta+(p_U(W_0)\theta)^2+\cdots]=\frac{d^{(0)}(W_0)}{1-p_U(W_0)\theta}$$

ただし資本構成理論の伝統的な表記では，株式価値は配当落ちの値であるため，株式価値 $S(W_0)$ の中には，第0時点の負債発行で入手した現金の配当 $B(W_0)$ を含めない。そこで株式価値にカウントすべき値は

$$\frac{d^{(0)}(W_0)}{1-p_U(W_0)\theta}-B(W_0)$$

でなければならない。最後に3番目の負債発行に伴う調整コストの第0時点での価値であるが，これについては次のとおりに求められる。

$$\kappa B(W_0)+\kappa p_U(W_0)\theta B(W_0)+\kappa p_U(W_0)^2\theta^2 B(W_0)+\cdots=\frac{\kappa B(W_0)}{1-p_U(W_0)\theta}$$

第 0 時点の株式価値は上記 3 つの合計として計算される。

$$S(W_0)=\frac{e^{(0)}(W_0)+d^{(0)}(W_0)-\kappa B(W_0)}{1-p_U(W_0)\theta}-B(W_0)$$

株式価値 $S(W_0)$ と（現金配当をもたらす）負債価値 $B(W_0)$ の合計が企業価値 V_0 であるから，この $V_0(=V(W_0))$ が株主の富を表す。これは

$$V(W_0)=\frac{e^{(0)}(W_0)+d^{(0)}(W_0)-\kappa B(W_0)}{1-p_U(W_0)\theta}$$

であるが，書き換えると次のような式が得られる。

$$V(W_0)=e^{(0)}(W_0)+p_U(W_0)\theta V(W_0)+(1-\kappa)B(W_0)-p_U(W_0)B(W_0)$$

右辺第 1 項は第 0 期の EBIT からの分け前，第 2 項は第 0 期末（第 1 時点）の株主の富（これは第 0 時点の θ 倍），第 3 項は第 0 時点負債発行による配当，第 4 項は第 0 期末の負債の途中償還を表す。株主の富の最大化をもたらすような最適な意思決定は，$\frac{\partial V(W_0)}{\partial C}=0$ と $\frac{\partial V(W_0)}{\partial W_B}=0$，$\frac{\partial V(W_0)}{\partial \theta}=0$ を満たすように C^* と W_B^*，θ^*（これは W_U^* のこと）を決定することである。

以上が GJL モデルであるが，これは 1 次同次性が想定されてモデルが組み立てられている。それではこの 1 次同次性は本当に成立しているのか。容易に確認できるが，C^* や W_B^*，W_U^* が W_0 の 1 次同次であるなら，株式価値や負債価値などの証券価値は W_0 の 1 次同次関数になっている。しかしモデルで内生的に決まる C^* や W_B^*，W_U^* が W_0 について 1 次同次かどうかは直接的にはよくわからない。C^*，W_B^*，W_U^* を解析的に解くことは不可能であるからである。原論文の Goldstein-Ju-Leland（2001）もこの点については何も言及していない。これら 1 次同次性については数値解析で検討しなければならない。

6.4 GJL モデルのシミュレーション

ここでは GJL モデルの特徴をシミュレーションにより調べたい。特に C^*，W_B^*，W_U^* を解析的に解くことが不可能であるにもかかわらず，これらが状態変数 W_0 に対して 1 次同次であることを前提にモデルが構築されていた。本当にこれらの間に 1 次同次性が成立しているのであろうか。ここでは，数値解析によって C^*，W_B^*，W_U^* の最適値を探索する。

これら 3 つのパラメターによる最適値探索は不可能ではないが，計算を容易にし結果を安定させるためには，探索対象のパラメターが少ないほど望ましい。パラメターの数を減らすには，何らかの条件式からパラメターについて解けることが必要であるが，GJL モデルの場合では，次のような smooth pasting 条件

$$\lim_{W_t\to W_B}\frac{\partial S}{\partial W_t}=0$$

表27　GJL モデル：W_0 の変化

$W_0^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
180	13.6	71.2	0.39	271.0	0.47	109.2	52.7	161.9	0.67
190	14.4	75.1	0.39	286.0	0.47	115.3	55.6	170.9	0.67
200	15.1	79.1	0.39	301.1	0.47	121.4	58.5	179.9	0.67
210	15.9	83.0	0.39	316.2	0.47	127.4	61.4	188.9	0.67
220	16.7	87.0	0.39	331.2	0.47	133.5	64.4	197.9	0.67

(a) その他のパラメターは $\tau=0.4$，$k=0.3$，$r=0.05$，$v=0.35$，$\gamma=-0.01$，$\kappa=0.02$。

表28　GJL モデル：r の変化

$r^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.03	11.3	70.7	0.42	310.0	0.47	115.9	67.2	183.1	0.63
0.04	13.3	75.3	0.40	304.9	0.47	119.0	62.2	181.2	0.66
0.05	15.1	79.1	0.39	301.1	0.47	121.4	58.5	179.9	0.67
0.06	17.0	82.2	0.38	298.0	0.46	123.2	55.6	178.8	0.69
0.07	18.8	85.0	0.37	295.5	0.46	124.8	53.2	178.0	0.70

(a) その他のパラメターは $\tau=0.4$，$k=0.3$，$W_0=200$，$v=0.35$，$\gamma=-0.01$，$\kappa=0.02$。

表29　GJL モデル：v の変化

$v^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.25	12.5	92.4	0.37	287.9	0.43	128.6	45.5	174.2	0.74
0.30	13.8	85.4	0.38	294.6	0.45	125.0	52.0	177.0	0.71
0.35	15.1	79.1	0.39	301.1	0.47	121.4	58.5	179.9	0.67
0.40	16.4	73.5	0.40	307.4	0.47	117.8	65.1	182.8	0.64
0.45	17.7	68.4	0.41	313.5	0.48	114.2	71.6	185.8	0.61

(a) その他のパラメターは $\tau=0.4$，$k=0.3$，$W_0=200$，$r=0.05$，$\gamma=-0.01$，$\kappa=0.02$。

表30　GJL モデル：τ の変化

$\tau^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.30	11.2	67.5	0.42	352.0	0.36	105.9	67.8	173.7	0.61
0.35	13.2	74.1	0.41	321.6	0.42	114.1	61.9	176.0	0.65
0.40	15.1	79.1	0.39	301.1	0.47	121.4	58.5	179.9	0.67
0.45	17.2	82.8	0.37	286.4	0.50	128.3	57.0	185.3	0.69
0.50	19.3	85.5	0.36	275.4	0.54	135.3	57.1	192.4	0.70

(a) その他のパラメターは $k=0.3$，$W_0=200$，$r=0.05$，$v=0.35$，$\gamma=-0.01$，$\kappa=0.02$。

表31 GJL モデル：k の変化

$k^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.1	25.3	99.2	0.41	279.4	0.50	166.1	45.4	211.4	0.79
0.3	15.1	79.1	0.39	301.1	0.47	121.4	58.5	179.9	0.67
0.5	8.4	55.9	0.38	354.6	0.37	82.3	74.4	156.7	0.53
0.7	5.3	39.8	0.39	518.0	0.20	59.2	84.1	143.2	0.41
0.9	4.3	32.7	0.40	1110.5	0.06	50.6	85.6	136.2	0.37

(a) その他のパラメターは $\tau=0.4$，$W_0=200$，$r=0.05$，$v=0.35$，$\gamma=-0.01$，$\kappa=0.02$。

表32 GJL モデル：γ の変化

$\gamma^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
−0.07	21.7	92.2	0.50	283.3	0.39	127.9	37.5	165.3	0.77
−0.03	17.6	85.1	0.43	292.5	0.44	124.8	48.2	172.9	0.72
−0.01	15.1	79.1	0.39	301.1	0.47	121.4	58.5	179.9	0.67
0.02	10.6	63.9	0.31	325.6	0.49	109.3	93.8	203.1	0.54
0.04	6.1	42.4	0.22	368.0	0.49	83.1	182.8	265.9	0.31

(a) その他のパラメターは $\tau=0.4$，$k=0.3$，$W_0=200$，$r=0.05$，$v=0.35$，$\kappa=0.02$。

表33 GJL モデル：κ の変化

$\kappa^{(a)}$	C^*	W_B^*	$p_B(W_0)$	W_U^*	$p_U(W_0)$	B_0	S_0	V_0	$D.R.$
0.01	15.8	77.6	0.31	264.5	0.59	121.5	64.2	185.7	0.65
0.02	15.1	79.1	0.39	301.1	0.47	121.4	58.5	179.9	0.67
0.03	14.6	80.1	0.45	335.1	0.38	120.8	54.4	175.2	0.69
0.04	14.1	80.7	0.49	368.9	0.32	120.0	51.1	171.1	0.70
0.05	13.7	81.2	0.52	403.5	0.28	119.1	48.3	167.4	0.71

(a) その他のパラメターは $\tau=0.4$，$k=0.3$，$W_0=200$，$r=0.05$，$v=0.35$，$\gamma=-0.01$。

から C^* を解くことができ，これを使うと（C^* を消去して），問題は W_B と W_U の 2 つのパラメターによる最適値探索となる（各々の最適値が W_B^* と W_U^*）[21]。このようにして計算したのが，表27

21） この smooth pasting 条件から C^* を解いた結果は次のとおりである。

$$C^*=\frac{(1+\kappa)(1-k)rW_B}{\tau-1-\kappa}-\frac{r(1-\tau)}{\tau-1-\kappa}\frac{1}{\left.\frac{\partial P_U}{\partial W_t}\right|_{W_t\to W_B}+\left.\frac{\partial P_B}{\partial W_t}\right|_{W_t\to W_B}}$$

$$+\frac{(\tau-k-\kappa(1-k))rW_U}{\tau-1-\kappa}\frac{\left.\frac{\partial P_U}{\partial W_t}\right|_{W_t\to W_B}}{\left.\frac{\partial P_U}{\partial W_t}\right|_{W_t\to W_B}+\left.\frac{\partial P_B}{\partial W_t}\right|_{W_t\to W_B}}+\frac{(\tau-k)rW_B}{\tau-1-\kappa}\frac{\left.\frac{\partial P_B}{\partial W_t}\right|_{W_t\to W_B}}{\left.\frac{\partial P_U}{\partial W_t}\right|_{W_t\to W_B}+\left.\frac{\partial P_B}{\partial W_t}\right|_{W_t\to W_B}}$$

ただし，$$\left.\frac{\partial P_U}{\partial W_t}\right|_{W_t\to W_B}=-\frac{W_B^{-X-Y-1}}{\Sigma}(X-Y)$$

$$\left.\frac{\partial P_B}{\partial W_t}\right|_{W_t\to W_B}=\frac{W_B^{-X-Y-1}}{\Sigma}\left[X\left(\frac{W_U}{W_B}\right)^{-Y}-Y\left(\frac{W_U}{W_B}\right)^{-X}\right]$$

から表33である。外生的なパラメターは状態変数 W_0，無危険利子率 r，ボラティリティ v，法人税率 τ，倒産コスト k，ドリフト γ，負債再発行コスト κ である。ベースとなる数値は $W_0=200$，$r=0.05$，$v=0.35$，$\tau=0.4$，$k=0.3$，$\gamma=-0.01$，$\kappa=0.02$ で，これらの中で１つのパラメターだけ数値を変更するときの効果を調べている。

表27は W_0 が変化する場合である。金額ベースの変数（C^*，W_B^*，W_U^*，B_0，S_0，V_0）はすべて W_0 と１次同次の関係にあることが確認できる。またこれらが１次同次であれば，p_U と p_B は各式の形からゼロ次同次であり，実際に W_0 が変化しても p_U と p_B は不変である。

次に，r が変化する場合（表28），v が変化する場合（表29），τ が変化する場合（表30），k が変化する場合（表31）については，各々Leland モデルで得られた結果とほぼ同様である。r が上昇すれば負債比率は上昇し，v が上昇すれば負債比率は低下する。また τ の上昇で負債比率は上昇し，k の上昇で負債比率は下落する。これらの中で Leland モデルに対する GJL モデルの特徴としては，k の変化による感応度が大きい点が指摘できよう。Leland モデルでは k が0.7や0.9のような（非現実的なぐらい）倒産コストが大きくても，負債比率は0.6前後で高留まりしていた。対して GJL モデルでは，k が0.7のとき負債比率は0.5を切り，k が0.9のとき負債比率は0.3台と飛躍的に低下する。

GJL モデルで登場するパラメター γ と κ の変化を調べたのが，表32と表33である。γ とは無危険利子率 r から δ_0/W_0 を引いたものであるから，これは正値にも負値にもなり得る。恐らくは負とした方が無難であろうと考え，このシミュレーションでは-0.01という値にした。というのは，この δ_0/W_0 が r 以下なら，企業活動を止めて無危険資産に投資する方がいいからである。この設定の下，ここのシミュレーションでの負債比率はほとんどが0.6を超えてしまうため，Leland モデルと同様に現実企業への適用は困難かもしれない。しかし，計算上は γ が正値であってももちろん構わない。注目すべきは γ が正のとき，負債比率が著しく低下して0.3前後の値を取り得るようになるという点である。これならば現実企業の負債比率にモデルをフィットさせることができるかもしれない。ただ残念なことに，γ が正でもっと大きな値になると，最適値探索の計算が収束しなかった。表32では γ が0.04のときを掲載しているが，これが0.05になるともはや計算は不可能となる。

表33は，負債の再発行コストが変化する場合である。κ が0.02という設定は若干大きいかもしれないが，この κ には単なる発行だけではなく，その前の償還に関する取引コストも暗黙に含んでいる。従って κ は１～２％ぐらいが妥当な大きさであろう。この κ が大きくなると，負債比率は上昇する。これは取引コストが増大すると一度により大量の負債発行が有利であろうから，納得的な結果である。

以上が GJL モデルのシミュレーション結果であるが，γ の設定値を正にすると，現実企業の負債比率として尤らしい値をモデルで決定できるという点が，前の Leland モデルや FS モデルと決定的に異なっている。この意味で，GJL モデルは現実企業の動向を把握できる道具になり得るかもしれない。しかし問題点は，γ を正値と想定することに経済的な意味があるのかということ，そして γ が正のとき収束計算が難しくなりやすいということ，これら２点で実用上の問

題を抱えていることになる。

7　結び

本稿では，連続時間の資本構成モデルとして 4 つのモデルを体系的かつ詳細に検討した。これらのうち，1 つは古典的なオプション理論の Merton（1974）を倒産コストモデルに拡張したもの（Merton タイプのモデル）で，他の 3 つは1990年代に盛んになった手法に基づくモデルである。これらは倒産の定義が異なっている。

4 つのモデルの中で，どれが現実企業の動向を把握できる道具となり得るモデルであろうか。ここのシミュレーションから判断すると，それは Merton タイプのモデルであろう。外生的なパラメターに妥当な値を設定すると，このモデルのみが現実企業の負債比率に相応しい値をはじき出す。その他 3 つのモデルでは，最適資本構成として決定される負債比率の値は高すぎる。ただし GJL モデルのみは，倒産コストを大きく見積もることで，また γ に正値を想定することで，現実企業の負債比率のレベルを実現できる。

ここで述べたような Merton タイプのモデルにおける法人税は奇抜な印象を拭えないような想定である。これは一般的なオプション理論が，キャッシュフローの取り扱いを苦手とすることに起因する。これに対して GJL モデルは，キャッシュフローを真正面からモデルの中に取り込んでいるので，理論的には飛躍的な進歩といえる。しかし GJL モデルは複雑な割には，シミュレーション結果を見る限り，その現実適用力には疑問符を付けざるを得ない。

今日，連続時間モデルのフレームワークを使って資本構成のモデル構築をすることが流行になっているが，連続時間モデルでは元々キャッシュフローの取り扱いに難点があること，そしてキャッシュフローをモデルに包含すればモデルそのものが複雑にならざるを得ないこと，そして複雑化させた割には，現実適用力がもう一つであること，以上の理由により，筆者個人は連続時間の資本構成モデルでは，現実を説明できる道具として限界があると感じている。

付録A　Leland モデルに関する別の解法

本文の 2 節で，Feynman-Kac 公式を用いて証券価格が定式化されたにもかかわらず，4 節以降の議論では，均衡条件を常微分方程式と考え，これを機械的に解いてしまうことで証券価格を導いている。もちろん，Feynman-Kac 公式から証券価格を定式化したとしても同じ証券価格の式を得るはずである。この付録ではこの点を確認しておきたい。

例として，4 節の修正 Leland モデルを取り上げよう。本文では均衡条件の常微分方程式を，数学の定石どおりに解くことで株式価値の(38)式と負債価値の(39)式を導出した。ここでこれらを Feynman-Kac 公式から定式化してみる。現在を 0 時点とし，将来の状態変数 $A_l(l\geqq 0)$ が倒産発生点 A_B に到達するとき倒産であるが，いつ倒産が発生するかは未知であるから，

$$\xi = \inf\{l \geqq 0 | A_l = A_B\}$$

のような確率変数 ξ を定義する。$A_0 > A_B$ とすると，この ξ は将来の状態変数 A_l が初めて A_B に到達する時点を表す。ξ に依存する場合の Feynman-Kac 公式は(10)式が適用できる。ただし，Leland モデルでは負債の満期は無限大としているから，$T \to \infty$ であって，$T > \xi$ は確定し，(10)式の第 3 項はゼロになる。さらに r は定数である。

負債は，倒産前に C（定数）のキャッシュフローを連続的に発生させ，倒産時に $(1-k)A_B$ の価値を有する。(10)式の記号では，$c_k(X_l, l) = C$，$f_k(X_\xi, \xi) = (1-k)A_B$ である。株式の方は，倒産前に $\beta A_l - (1-\tau)C$ のキャッシュフローを産み，倒産時の価値はゼロである。つまり，$c_k(X_l, l) = \beta A_l - (1-\tau)C$，$f_k(X_\xi, \xi) = 0$ である。また時間同質的 time homogeneous であることが仮定され，関数形は時点そのものには依存しないので，$f_k(X_t, t)$ という関数は，負債価値の場合 $B(A_t)$，株式価値の場合 $S(A_t)$ と表記される。

以上のことを(10)式に適用すると，現在（0 時点）の負債価値と株式価値は次のような式になる。

$$B(A_0) = C\mathrm{E}_0^*\left[\int_0^\xi e^{-rl} dl\right] + (1-k)A_B \mathrm{E}_0^*[e^{-r\xi}] \tag{45}$$

$$S(A_0) = \beta \mathrm{E}_0^*\left[\int_0^\xi A_l e^{-rl} dl\right] - (1-\tau)C\mathrm{E}_0^*\left[\int_0^\xi e^{-rl} dl\right] \tag{46}$$

上式の期待値は次の確率微分方程式

$$dA_l = (r-\beta)A_l dl + vA_l dZ_l^*$$

から導かれる確率分布によって評価される[22)]。この式から，

$$A_l = A_0 \exp\left((r - \beta - \frac{v^2}{2})l + vZ_l^*\right) \tag{47}$$

を得るので，$\ln A_l$ は A_0 を条件とした正規分布に従う。

---

22) ここのウィナー過程（dZ_l^*）は本文の(37)式のウィナー過程（dZ_1）と

$$dZ_l^* = dZ_1(l) + \frac{\mu - r}{v} dl$$

という関係にある。これについて 2 節の記号を使って補足しておこう。Girsanov 定理によれば，元の確率測度の下でのウィナー過程 $dZ_1(l)$ と新しい確率測度の下でのウィナー過程 dZ_1^* との間には，

$$dZ_1^*(l) = dZ_1(l) + \lambda_1 dl$$

という関係がある。また唯一の状態変数が証券価格でもあるなら，この λ_1 は(12)式を満たさなければならない。今，$m_1 = (\mu - \beta)A_l$，$s_1 = vA_l$，$c_1 = \beta A_l$，$f_1 = A_l$ であるから，これらを代入すれば上記の式が得られる。なおここでは $Z_1^*(l)$ のことを Z_l^* と記している。

さて(45)式と(46)式を見ると，証券価値を求めるには，3種類の期待値を評価しなければならない。A_lの確率分布が(47)式から与えられるとしても，これら期待値の中にはξが存在する。このξをどのように扱えばよいか。ここではMorellec（2004）を参考にして，この計算方法をまとめておこう。

まず$\mathrm{E}_0^*\left[\int_0^\xi e^{-rl}dl\right]$である。これを展開するには，

$$\mathrm{E}_0^*\left[\int_0^\xi e^{-rl}dl\right]=\mathrm{E}_0^*\left[\int_0^\infty e^{-rl}dl\right]-\mathrm{E}_0^*\left[\int_\xi^\infty e^{-rl}dl\right]$$

のように書き換える。この右辺第1項は，期待値の中に確率変数がないので期待値は外れ，普通に積分すれば$\frac{1}{r}$が得られる。問題は第2項の方である。次の2つの変数を定義する。

$$Z_l^\dagger=Z_l^*+bl \quad ただし \quad b=\frac{r-\beta-\frac{v^2}{2}}{v} \tag{48}$$

$$Z_B=\frac{1}{v}\ln\left(\frac{A_B}{A_0}\right) \tag{49}$$

このZ_Bは負であることを注意しておく。(47)式と(48)式，(49)式から容易に確認できるが，$A_l \geqq A_B$という不等式は$Z_l^\dagger \geqq Z_B$という式に帰着できる。ここで，(48)式の$Z_l^\dagger$がウィナー過程であり続けるために確率測度の変換を考えよう。新しい確率測度の下での期待値を$\mathrm{E}_0^\dagger$で表す。この期待値について，

$$\varphi_l=\exp\left(bZ_l^\dagger-\frac{b^2}{2}l\right)$$

で定義されるφ_lを用いると，適当な確率変数Φに対して，$\mathrm{E}_0^*(\Phi)=\mathrm{E}_0^\dagger(\Phi\varphi_l)$という関係が成立する。[23] また倒産発生の時点を$\Xi(Z_B)$と書こう。これは次のように定義される。

$$\Xi(Z_B)=\inf\{l \geqq 0 | Z_l^\dagger=Z_B\}$$

以上のことを前提にして，$\mathrm{E}_0^*\left[\int_\xi^\infty e^{-rl}dl\right]$を次のように展開する。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_0^*\left[\int_\xi^\infty e^{-rl}dl\right]&=\mathrm{E}_0^\dagger\left[\int_{\Xi(Z_B)}^\infty \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}l\right)\exp(bZ_l^\dagger)dl\right] \quad ただし\ \omega^2=2r+b^2\\&=\mathrm{E}_0^\dagger\left[\exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\Xi(Z_B)\right)\int_0^\infty \exp(b(Z_l^\dagger+Z_B))\exp\left(-\frac{\omega^2}{2}l\right)dl\right]\\&=\exp(bZ_B-|Z_B|\omega)\mathrm{E}_0^\dagger\left[\int_0^\infty \exp(bZ_l^\dagger)\exp\left(-\frac{\omega^2}{2}l\right)dl\right]\\&=\exp((b+\omega)Z_B)\frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^\infty e^{-|u|\omega}e^{bu}du\\&=\exp((b+\omega)Z_B)\frac{2}{\omega^2-b^2}\end{aligned}$$

23）　この点について，Duffie（2001）pp.335-338がわかりやすくまとめている。

この展開の１行目から２行目の書き換えはウィナー過程の強マルコフ性という性質を用いている。１行目の右辺の期待値の中は，$\Xi(Z_B)$ という時点から無限大までの時間に関する積分であるが，時間を $\Xi(Z_B)$ だけずらして，０時点から無限大までの積分として表記したのが２行目の式である。次に２行目の期待値の中の積分は $\Xi(Z_B)$ に依存しない。この $\Xi(Z_B)$ については，

$$\mathrm{E}_0^{\dagger}\left[\exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\Xi(Z_B)\right)\right]=\exp(-|Z_B|\omega)$$

とすることができるので[24]，３行目のような式に展開できる。３行目から４行目の式への書き換えについては，Z_B が負であるという点と，３行目の式の期待値には Morellec（2004）の Lemma2 にある公式を適用するという点から導出が可能になる。最後に，４行目の積分は普通の積分であるから，絶対値を外して計算すれば容易に５行目の式を得る。

定義から，

$$\omega^2-b^2=2r$$
$$\exp((b+\omega)Z_B)=\left(\frac{A_0}{A_B}\right)^y$$

であるから，結局，

$$\mathrm{E}_0^*\left[\int_\xi^\infty e^{-rl}dl\right]=\frac{1}{r}\left(\frac{A_0}{A_B}\right)^y$$

となって，次のような結果となる。

$$\mathrm{E}_0^*\left[\int_0^\xi e^{-rl}dl\right]=\frac{1}{r}\left[1-\left(\frac{A_0}{A_B}\right)^y\right]$$

他の期待値 $\mathrm{E}_0^*\left[\int_0^\xi A_l e^{-rl}dl\right]$ や $\mathrm{E}_0^*[e^{-r\xi}]$ もまったく同様に計算することができて，

$$\mathrm{E}_0^*[e^{-r\xi}]=\left(\frac{A_0}{A_B}\right)^y$$
$$\mathrm{E}_0^*\left[\int_0^\xi A_l e^{-rl}dl\right]\frac{A_0}{\beta}\left[1-\left(\frac{A_0}{A_B}\right)^y\right]$$

という結果が導かれる。これらから(38)式や(39)式が導かれるのは明らかであろう。

24）　この式については，Karatzas-Shreve（1991）の p.96 を参照のこと。