

Title	3財消費モデルにおける価格効果について
Sub Title	Sign Discrimination of the Cross Price Effects in Terms of the Slutsky Equation : Three Commodity Model
Author	辻村, 江太郎(Tsujimura, Kotaro) 續, 幸子(Tsuzuki, Sakiko)
Publisher	
Publication year	1993
Jtitle	三田商学研究 (Mita business review). Vol.36, No.2 (1993. 6) ,p.129- 134
JaLC DOI	
Abstract	本稿は『KEOレビューNo.7(1987年7月)』いらいの辻村・續の共同研究のビルディング・ブロックの一つとして最近まとまった部分をメモした文字通りの研究メモ(備忘録)である。3財モデルの Slutsky 式において, 交叉価格効果の正負が, 選好パラメタの符号条件とどのように関わっているかについて検討した結果であるが, この研究の他のビルディング・ブロックが未完成なので, 全体としていかなる文脈の中で解釈されるのかについては, それらがそろった時点まで待たねばならない。
Notes	
Genre	Journal Article
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-19930625-04084283">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-19930625-04084283</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

## 3財消費モデルにおける価格効果について

辻村 江太郎  
續 幸子

## &lt;要 約&gt;

本稿は『KEOレビューNo.7 (1987年7月)』いらいの辻村・續の共同研究のビルディング・ブロックの一つとして最近まとまった部分をメモした文字通りの研究メモ(備忘録)である。3財モデルのスルツキー式において、交叉価格効果の正負が、選好パラメタの符号条件とどのように関わっているかについて検討した結果であるが、この研究の他のビルディング・ブロックが未完成なので、全体としていかなる文脈の中で解釈されるのかについては、それらがそろった時点まで待たねばならない。

## &lt;キーワード&gt;

素型相対限界効用(PFORMU)、一次同次のPFORMU、スルツキー式、交叉価格効果、交叉代替効果、交叉所得効果、価格表示のスルツキー式、数量表示のスルツキー式

## I

3財の価格を $p_1, p_2, p_3$ 、(購入)数量を $q_1, q_2, q_3$ とし、これら3財に対する主体の消費総額を $M$ とする。 $q_i$ は内生変数、 $p_i, M$ は外生変数とみなす。

各財間の限界代替率を通じての分子と分母の共通要素を約分したあとの、既約分数としての限界代替率に対応するものとして、各財ごとに素型相対限界効用(*the prime form of the relative marginal utility*略してPFORMU)を定義し、それが数量の1次同次式

$$u_1 = u_{11}q_1 + u_{12}q_2 + u_{13}q_3, \quad u_2 = u_{21}q_1 + u_{22}q_2 + u_{23}q_3, \\ u_3 = u_{31}q_1 + u_{32}q_2 + u_{33}q_3. \quad u_{ij} = u_{ji}.$$

で近似されるものとし、これらに対応する最も簡単な効用指標関数として $q_i$ の2次同次式を想定する。

## II

均衡条件 $u_1/p_1 = u_2/p_2 = u_3/p_3 = \lambda$ と、収支均等式によって、消費者行動の構造式系を書くと、

$$u_{11}q_1 + u_{12}q_2 + u_{13}q_3 - p_1 \lambda = 0$$

$$u_{21}q_1 + u_{22}q_2 + u_{23}q_3 - p_2 \lambda = 0$$

$$u_{31}q_1 + u_{32}q_2 + u_{33}q_3 - p_3 \lambda = 0$$

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = M$$

のようになる。

これに関して、係数の行列式および余因数をつぎのように書くこととする。

$$D = \begin{vmatrix} u_{11}u_{12}u_{13} - p_1 & & & \\ u_{21}u_{22}u_{23} - p_2 & & & \\ u_{31}u_{32}u_{33} - p_3 & & & \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix} = p_1 D_{41} + p_2 D_{42} + p_3 D_{43}$$

$$A = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} ; \begin{aligned} D_{11} &= p_1 A_{11} + p_2 A_{12} + p_3 A_{13}, \\ D_{42} &= p_1 A_{21} + p_2 A_{22} + p_3 A_{23}, \\ D_{43} &= p_1 A_{31} + p_2 A_{32} + p_3 A_{33}, \\ D_{44} &= A \end{aligned}$$

$$A_{11} = u_{22}u_{33} - u_{23}^2, \quad A_{12} = u_{13}u_{23} - u_{12}u_{33},$$

$$A_{13} = u_{12}u_{23} - u_{13}u_{22},$$

$$A_{21} = A_{12}, \quad A_{22} = u_{11}u_{33} - u_{13}^2,$$

$$A_{23} = u_{12}u_{13} - u_{11}u_{23},$$

$$A_{31} = A_{13}, \quad A_{32} = A_{23},$$

$$A_{33} = u_{11}u_{22} - u_{12}^2;$$

$$D_{11} = -2p_2p_3u_{23} + p_2^2u_{33} + p_3^2u_{22},$$

$$D_{12} = p_1p_3u_{13} + p_1p_2u_{23} - p_3^2u_{12} - p_1p_2u_{33},$$

$$D_{13} = p_1p_3u_{12} + p_1p_2u_{23} - p_2^2u_{13} - p_1p_3u_{22}.$$

ここでは、効用極大の2階の条件として、

$$D_{11} < 0, \quad D > 0$$

が要請される。

上の構造式系から、各財の需要関数が、

$$q_1 = \frac{D_{41}}{D}M, \quad q_2 = \frac{D_{42}}{D}M, \quad q_3 = \frac{D_{43}}{D}M, \quad \lambda = \frac{D_{44}}{D}M$$

のように導かれる。

### III

周知のように、需要関数を価格で微分することによって、スルツキー式を導くことができる。例えば、第2財の需要量に及ぼす第1財の価格変化の交叉価格効果は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_2}{\partial p_1} &= \frac{\partial}{\partial p_1} \left( \frac{D_{42}}{D}M \right) = M \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} \left( \frac{D_{42}}{D} \right) \\ &= M \cdot \frac{1}{D^2} \left( D \cdot \frac{\partial D_{42}}{\partial p_1} - D_{42} \cdot \frac{\partial D}{\partial p_1} \right) \\ &= \frac{M}{D^2} \left\{ D \cdot A_{21} - D_{42} (2p_1A_{11} + 2p_2A_{12} + 2p_3A_{13}) \right\} \\ &= \frac{M}{D^2} \left\{ D \cdot A_{21} - D_{42} (2D_{41}) \right\} \\ &= \frac{M}{D^2} \left\{ D \cdot A_{21} - 2D_{41}D_{42} \right\} \end{aligned}$$

となるが、これをさらに変形すると、

$$= \frac{M}{D} \left\{ \left( \frac{DA_{21}}{D} - \frac{D_{41}}{D} \cdot D_{42} \right) - \frac{D_{41}}{D} D_{42} \right\}$$

$$= \frac{1}{D} \left[ \left\{ A_{21} \cdot M - \left( \frac{D_{41}}{D}M \right) D_{42} \right\} - \left( \frac{D_{41}}{D}M \right) D_{42} \right]$$

となる。この { } 内はさらに、

$$\{ \} = A_{21} \cdot M - q_1 D_{42}$$

$$= (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) A_{21}$$

$$- q_1 (p_1A_{21} + p_2A_{22} + p_3A_{23})$$

と書け、 $p_1q_1A_{21}$ の項は相殺されるから、

$$= (p_2q_2 + p_3q_3) A_{21} - q_1 (p_2A_{22} + p_3A_{23})$$

$$= p_2 (q_2A_{21} - q_1A_{22}) + p_3 (q_3A_{21} - q_1A_{23})$$

となる。

ここで前表にしたがって  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{23}$  を詳記すると、上式はさらに、

$$\{ \} = p_2 \{ q_2 (u_{13}u_{23} - u_{12}u_{33}) - q_1 (u_{11}u_{33} - u_{13}^2) \}$$

$$+ p_3 \{ q_3 (u_{13}u_{23} - u_{12}u_{33}) - q_1 (u_{12}u_{13} - u_{11}u_{23}) \}$$

となるが、右辺の4個の ( ) をほぐして再整理すると、

$$= p_2 \{ u_{13} (u_{31}q_1 + u_{32}q_2) - u_{33} (u_{11}q_1 + u_{12}q_2) \}$$

$$+ p_3 \{ u_{23} (u_{11}q_1 + u_{13}q_3) - u_{12} (u_{31}q_1 + u_{33}q_3) \}$$

と書き直される。これに各財のPFORMUの式を代入すれば、

$$= p_2 \{ u_{13} (u_3 - u_{33}q_3) - u_{33} (u_1 - u_{13}q_3) \}$$

$$+ p_3 \{ u_{23} (u_1 - u_{12}q_2) - u_{12} (u_3 - u_{32}q_2) \}$$

$$= p_2 (u_{13}u_3 - u_{33}u_1) + p_3 (u_{23}u_1 - u_{12}u_3)$$

$$= u_3 (p_2u_{13} - p_3u_{12}) + u_1 (p_3u_{23} - p_2u_{33})$$

$$= \lambda p_3 (p_2u_{13} - p_3u_{12}) + \lambda p_1 (p_3u_{23} - p_2u_{33})$$

$$= \lambda (p_2p_3u_{13} - p_3^2u_{12} + p_1p_3u_{23} - p_1p_2u_{33})$$

$$= \lambda D_{12}$$

となる。

すなわち、 $\{ \} = A_{21}M - q_1D_{42} = \lambda D_{12}$ と変形されるから、スルツキー式は、

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{1}{D} \left[ \lambda D_{12} - q_1 D_{42} \right] \text{ または}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{M}{D^2} \left[ D_{12}D_{44} - D_{41}D_{42} \right]$$

のように表現されることとなる。ここでは仮に、前者を「数量表示のスルツキー式」と呼び、後者を「価格表示のスルツキー式」と呼ぶことにする。

同様にして、第1財の価格の変化が第3財の需要量に及ぼす交叉価格効果も、

$$\frac{\partial q_3}{\partial p_1} = \frac{1}{D} \left[ D_{13}\lambda - q_1D_{43} \right], \text{ または}$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial p_1} = \frac{M}{D^2} \left[ D_{13}D_{44} - D_{41}D_{43} \right]$$

の2通りに表示することができる。

IV

交叉価格効果と同様に、第1財の価格変化が第1財の需要量に及ぼす自己価格効果のスルツキー式も、

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{1}{D} [D_{11}\lambda - q_1 D_{41}] , \text{ または}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{M}{D^2} [D_{11}D_{44} - D_{31}^2]$$

のように導かれる。

以上いずれの場合についても、前述のように、 $D > 0$  であり、かつ  $M, p_i, q_i$  に関しては非負を仮定しているから、 $D_{ii} \geq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) であり、また当然のこととして、 $\lambda = u_i/p_i \geq 0$  が仮定される。したがって、価格効果の正負は〔 〕内の各項の正負ならびに絶対値の大小関係によって決まるが、〔 〕内第2項の所得効果が、素型相対限界効用が数量の1次同次式であるいまの場合には、つねに負となることは明らかである。

また〔 〕第1項の  $\lambda$  はつねに正だから、第1項の正負は  $D_{11}$  の符号に左右されるが、自己代替効果に含まれる  $D_{11}$  は、前述のように、効用極大の2階の条件によってつねに負でなければならないから、ヒックスアレンの時代からよく知られているように、自己代替効果はつねに負値をとり、したがって所得効果との合成である自己価格効果もつねに負となる。

ここで、

$$D_{11} = p_3^2 u_{22} + p_2^2 u_{33} - 2 p_2 p_3 u_{23} < 0$$

に対して、交叉代替効果に含まれる

$$D_{12} = -p_1 p_2 u_{33} + p_1 p_3 u_{23} - p_3^2 u_{21} + p_2 p_3 u_{13} ,$$

$$D_{13} = -p_1 p_3 u_{22} + p_1 p_2 u_{23} + p_2 p_3 u_{21} - p_2^2 u_{13}$$

は、ただちに分かるように、

$$\begin{aligned} p_2 D_{12} + p_3 D_{13} &= -p_1 p_3^2 u_{22} - p_1 p_2^2 u_{33} + 2 p_1 p_2 p_3 u_{23} \\ &= -p_1 D_{11} > 0 \end{aligned}$$

のような関係にあり、 $p_i > 0$  だから、 $D_{11} < 0$  なら、 $D_{12}$  と  $D_{13}$  は両方とも正であるか、少なくとも一方が正であることが要請される。

したがって、交叉代替効果は正となる場合が多いのではないかという、これもヒックスアレン以来の推測がここでも成り立つ。しかし、この推測の域を超えて、交叉代替効果が両方とも正なのか、片方だけが正なのか、とか、所得効果との間で絶対値の大小関係はどうなるかなど、より詳細な情報を得るためには、さらにもう一段の検討が必要となるのである。

V

さきに仮称として数量表示と呼んだスルツキー式のかたちは、よく教科書で見ると

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{1}{D} [D_{12}\lambda - q_1 D_{42}]$$

となっているが、〔 〕内の各項には未だ価格の変数が含まれているから、このままでは文字通りの数量表示とはなっていない。

$$D_{12} = p_1 p_3 u_{23} + p_2 p_3 u_{13} - p_1 p_2 u_{33} - p_3^2 u_{21} , \quad \lambda = \frac{u_3}{p_3}$$

から

$$D_{12}\lambda = \left( p_1 u_{23} + p_2 u_{13} - p_3 u_{12} - \frac{p_1 p_2}{p_3} u_{33} \right) u_3$$

と書ける。

ここで1次同次の素型相対限界効用式を

$$u_3 = u_{31} q_1 + u_{32} q_2 + u_{33} q_3 = q_1 \left( u_{31} + \frac{q_2}{q_1} u_{32} + \frac{q_3}{q_1} u_{33} \right)$$

$$= q_1 (u_{31} + u_{32} q_2' + u_{33} q_3') = q_1 u_3^* ,$$

ただし、 $q_2' = q_2/q_1$ 、 $q_3' = q_3/q_1$  と変形する。

同様にして、

$$u_1 = q_1 (u_{11} + u_{12} q_2' + u_{13} q_3') = q_1 u_1^* ,$$

$$u_2 = q_1 (u_{21} + u_{22} q_2' + u_{23} q_3') = q_1 u_2^* ,$$

と書ける。

したがって、

$$u_1/u_2 = u_1^*/u_2^* = p_1/p_2 , \quad u_1/u_3 = u_1^*/u_3^* = p_1/p_3 ,$$

$$u_2/u_3 = u_2^*/u_3^* = p_2/p_3$$

のようになるから、

$$p_1 = p_3 \frac{u_1^*}{u_3^*} , \quad p_2 = p_3 \frac{u_2^*}{u_3^*}$$

と置き換えることができ、これを代替効果の項に代入すると、

$$\begin{aligned} D_{12}\lambda &= \left\{ p_3 \frac{u_1^*}{u_3^*} u_{23} + p_3 \frac{u_2^*}{u_3^*} u_{13} - p_3 u_{12} \right. \\ &\quad \left. - \left( p_3^2 \frac{u_1^* u_2^*}{u_3^* u_3^*} \right) \frac{u_{33}}{p_3} \right\} q_1 u_3^* \\ &= q_1 \frac{p_3}{u_3^*} \left\{ u_1^* u_3^* u_{23} + u_2^* u_3^* u_{13} - u_3^{*2} u_{12} - u_1^* u_2^* u_{33} \right\} \end{aligned}$$

のようになって、価格の項が消去される。

{ 〕内の各項は、

$$u_1^* u_3^* u_{23} = (u_{11} + u_{12} q_2' + u_{13} q_3')$$

$$(u_{31} + u_{32} q_2' + u_{33} q_3') u_{23} ,$$

$$u_2^* u_3^* u_{13} = (u_{21} + u_{22} q_2' + u_{23} q_3')$$

$$(u_{31} + u_{32} q_2' + u_{33} q_3') u_{13} ,$$

$$\begin{aligned} -u_3^* u_{12} &= -(u_{13} + u_{23} q_2' + u_{33} q_3')^2 u_{12}, \\ -u_1^* u_2^* u_{33} &= -(u_{11} + u_{12} q_2' + u_{13} q_3') \\ &\quad (u_{12} + u_{22} q_2' + u_{23} q_3') u_{33} \end{aligned}$$

のようになっている。

これら各項を { } 内で展開して、相殺される項を消去し、残った項を整理すると、

$$\begin{aligned} \text{代替効果の項 } D_{12} \lambda &= q_1 \cdot \frac{p_3}{u_3^*} \{ \} \text{ の } \{ \} \text{ 内は,} \\ \{ \} &= -u_{11} A_{11} q_2' + (u_{11} + 2 u_{13} q_3' + 2 u_{23} q_2' q_3' + u_{22} \\ &\quad q_2'^2 + u_{33} q_3'^2) A_{12} + (u_{13}^2 u_{22} - u_{12}^2 u_{33}) q_2' \end{aligned}$$

のようになる。したがって、もし

$$u_{ii} > 0, u_{ij} > 0, A_{ij} > 0, A_{ii} < 0$$

であって、かつ第3項の ( ) 内がゼロであれば、 $D_{12} \lambda > 0$  と、交叉代替効果は正となる。

これに対して、交叉所得効果の項  $-q_1 D_{41}$  はあらかじめ負値をとることが知られているが、代替効果と比較しての絶対値の大小関係を見るために、数量表示に直して展開すると、

$$\begin{aligned} -q_1 D_{41} &= -q_1 \{ P_1 A_{21} + P_2 A_{22} + P_3 A_{23} \} \\ &= -q_1 \left\{ \frac{u_1^*}{u_3^*} P_3 A_{21} + \frac{u_1^*}{u_3^*} P_3 A_{22} + P_3 A_{23} \right\} \\ &= -q_1 \cdot \frac{P_3}{u_3^*} \left\{ u_1^* A_{21} + u_2^* A_{22} + u_3^* A_{23} \right\} \end{aligned}$$

のようになる。{ } 内の各項は

$$\begin{aligned} -u_1^* A_{21} &= (u_{11} + u_{12} q_2' + u_{13} q_3') (u_{12} u_{33} - u_{13} u_{23}) \\ -u_2^* A_{22} &= (u_{21} + u_{22} q_2' + u_{23} q_3') (u_{13}^2 - u_{11} u_{33}) \\ -u_3^* A_{23} &= (u_{31} + u_{32} q_2' + u_{33} q_3') (u_{11} u_{23} - u_{12} u_{13}) \end{aligned}$$

のようになっているから、これらを展開して相殺される項を消去し、残りの項を整理すれば、所得効果の項の { } 内は、

$$\{ \} = -(u_{11} A_{11} + u_{12} A_{12} + u_{13} A_{13}) q_2'$$

のようになる。

以上をまとめれば、交叉価格効果  $\frac{\partial q_2}{\partial p_1}$  は、

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{1}{D} \left[ D_{12} \lambda - q_1 D_{42} \right] = \frac{1}{D} \cdot \frac{p_3}{u_3^*} \cdot q_1 \left[ \text{代替効果} \right]$$

の項 + (所得効果の項) のようになるが、

$$\begin{aligned} \text{代替効果の項} &= -u_{11} A_{11} q_2' + (u_{11} + 2 u_{13} q_3' \\ &\quad + 2 u_{23} q_2' q_3' + u_{22} q_2'^2 + u_{33} q_3'^2) A_{12} \\ &\quad + (u_{13}^2 u_{22} - u_{12}^2 u_{33}) q_2', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所得効果の項} &= (-u_{11} A_{11} - u_{12} A_{12} - u_{13} A_{13}) q_2' \\ &= -A q_2' \end{aligned}$$

となっており、 $u_{ii} > 0$ ,  $u_{ij} > 0$ ,  $A_{ij} > 0$ ,  $A_{ii} < 0$

で且つ  $(u_{13}^2 u_{22} - u_{12}^2 u_{33})$  という差の絶対値が小であるとき、交叉代替効果は正となりやすく、所得効果は負

であるが、前者の絶対値が大で、両者を総合した交叉価格効果が正となることはほぼ確実であるといえる。

## VI

以上と同様に、こんどは第1財の価格変化が第3財の需要に及ぼす交叉価格効果、

$$\frac{\partial q_3}{\partial p_1} = \frac{1}{D} \left[ D_{13} \lambda - q_1 D_{43} \right]$$

を数量表示に直す。

$$D_{13} = p_1 p_2 u_{32} + p_2 p_3 u_{21} - p_1 p_3 u_{22} - p_2^2 u_{31}$$

であるが、 $\lambda = u_2/p_2$  と置くと、

$$D_{13} \lambda = (p_1 u_{32} + p_3 u_{21} - p_2 u_{31} - \frac{p_1 p_3}{p_2} u_{22}) u_2$$

となる。これに、 $p_1 = p_2 \frac{u_1^*}{u_2^*}$ ,  $p_3 = p_2 \frac{u_3^*}{u_2^*}$  を代入すると、

$$\begin{aligned} D_{13} \lambda &= p_2 \left\{ \frac{u_1^*}{u_2^*} u_{23} + \frac{u_3^*}{u_2^*} u_{12} - u_{13} - \frac{u_1^* u_3^*}{u_2^* u_2^*} \frac{p_2}{p_2} u_{22} \right\} u_2^* q_1 \\ &= q_1 \cdot \frac{p_2}{u_2^*} \left\{ u_1^* u_2^* u_{23} + u_2^* u_3^* u_{12} - u_2^{*2} u_{13} - u_1^* u_3^* u_{22} \right\} \end{aligned}$$

のように価格の項が消去される。

{ } 内の各項は、

$$\begin{aligned} u_1^* u_2^* u_{23} &= (u_{11} + u_{12} q_2' + u_{13} q_3') (u_{21} + u_{22} q_2' + u_{23} q_3') u_{23}, \\ u_2^* u_3^* u_{12} &= (u_{21} + u_{22} q_2' + u_{23} q_3') (u_{31} + u_{32} q_2' + u_{33} q_3') u_{12}, \\ -u_2^{*2} u_{13} &= -(u_{21} + u_{22} q_2' + u_{23} q_3')^2 u_{13}, \\ -u_1^* u_3^* u_{22} &= (u_{11} u_{12} q_2' + u_{13} q_3') (u_{31} + u_{32} q_2' + u_{33} q_3') u_{22} \end{aligned}$$

のようになっている。{ } 内のこれら各項を展開して相殺される項を消去し、残余の項を整理すれば、

$$\begin{aligned} \{ \} &= -u_{11} A_{11} q_3' + (u_{11} + 2 u_{12} q_2' + 2 u_{23} q_2' q_3' \\ &\quad + u_{22} q_2'^2 + u_{33} q_3'^2) A_{13} + (u_{12}^2 u_{33} - u_{13}^2 u_{22}) q_3' \end{aligned}$$

を得る。

これに対して所得効果の項を数量表示に直すと、

$$\begin{aligned} -q_1 D_{43} &= -q_1 \{ p_1 A_{31} + p_2 A_{32} + p_3 A_{33} \} \\ &= -q_1 \left\{ \frac{u_1^*}{u_2^*} p_2 A_{31} + p_2 A_{32} + \frac{u_3^*}{u_2^*} p_2 A_{33} \right\} \\ &= -q_1 \cdot \frac{p_2}{u_2^*} \left\{ u_1^* A_{31} + u_2^* A_{32} + u_3^* A_{33} \right\} \end{aligned}$$

となり、{ } の各項を詳記すると、

$$\begin{aligned} -u_1^* A_{31} &= (u_{11} + u_{12} q_2' + u_{13} q_3') (u_{13} u_{22} - u_{12} u_{23}), \\ -u_2^* A_{32} &= (u_{21} + u_{22} q_2' + u_{23} q_3') (u_{11} u_{23} - u_{12} u_{13}), \\ -u_3^* A_{33} &= (u_{31} + u_{32} q_2' + u_{33} q_3') (u_{12}^2 - u_{11} u_{22}) \end{aligned}$$

のようになっている。これら { } 内の各項を展開して相殺される項を消去し、残余の項をまとめると、

$$-q_1 D_{43} = -q_1 \cdot \frac{p_2}{u_2^*} \{ \} \text{ の } \{ \} \text{ 内は}$$

$\{ \} = (-u_{31}A_{31} - u_{32}A_{32} - u_{33}A_{33}) q_3'$   
 のように整理される。

以上のようにして、交叉価格効果  $\frac{\partial q_3}{\partial p_1}$  は、

$$\frac{\partial q_3}{\partial p_1} = \frac{1}{D} [D_{13} \lambda - q_1 D_{43}] = \frac{q_1}{D} \frac{p_2}{u_2^*} [(\text{代替効果の項}) + (\text{所得効果の項})]$$

と変形されるが、 $\frac{q_1}{D} \frac{p_2}{u_2^*} > 0$  だから、交叉価格効果の正負は [ ] 内の正負によって決まる。そして、以上の数量表示によれば、

$$\begin{aligned} (\text{代替効果の項}) &= -u_{11}A_{11}q_3' + (u_{11} + 2u_{12}q_2' \\ &\quad + 2u_{23}q_2'q_3' + u_{22}q_2'^2 + u_{33}q_3'^2) A_{13} \\ &\quad + (u_{12}^2u_{33} - u_{13}^2u_{22}) q_3', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{所得効果の項}) &= (-u_{31}A_{31} - u_{32}A_{32} - u_{33}A_{33}) q_3' \\ &= -A \cdot q_3' \end{aligned}$$

となっているから、 $\frac{\partial q_2}{\partial p_1}$  の場合と同様に、ここでも、 $u_{ij} > 0$ ,  $u_{ii} > 0$ ,  $A_{ij} > 0$ ,  $A_{ii} < 0$  であって、且つ  $(u_{12}^2u_{33} - u_{13}^2u_{22})$  という差の絶対値が小であれば、 $\frac{\partial q_3}{\partial p_1}$  に含まれる交叉代替効果は正となる。

他方で、所得効果が負値をとることはあらかじめ分かっているが、上の表示で比較すれば、代替効果の正の絶対値が所得効果の負の絶対値を上回ることはほぼ確実だから、上の符号条件の下で、交叉価格効果が正値をとることはまちがいないと言えよう。

VII

念のため、代替効果の項と所得効果の項の和をつくって、両者の総合としての交叉価格効果の式を求めると、代替効果の第1項と第3項および所得効果の項は、共通に変数  $q_3'$  を含むが、代替効果の第3項の係数  $(u_{12}^2u_{33} - u_{13}^2u_{22})$  は所得効果の係数の諸項の中に吸集されてしまい、交叉価格効果に対して中立的であることが分かる。

結果として得られる交叉価格効果の式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_3}{\partial p_1} &= \frac{q_1}{D} \cdot \frac{p_2}{u_2^*} [ \ ] \text{として} [ \ ] \text{の中は,} \\ [ \ ] &= (u_{11} + 2u_{12}q_2' + 2u_{23}q_2'q_3' + u_{22}q_2'^2 + u_{33}q_3'^2) \\ &\quad A_{13} + 2(-u_{11}A_{11} - u_{12}A_{12})q_3' \end{aligned}$$

となり、 $u_{ij} > 0$ ,  $u_{ii} > 0$ ,  $A_{ij} > 0$ ,  $A_{ii} < 0$  のとき、第1項は正、第2項の ( ) 中第1項は正、第2項は負、

となっているが、全体として正の項が優勢で、交叉価格効果が

$$\frac{\partial q_3}{\partial p_1} > 0$$

と正値をとるであろうことが示唆される。

これは、さきに見た、第1財の価格  $p_1$  の変化が第2財の需要に及ぼす交叉価格効果  $\frac{\partial q_2}{\partial p_1}$  についても同様で、代替効果の項と取得効果の和をつくると、代替効果の第1項、第3項と所得効果の項とは共通の変数  $q_2'$  を含み、代替効果の第3項の係数  $(u_{13}^2u_{22} - u_{12}^2u_{33})$  は正負がさだかでないまま  $\frac{\partial q_3}{\partial p_1}$  と絶対値が同じで逆符号をとっているが、これも所得効果の諸項のうちに吸集されて、総合される交叉価格効果の正負に対しては中立的であることが分かる。

結果として、代替効果と所得効果の総合としての交叉価格効果は、

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{1}{D} [D_{12} \lambda - q_1 D_{42}] = \frac{q_1}{D} \cdot \frac{p_3}{u_3^*} [ \ ]$$

と書けるが、この [ ] 内は

$$\begin{aligned} [ \ ] &= (u_{11} + 2u_{13}q_3' + 2u_{23}q_2'q_3' + u_{22}q_2'^2 + u_{33}q_3'^2) \\ &\quad A_{12} + 2(-u_{11}A_{11} - u_{13}A_{13}) q_2' \end{aligned}$$

となる。ここでも、 $u_{ij} > 0$ ,  $u_{ii} > 0$ ,  $A_{ij} > 0$ ,  $A_{ii} < 0$  であるとき、第1項は正、第2項 ( ) 内の第1項は正、第2項は負となるが、全体としては正の項が優勢で、交叉価格効果は

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} > 0$$

と正値をとるであろうことが示唆される。

つまり3財消費モデルにおいて、以上のようにスルツキー式を選好パラメタ  $u_{ij}$ ,  $u_{ii}$  と数量  $q_i$  のみから成り価格を含まないかたちの数量表示として表現した場合には、パラメタの符号条件として、 $u_{ij} > 0$ ,  $u_{ii} > 0$ ,  $A_{ij} > 0$ ,  $A_{ii} < 0$  の仮定の下では、交叉価格効果が、 $\frac{\partial q_2}{\partial p_1} > 0$ ,  $\frac{\partial q_3}{\partial p_1} > 0$  と正値をとることがほぼ確実と判断されるのである。

VIII

さて今度はスルツキー式を選好パラメタと価格  $p_i$  のみを含み、数量  $q_i$  を含まない、価格表示によって表現してみよう。例えば、第1財の価格変化が第3財の需要に及ぼす交叉価格効果の式は、つぎのように変形

することができる。

$$\lambda = \frac{D_{14}}{D}M, \quad q_1 = \frac{D_{41}}{D}M, \quad q_3 = \frac{D_{43}}{D}M,$$

(ここで  $D > 0$ ,  $M > 0$  だから  $D_{4i} > 0$ )、をスルツキー式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_3}{\partial p_1} &= \frac{1}{D} \left[ D_{13} \lambda - q_1 D_{43} \right] \\ &= \frac{1}{D} \left[ D_{13} \cdot \frac{D_{44}}{D}M - \left( \frac{D_{41}}{D}M \right) D_{43} \right] \\ &= \frac{M}{D^2} \left[ D_{13}D_{44} - D_{41}D_{43} \right] \end{aligned}$$

のように書くことができる。ここでは、

$$D_{13} = p_1 p_2 u_{23} + p_2 p_3 u_{12} - p_1 p_3 u_{22} - p_2^2 u_{13},$$

$$D_{44} = u_{11}A_{11} + u_{12}A_{12} + u_{13}A_{13},$$

$D_{41}D_{43} = (p_1A_{11} + p_2A_{12} + p_3A_{13})(p_1A_{31} + p_2A_{32} + p_3A_{33})$  のようになっている。

[ ] 内では  $D_{13}D_{44}$  が代替効果の項、 $-D_{41}D_{43}$  が所得効果の項であるが、後者が負であることはあらかじめ分かっている。

同様に、第1財の価格変化が第2財の需要に及ぼす交叉価格効果のスルツキー式の価格表示は、

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{M}{D^2} \left[ D_{12}D_{44} - D_{41}D_{42} \right]$$

のように書けるが、ここでは、

$$D_{12} = p_1 p_3 u_{23} + p_2 p_3 u_{13} - p_1 p_2 u_{33} - p_3^2 u_{21},$$

$D_{41}D_{42} = (p_1A_{11} + p_2A_{12} + p_3A_{13})(p_1A_{21} + p_2A_{22} + p_3A_{23})$  のようになっている。ここでも所得効果の項  $-D_{41}D_{42}$  が負値をとることは、あらかじめ分かっている。

第1財の価格変化が第1財自身の需要に及ぼす自己価格効果のスルツキー式の価格表示は、

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{M}{D^2} \left[ D_{11}D_{44} - D_{41}D_{41} \right]$$

で、ここでも  $D_{44} > 0$ 、 $-D_{41}D_{41} < 0$  であることはあらかじめ分かっているが、周知のごとく自己代替効果の項  $D_{11}D_{44}$  の  $D_{11}$  については、効用極大の2階の条件から、

$$D_{11} = p_2^2 u_{33} + p_3^2 u_{22} - 2p_2 p_3 u_{23} < 0$$

であることが、あらかじめ理論的に要請されており、 $D_{11}D_{44} < 0$  と自己代替効果が負であることは、はじめから分かっている。

自己代替効果の因子  $D_{11}$  と交叉代替効果の因子  $D_{12}$  および  $D_{13}$  との間には、前述のように、

$$p_2 D_{12} + p_3 D_{13} = -p_1 D_{11} > 0$$

のような関係があるが、そのことを意識して  $D_{12}$  や  $D_{13}$  の式を書き直すと、

$$D_{12} = -p_1 (p_2 u_{33} - p_3 u_{23}) - p_3 (p_3 u_{21} - p_2 u_{13}),$$

$$D_{13} = -p_1 (p_3 u_{22} - p_2 u_{23}) + p_2 (p_3 u_{21} - p_2 u_{13})$$

のようになり、両者の和が  $D_{11}$  と逆符号の関係を生じるのは、 $D_{12}$ 、 $D_{13}$  それぞれの第1項であって、それぞれの第2項は互いに相殺関係にあって  $D_{11}$  とは関係のないことが分かる。

したがって、自己代替効果が負値をとる裏返しとして、交叉代替効果が正値をとりやすいというのは、 $D_{12}$ 、 $D_{13}$  それぞれの上記第1項にかかわる事であって、それぞれの第2項は直接にはかかわりが無い。もし  $D_{12}$  と  $D_{13}$  が両者ともに正値をとるとすれば、 $D_{12}$  と  $D_{13}$  において絶対値が等しく正負が逆となっている ( $p_3 u_{21} - p_2 u_{13}$ ) の項は、それぞれの第1項に比して絶対値が小さいことが要請される。もしこの条件が満足さ

れば、 $\frac{\partial q_2}{\partial p_1}$  に含まれる交叉代替効果も、 $\frac{\partial q_3}{\partial p_1}$  に含まれる交叉代替効果も正だということになるが、その場合、負値をとることが知られている所得効果の項との和、すなわち両者の総合としての交叉価格効果が正値をとるか負値をとるかを知るためには、さらに検討する必要がある。

## K

前節で見た交叉価格効果、

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{M}{D^2} \left[ D_{12}D_{44} - D_{41}D_{42} \right] \text{ および、}$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial p_1} = \frac{M}{D^2} \left[ D_{13}D_{44} - D_{41}D_{43} \right] \text{ について、}$$

前記のような  $D_{1i}$  および  $D_{4i}$  の内容を代入して [ ] 内を展開すると、それぞれについて価格の変数の2次の項が6種類ずつ現われるから、それらの項を整理すると、

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} \text{ について: } \quad \frac{\partial q_3}{\partial p_1} \text{ について:}$$

$$(p_2 p_3 \text{ の項}) \quad -2 p_2 p_3 A_{13} A_{22} \quad -2 p_2 p_3 A_{12} A_{33}$$

$$(p_1 p_2 \text{ の項}) \quad -2 p_1 p_2 A_{11} A_{22} \quad -2 p_1 p_2 A_{11} A_{23}$$

$$(p_1 p_3 \text{ の項}) \quad -2 p_1 p_3 A_{11} A_{23} \quad -2 p_1 p_3 A_{11} A_{33}$$

$$(p_1^2 \text{ の項}) \quad -p_1^2 A_{11} A_{12} \quad -p_1^2 A_{11} A_{13}$$

$$(p_2^2 \text{ の項}) \quad -p_2^2 A_{12} A_{22} \quad -p_2^2 (u_{13} D_{44} + A_{12} A_{13})$$

$$(p_3^2 \text{ の項}) \quad -p_3^2 (u_{12} D_{44} + A_{13} A_{23}) \quad -p_3^2 A_{13} A_{33}$$

のようになる。ここで、もし  $u_{ij} > 0$ 、 $A_{ij} > 0$ 、 $A_{ii} > 0$

だと仮定することができれば、 $\frac{\partial q_2}{\partial p_1}$ 、 $\frac{\partial q_3}{\partial p_1}$  それぞれに含まれる諸項はすべて負となるから、交叉価格効果が負値をとること、を一般的に断定することができる。