Title	最尤法に関する諸研究(2)
Sub Title	Papers about Maximumlikelihood Method (2)
Author	鈴木, 諒一(Suzuki, Ryoichi)
Publisher	
Publication year	1985
Jtitle	三田商学研究 (Mita business review). Vol.28, No.3 (1985. 8) ,p.65- 72
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-19850825-04053837

三田商学研究
28 巻 3 号
1985 年 8 月

研究ノート

最尤法に関する諸研究 (2)

鈴 木 諒 一

1

本稿で紹介するのは次の2論文である。

John W. Hooper "Simultaneous Equations and Canonical Correlation Theory" (Econometrica, April, 1959) pp. 12.

及び同一著者の作による

Partial Trace Correlations (Econometrica, April, 1962) pp. 8.

この2論文は計量経済学上の同時決定方式にもとづく誤差及び identification の問題では既に古典的論文とされ，他の文献にもしばしば引用されている。

前の論文から始めよう。Canonical Correlation Theory は次のように展開される。或る方程式組織における結合依存変数を y_1, ……, y_M, 先決変数を x_1, ……, x_Λ とおく。これらの変数の各々の T 個の観察値を利用することができる。したがって $T\times\Lambda$ 行列 $X=[x_\lambda(t)]$ 及び $T\times M$ 行列 $Y=[y_\mu(t)]$ と記すことができる。Canonical Correlation Theory は更に y_1, ……, y_M 及び x_1, ……, x_Λ を η_1, ……, η_M 及び ξ_1, ……, ξ_Λ に線型変換することが可能であるとする。そして

(1) 凡ての ξ 及び η の平均値は零で自乗の和は1である。

(2) 凡ての ξ は他の凡ての ξ と相関を持たず，凡ての η は他の η と無相関である。

(3) Λ と M の相関（$\Lambda\leqq M$ の場合は Λ, $\Lambda\geqq M$ の場合は M）r_1, r_2, ……を除いては ξ と η の相関は零である。即ち ξ_1 と η_1, ξ_2 と η_2 等の間にのみ相関がある。

ξ と η を Canonical variate と名付け，r_1, r_2……を Canonical correlation と呼ぶ。後者を決定するにあたっては，次の特定の Canonical variate

$$Yk=\eta\ ;\ Xh=\xi \tag{1·1}$$

について考える。ただし ξ と η とは2つの Canonical variate の T 個の観察値の行ヴェクトルであり，h と k とは Λ と M の要素の係数ヴェクトルである。自乗の和は1であるから次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}\eta'\eta=k'Y'Yk=1\\ \xi'\xi=h'X'Xh=1\end{aligned}\right\} \tag{1·2}$$

したがって η と ξ の相関は次のようになる。

$$r=\xi'\eta=h'X'Yk \tag{1·3}$$

これは h と k の変化に対して stationary でなければならない。したがって無条件で stationary になるための値を次のようにして求める。即ち

$$k'X'Yk-\frac{1}{2}\lambda_1(h'X'Xh-1)$$
$$-\frac{1}{2}\lambda_2(k'Y'Yk-1) \tag{1·4}$$

ただし λ はスカラーでラグランジの乗数である。(1·4) を h と k に関して微分すれば (1·5) を得る。

$$\left.\begin{aligned}X'Yk-\lambda_1X'Xh=0\\ Y'Xh-\lambda_2Y'Yk=0\end{aligned}\right\} \tag{1·5}$$

第1の方程式に h' を，第2の方程式に k' を乗じ，(1·2)，(1·3) と結合すれば (1·6) を得る。

$$\lambda_1=\lambda_2=r \tag{1·6}$$

(1·5)，(1·6) の第1式を結合すれば次式を得る。

$$h=\frac{1}{r}(X'X)^{-1}X'Yk$$

そして第2組の方程式と結合すれば，(1·7) を得る。

$$[(Y'Y)^{-1}Y'X(X'X)^{-1}X'Y-r^2I]k=0 \quad (1\cdot7)$$

第2階の有限確定値を持つ要素の標本の Canonical correlation を e_1, e_2 で表わせば次式を得る。

$$|\{E(Y'Y)\}^{-1}E(Y'X)\{E(X'X)\}^{-1}E(X'Y) -e^2I|=0 \quad (1\cdot8)$$

ただし E は operator の期待値である。

いま次式が成立するとする。

$$YB+X\Gamma=u \quad (1\cdot9)$$

B と Γ はパラメーター行列, u は攪乱項の YXM 行列である。この組織の誘導形は(1・10)のようになる。

$$Y=-X\Gamma B^{-1}+uB^{-1}=X\pi+\Gamma \quad (1\cdot10)$$

ただし π は誘導形係数の行列である。最小自乗法を適用すれば, (1・11)を得る。

$$Y=XP+V \quad (1\cdot11)$$

ただし $P=(X'X)^{-1}X'Y$ であるから容易に(3・12)を導出できる。

$$(Y'Y)^{-1}P'X'XP=(Y'Y)^{-1}Y'X(X'X)^{-1}X'Y =I-D \quad (1\cdot12)$$

I は M 次の unit matrix であり, D は(1・14)で, (1・7)及び(1・12)より(1・13)を得る。

$$\left.\begin{array}{l}|(Y'Y)^{-1}P'X'XP-r^2I|=0\\ \text{或いは}\quad |(I-D)-r^2I|=0\end{array}\right\} \quad (1\cdot13)$$

$X'V=0$ であるから,

$$Y'Y=P'X'XP+V'V$$

となり, これより(1・14)を得る。

$$(Y'Y)^{-1}V'V=D \quad (1\cdot14)$$

この式と(1・13)を結合すれば(1・15)を得る。

$$\left.\begin{array}{l}|(Y'Y)^{-1}V'V-(1-r^2)I|=0\\ \text{或いは}\quad |D-(1-r^2)I|=0\end{array}\right\} \quad (1\cdot15)$$

母集団の値に関して, われわれは次式を得る。

$$\left.\begin{array}{l}\Delta=\{E(Y'Y)\}^{-1}(E\bar{V}'\bar{V})\ \text{及び}\\ I-\Delta=\{E(Y'Y)\}^{-1}\pi'E(X'X)\pi\end{array}\right\} \quad (1\cdot16)$$

$E(X'\bar{V})=0$ と仮定する。そうすれば(1・8)の canonical correlation は次のようになる。

$$\left.\begin{array}{l}|\Delta-(1-e_2)I|=0\ \text{及び}\\ |(I-\Delta)-e_2I|=0\end{array}\right\} \quad (1\cdot17)$$

2

Systematic part の分析が結合依存変数の変化をどの程度まで説明できるかを考察しよう。

Hotelling の

Relations between two sets of Variates, (Biometrika, 1936) pp. 321-377.

なる論文によれば, y と x の変数の間に相互依存関係が存在しない尺度として, z の正の平方根 alienation 係数のヴェクトルを検定すればよい。ただし z は次式で定義される。

$$z=\frac{\begin{vmatrix}Y'Y & Y'X\\ X'Y & X'X\end{vmatrix}}{|Y'Y||X'X|} \quad (2\cdot1)$$

(2・1)式の分子は, $Y'X=P'X'X$ なる関係を利用すれば次のように書き換えることができる。

$$\begin{vmatrix}P'X'XP+V'V & P'X'X\\ X'XP & X'X\end{vmatrix}$$

分子の最後の Λ 列に $-P'$ を乗じ, この積に最初の M 列を加えると(2・2)を得る。

$$z=\frac{|V'V|}{|Y'Y|} \quad (2\cdot2)$$

即ちこの独立の尺度は $|D|$ と一致する。したがって(1・15)から(2・3)を得る。

$$z=|D|=\prod_{\mu=1}^{M}(1-r_\mu^2) \quad (2\cdot3)$$

ただし r_μ は Canonical correlation である。y と x の独立性の尺度として, われわれは(2・4)の正の平方根 q のヴェクトル相関係数を持つ。

$$q^2=(-1)^M\frac{\begin{vmatrix}0 & Y'X\\ X'Y & X'X\end{vmatrix}}{|Y'Y||X'X|} \quad (2\cdot4)$$

分子に $Y'X=P'X'X$ を代入し, 最後の Λ 列を $-\pi$ 倍し, 更にこの積に最初の M 列を加えれば(2・5)を得る。

$$q^2=(-1)^M\frac{|P'X'XP|}{|Y'Y|}=|(Y'Y)^{-1}P'X'XP| =|I-D| \quad (2\cdot5)$$

$|I-D|$ を latent root の積で表わせば(1・13)から, (2・6)を得る。

$$q^2=|I-D|=\prod_{\mu=1}^{M}r_\mu^2 \quad (2\cdot6)$$

かくして凡ての Canonical correlation が1なる場合にのみ q は1となり, いずれかの Canonical correlation が零なるときは q も零となる。

3

この vector alienation と相関係数の使用に対しては幾つかの異議が起った。第1に $\Lambda<M$ なるときにはヴェクトル相関係数は消滅する。第2に M が大なると

きには相関係数は零に接近する。この欠点はM番目の根をとることによって救われる。

$$\sqrt[M]{|D|}=\sqrt{\prod_{\mu=1}^{M}(1-r_\mu^2)} \quad \sqrt[M]{|I-D|}$$

$$=\sqrt[M]{\prod_{\mu=1}^{M} r_\mu^2} \qquad (3\cdot1)$$

即ち$(1-r_\mu^2)$とr_μ^2の幾何平均について考えればよい。しかし，この尺度は合計が1になるという条件を充さない。

$$\sqrt[M]{|D|}+\sqrt[M]{|I-D|}\neq 1 \qquad (3\cdot2)$$

この欠点を救うために trace correlation を使用し次式の正の根について考える。

$$\bar{r}^2=\frac{1}{M}\mathrm{tr}\,(I-D)=\frac{1}{M}\sum_{\mu=1}^{M} r_\mu^2 \qquad (3\cdot3)$$

(3·3)を(3·4)と比較する。

$$1-\bar{r}^2=\frac{1}{M}\mathrm{tr}\,D=\frac{1}{M}\sum_{\mu=1}^{M}(1-r_\mu^2) \qquad (3\cdot4)$$

これより

$$I-D^*=(X'X)^{-1}(X'Y)^{-1}Y'X \qquad (3\cdot5)$$

これは(1·12)のXとYを操作して得たものである。左辺のIはΛの unit matrix である。したがって補助定理$AB=\mathrm{tr}\,BA$より，(3·6)を得る。

$$\mathrm{tr}\,(I-D^*)=\mathrm{tr}\,(X'X)^{-1}X'Y(Y'Y)^{-1}Y'X$$
$$=\mathrm{tr}\,(Y'Y)^{-1}Y'X(X'X)^{-1}X'Y=\mathrm{tr}\,(I-D) \qquad (3\cdot6)$$

これより(3·7)を得る。

$$\Lambda\bar{r}_{xy}^2=M\bar{r}_{yx}^2 \qquad (3\cdot7)$$

もし$\Lambda=M$ならば2つの trace correlation は等しくなる。もし$\Lambda=M=1$ならば零次の相関となり，$\Lambda>M=1$ならば$\bar{r}_{yx}$は重相関係数となり，trace correlation の自乗$\bar{r}_{xy}^2$は単一のyによって「説明される」xを記述する。即ち，それはこの重相関係数の$1/\Lambda$となる。

4

前節で述べた trace correlation を sample から test する意味を検討しよう。単純な方程式組織について考える。

$$y_1=\gamma x+u \qquad (4\cdot1)$$

$$y_2=y_1+x \qquad (4\cdot2)$$

y_2を棄却し，誘導形である(4·1)だけについて考える。y_1とxの相関は次式によって決定される。

$$\frac{\rho^2}{1-\rho^2}=\frac{\gamma^2\,\mathrm{var}\,x}{\mathrm{var}\,\mu} \qquad (4\cdot3)$$

しかしy_2に関する方程式が$y_2=(1+r)x+u$になるようにy_1を棄却すればy_2とxの相関は次式によって決定される。

$$\frac{\rho^{12}}{1-\rho^{12}}=\frac{(1+\gamma)^2\,\mathrm{var}\,x}{\mathrm{var}\,\mu} \qquad (4\cdot4)$$

したがって$\rho\neq\rho'$である。

G. Tinter がその著 Econometrics 1952で構成したアメリカの肉市場に関する方程式は次の如くであった。

$$y_1=\beta y_2+\gamma_1x_1+u_1 \qquad (4\cdot5)$$

$$y_1=\beta' y_2+\gamma_2x_2+r_3x_3+u_2 \qquad (4\cdot6)$$

(4·5)は需要関数，(4·6)は供給関数である。y_1は1人当り肉の消費量，y_2はその小売価格，x_1は1人当り実質可処分所得，x_2は肉の工程費用，x_3は農産物の生産費である。凡ての観察値は年単位で1919—41年にわたっている。このデータから，われわれは次の方程式を得る。

$$Y'Y=\begin{bmatrix}1,369.54 & -352.55\\ & 1,581.49\end{bmatrix} \qquad (4\cdot7)$$

及び

$$(Y'Y)^{-1}=\begin{bmatrix}0.00077460 & 0.00017268\\ & 0.00067080\end{bmatrix}$$

誘導形の行列に最小自乗法を適用すれば，残差は次のようになる。

$$V'V=\begin{bmatrix}694.117 & -560.188\\ & 643.563\end{bmatrix} \qquad (4.8)$$

したがって

$$\left.\begin{aligned}D&=\begin{bmatrix}0.44903 & -0.32279\\ -0.25591 & 0.33497\end{bmatrix}\\ I-D&=\begin{bmatrix}0.55907 & 0.32279\\ 0.25591 & 0.66503\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \qquad (4\cdot9)$$

canonical correlation は次式から得られる。

$$|(I-D)-r^2I|=0 \qquad (4\cdot10)$$

これを解けば$r_1^2=0.90432$，$r_2^2=0.31979$を得る。ヴェクトル相関係数の自乗は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}q^2&=|I-D|=0.28919\\ q&=0.5378\end{aligned}\right\} \qquad (4\cdot11)$$

Vector alienation coefficient は(4·12)で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}z&=|D|=0.065091\\ \sqrt{z}&=0.2551\end{aligned}\right\} \qquad (4\cdot12)$$

この場合$M=2$で，$\sqrt{z}$とqはそれぞれ幾何平均である。

Trace-correlationの自乗に関しては(4·13)が得られる。

$$\left.\begin{aligned}\bar{r}^2&=\frac{1}{M}\mathrm{tr}\,(I-D)=0.61205\\ \bar{r}&=0.7823\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot13)$$

又

$$\left.\begin{aligned}1-\bar{r}^2&=\frac{1}{M}\mathrm{tr}\,D=0.38795\\ \sqrt{1-\bar{r}^2}&=0.6229\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot14)$$

xが正常分布をなすとする仮定の下では trace correlation の計測値は(5·15)のようになる。

$$\mathrm{var}\,\bar{r}^2=\frac{4}{TM^2}\sum_{\mu=1}^{2}r_\mu^2(1-r_\mu^2)^2=0.0067933\qquad(4\cdot15)$$

そしてxが fixed variates であるという仮定の下では(4·16)が導かれる。

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\,\bar{r}^2&=\frac{2}{TM^2}\sum_{\mu=1}^{2}r_\mu^2(1-r_\mu^2)^2(2-r_\mu^2)\\&=0.0056018\end{aligned}\qquad(4\cdot16)$$

(5·13)の結果を解釈すれば，結合依存変数の一般化されたvarianceの約3/5は回帰直線によって計算され，2/5が「説明されず」として残る。したがって trace correlation の意味は (4·15)，(4·16) によってテストされなければならない。

5

続いて1962年の論文の紹介に入ろう。2組の変数 $y_1, \cdots\cdots, y_M$ と $x_1, \cdots\cdots, x_\Lambda$ が存在するとする。これらの変数の観察値はT個存在し，データの全体の set はYに関しては TXM matrix, X に関しては $TX\Lambda$ matrix で記すことができるとする。X行列を次のように分割する。

$$X=[X_1\ X_2]\qquad(5\cdot1)$$

ただし X_1はT要素の Λ_1 行を持ち，X_2 は Λ_2 行を持つ。($\Lambda_1+\Lambda_2=\Lambda$) canonical partial correlation を定義するため，(6·2)を設定する。

$$\left.\begin{aligned}Y&=X_2\beta_1+\bar{V}_1\\ X_1&=X_2\beta_2+\bar{V}_2\end{aligned}\right\}\qquad(5\cdot2)$$

ただし β_1 と β_2 は未知の parameter matrix でそれぞれ Λ_2XM 及び $\Lambda_2X\Lambda_1$ 次のものとなる。又，$\bar{V}_1=[v_{t\mu}]$ と $\bar{V}_2=[v_{t\lambda_1}]$ は TXM と，$TX\Lambda_1$ なる攪乱項の行列を持つ。

したがって (6·2) の計測値として (5·3) 式が導かれる。

$$\left.\begin{aligned}Y&=X_2\hat{\beta}_1+V_1\\ X_1&=X_2\hat{\beta}_2+V_2\end{aligned}\right\}\qquad(5\cdot3)$$

ただし $\hat{\beta}_1=(X_2'X_2)^{-1}X_2'Y$

$\hat{\beta}_2=(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1$

は最小自乗法による計測値であり，V_1とV_2は計測された攪乱項の行列である。$V_1=Y-X_2\hat{\beta}_1$ と $V_2=X_1-X_2\hat{\beta}$ の間に零次の canonical correlation が存在するという前提の下に sample canonical correlation が導かれる。自乗された canonical correlation は零と1の中間の値をとり，行列 $C_1^{-1}W'C_2^{-1}W$ の latent root となる。ただし

$$\left.\begin{aligned}C_1&=[Y'Y-Y'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'Y]\\ C_2&=[X_1'X_1-X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1]\\ W&=[X_1'Y-X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'Y]\end{aligned}\right\}\qquad(5\cdot4)$$

である。この結果を同時決定方程式に適用すれば次の誘導形方程式について考えればよい。

$$Y=X\pi+\bar{V}\qquad(5\cdot5)$$

ただしπは誘導形の係数行列であり，$\bar{V}$は攪乱項の TXM 行列である。Xの分割に対応してπも次のように分割する。

$$Y=X_1\pi_1+X_2\pi_2+\bar{V}\qquad(5\cdot6)$$

ただし π_1 及び π_2 はそれぞれ誘導形係数の Λ_1XM 及び Λ_2XM 行列である。これらの計測値は最小自乗法による P_1 及び P_2 によって与えられる。

$$\left.\begin{aligned}P_1&=C_2^{-1}W\\ P_2&=(X_2'X_2)^{-1}[X_2'Y-(X_2'X_1)C_2^{-1}W]\end{aligned}\right\}\qquad(5\cdot7)$$

計測された誘導形は次のように記すことができる。

$$Y=X_1P_1+X_2P_2+V\qquad(5\cdot8)$$

ただしVは計算された残差の TXM 行列である。これを単純化すれば結合依存変数の計測された moment matrix は次のように記すことができる。

$$Y'Y=W'C_2^{-1}W+Y'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'Y+V'V\qquad(5\cdot9a)$$

或いは

$$C_1=W'C_2^{-1}W+V'V\qquad(5\cdot9b)$$

(5·9b) の左辺 C_1 は結合依存変数の計測された条件付 moment matrix である。

(5·9)から(5·10)を導くことは容易である。

$$C_1^{-1}W^{1\prime}C_2^{-1}W=I-F\qquad(5\cdot10)$$

ただしIはM次の unit matrix であり，Fは次式で定義される。

$$F=C_1^{-1}V'V\qquad(5\cdot11)$$

この結果は次のことを意味する。

$$|(I-F)-r^2I|=0\qquad(5\cdot12)$$

(6・10) と (6・11) から (6・13) を得る。

$$|F-(1-r^2)I|=0 \qquad (5\cdot 13)$$

ここに $C_1^{-1}W'C_2^{-1}W=I-F$ は単一変数と独立変数の conditional variance の積と単一方程式モデル内のこれら変数の conditional covariance の自乗の比である。

6

スカラーの研究に入ろう。

$$f[P(I-F)P^{-1}]=f[I-F] \qquad \text{(i)}$$

$$f(I-F)+f(F)\equiv 1 \qquad \text{(ii)}$$

$$0\leq f(I-F)\leq 1 \qquad \text{(iii)}$$

部分相関係数の本質を理解するためには上式が成立しなければならない。f は $(I-F)$ の関数であり，P は nonsingular transformation matrix である。(i)式によって関数 f の値は x と y の測定尺度に拘わりのないものとなる。したがって部分 trace 相関係数 $\bar{r}^2_{yx_1\cdot x_2}$ の正の平方根となる。ただし

$$\bar{r}^2_{yx_1\cdot x_2}=(1/M)\,\mathrm{tr}\,(I-F)=(1/M)\sum_{\mu=1}^{M} r_\mu{}^2 \qquad (6\cdot 1)$$

これより又，次式を得る。

$$1-\bar{r}^2_{yx_1\cdot x_2}=(1/M)\,\mathrm{tr}\,F=(1/M)\sum_{\mu=1}^{M}(1-r_\mu{}^e) \qquad (6\cdot 2)$$

ここで若干の特殊な場合を論じよう。$M=\Lambda_1=1,\ \Lambda_2\geq 1$ ならば，partial trace correlation は単一方程式に於ける部分相関係数になる。$\Lambda_2=0$ のときは partial trace correlation は trace correlation となる。したがって $M=\Lambda_1=1$ ならば零次の相関係数を得る。$M=1,\ \Lambda_1>1,\ \Lambda_2\geq 1$ の場合は multiple partial correlation coefficient を得る。

7

特定の Partial trace correlation が sample から得られる場合に asymptotic sampling variance について考えよう。$[YX_1X_2]$ の T 列の各々が $[M+\Lambda]$ 次元の平均値零を持った正常分布から抽出された独立の random 変数であるとする。(6・1) の partial trace correlation によって，われわれは (7・1) を得る。

$$M\bar{r}^2_{yx_1\cdot x_2}=\sum_{\mu=1}^{M} r_\mu{}^2 \qquad (7\cdot 1)$$

微分商をとれば，(7・2) が導かれる。

$$M\bar{r}_{yx_1\cdot x_2}d\bar{r}_{yx_1\cdot x_2}=\sum_{\mu=1}^{M} r_\mu dr_\mu \qquad (7\cdot 2)$$

自乗して期待値を求めれば，大標本のときは次のようになる。

$$M^2\bar{\rho}^2_{yx_1\cdot x_2}\,\mathrm{var}\,\bar{r}_{yx_1\cdot x_2}=\sum_{\mu\mu'}\rho_\mu\rho_{\mu'}\,\mathrm{cov}\,(r_\mu,r_{\mu'}) \qquad (7\cdot 3)$$

ただし $\bar{\rho}^2_{yx_1\cdot x_2}=(1/M)\,\mathrm{tr}\,(I-\phi)$ は partial trace correlation の自乗である。これより次式を得る。$\mu\neq\mu'$ に対して

$$\mathrm{var}\,r_\mu=(1/T)\,(1-\rho_\mu{}^2)^2\,;\ \mathrm{cov}\,(r_\mu r_{\mu'})=0 \qquad (7\cdot 4)$$

したがって

$$\mathrm{var}\,\bar{r}_{yx_1\cdot x_2}=\frac{1}{TM^2\bar{\rho}^2_{yx_1\cdot x_2}}\sum_{\mu=1}^{M}\rho_\mu{}^2(1-\rho_\mu{}^2)^2 \qquad (7\cdot 5)$$

を得る。更に $\bar{r}^2_{yx_1\cdot x_2}=4\bar{\rho}^2_{yx_1\cdot x_2}\,\mathrm{var}\,\bar{r}_{yx_1\cdot x_2}$ であるから (7・6) を導くことができる。

$$\mathrm{var}\,\bar{r}^2_{yx_1\cdot x_2}=\frac{4}{TM^2}\sum_{\mu=1}^{M}\rho^2(1-\rho^2)^2 \qquad (7\cdot 6)$$

× × ×

以上が最尤法に関する Hooper の古典的誤差論の大要である。彼は主として special case について述べているが，その一般化は今日でも成功しているとは思えない。

8

次にこれに関連する論文として

E. J. Hannan, Canonical Correlation and Multiple Equation Systems in Economics, (Econometrica, Jan., 1967) pp. 16.

を紹介しよう。

先ず古典的命題から出発する。Y_Δ と X を以てそれぞれ G^Δ と K の列と $n(\geq\max(G^\Delta,K))$ なる行を持つ 2 つの matrix であるとする。それらの列は n 次元の space R^n に於て 2 つの平面を持つ。したがって $P=\min(G^\Delta,K)$ なる orthonormal vector が存在し，Y space に於ては discriminant function η_i が成立し，X space に於ては ξ_j が成立する。ただし $\xi_j,\ \eta_j$ のいずれの組合せに関しても同時に逆数になる場合を除く。したがって ξ_1 と η_1 の間のなす角度は両平面の 2 つのヴェクトルの中で最小のものとなる。ξ_j と η_j の間になす cosine r_j は j 番目の cannonical correlation

と呼ばれる。それはマイナスになることはない。かくして

線型方程式

$$BY+\Gamma X=U \qquad (8\cdot1)$$

について考察することになる。ここにBはG列とG行の行列で，non-singular である。Γ はG列とK行の matrix であり，YはG列とn行の matrix である。各行は結合依存変数の観察値であり，XはK列とn行の観察値を含むがこれは先決変数にかかわるものである。行列UはG列とn行から成る攪乱値である。

$$\left.\begin{array}{l} D=Y_\Delta X'(XX')^{-1} \\ \eta_j'=\hat{a}_j'Y_\Delta,\ \xi_j'=r_j^{-1}\hat{a}_jDX,\ \hat{a}_jY_\Delta Y_\Delta'\hat{a}_j=1 \end{array}\right\} (8\cdot2)$$

$$\left.\begin{array}{l} [r_j^2Y_\Delta Y_\Delta'-Y_\Delta X'(XX')^{-1}XY_\Delta']a_j=0 \\ |r_j^2Y_\Delta Y_\Delta'-Y_\Delta X'(XX')^{-1}XY_\Delta'|=0 \end{array}\right\} (8\cdot3)$$

定義により $r_1^2\geqq r_2^2\geqq\cdots\cdots\geqq r_P^2$ であり，又 ξ_j は η_j に対して orthogonal (直角) である。更に次のヴェクトル $\{\max(G^\Delta, K)-P\}$ を見出すことができる。このヴェクトルは凡ての ξ_j, η_k に対して直角の平面を形成する。ヴェクトル $\hat{a}_j$ を discriminant function 係数と呼ぶ。Y_Δ を以て行ヴェクトルから構成されるものとし，これは独立$N(0, \Sigma_\Delta)$を以て平均値零, covariance-matrix Σ_Δ の正常分布を示すものと仮定すれば統計学的には次式が成立する。

$$\Lambda(n, G^\Delta, K)=\frac{|Y_\Delta Y_\Delta'-Y_\Delta X'(XX')XY_\Delta'|}{|Y_\Delta Y_\Delta'|}$$

$$=\prod_1^P(1-r_j^2)$$

この分布は既知であり，近似的に次のように記すことができる。即ち，

$$-\left(n-\frac{1}{2}(G^\Delta+K+1)\log_e\Lambda(n, G^\Delta, K)\right.$$

この式のカイ自乗は $G^\Delta K$ の自由度を持つ。このことは Y_Δ と X の独立性に適用できる。もし

$$X=\begin{bmatrix} X_* \\ X_{**} \end{bmatrix}$$

であり，若干の G^Δ と K^* が行列 $\pi_{\Delta,*}$, $Y_\Delta-\pi_{\Delta,*}X_*=N(0, \Sigma_\Delta)$ であるならば，X_* に対して完全に直角な傾斜を以て Y_Δ と X_{**} が結合される。かくして Y_Δ の代りに $Y_\Delta E_{**}$ を，X_{**} の代りに $X_{**}E_*$ を置き換えれば次式が成り立つ。

$$E_*=[I-X_*'(X_*X_*')^{-1}X_*]$$

行列 E_* は R^n の X_*列によって形成された平面の余角に投影する。もし X_* の K^* 列と X_{**} の $K^{**}(=K-K^*)$ が存在するならば，一般に $P^*=\min(G^\Delta, K^{**})$ は零ではない規範的な相関 r_j^* が $Y_\Delta E_*$ と z の間に存在する。そして

$$\Lambda(n-K^*, G^\Delta, K^{**})=\frac{|Y_\Delta E_*Y_\Delta'-Y_\Delta(ZZ')^{-1}ZY_\Delta'|}{|Y_\Delta E_*Y_\Delta'|}$$

$$=\frac{|Y_\Delta Y_\Delta'-Y_\Delta X'(XX')^{-1}XY_\Delta'|}{|Y_\Delta E_*Y_\Delta'|}=\prod_1^{P^*}(1-r_1^{*2})$$

となり，これより次式を得る。

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1(Y_\Delta-\pi_{\Delta,*}X_*)=0 \\ -m\log_e\prod_1^{q^*}(1-r_j^{*2}) \\ m=\{n-k^*-\frac{1}{2}(G^\Delta+K^{**}+1)\} \end{array}\right\} (8\cdot4)$$

ところで，

$$B_\Delta Y_\Delta+\Gamma_*X_*=u_1 \qquad (8\cdot5)$$

について考察すれば，少くとも (G_1-1) 個の要素が次式の各列に存在する。

$$[B_\Delta : \Gamma_*] \qquad (8\cdot6)$$

したがって

$$C[B:\Gamma]=\begin{bmatrix} C_\Delta & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}[B:\Gamma]=\begin{bmatrix} C_\Delta & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} B_\Delta & 0 & \Gamma_* & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

もし $|B_\Delta : \Gamma_*|$ の各列の中に (G_1-1) の零に指定された要素が存在するならば，$K^{**}\geqq G^\Delta-G_1$ である。(8・5)式の特定の列に於て B_Δ 列の中に係数零と規定された m_1 が存在し，Γ_* の列の中に $m_2(=G_1-1-m_1)$ が存在するとしよう。かくして次式を得る。

$$G^\Delta-m_1-1\leqq K^{**}+m_2$$

即ち

$$G^\Delta-G_1\leqq K^{**}$$

となる。われわれは更に次の条件を附加する。

$$n<\max(G^\Delta+K^{**}, K)$$

これより次の命題を得る。

命題 (8・1) 完全に identify された方程式組織は nonintersecting maximal subsytem に分解される。

誘導形 $Y=\pi X+V$, $V=B^{-1}$, $\pi=-B^{-1}\Gamma$ について考察するとき，次のように展開できる。

$$Y_\Delta=\Pi_{\Delta,*}X_*+V_\Delta$$

$$\Pi=\begin{bmatrix} \pi_{\Delta*} & \pi_{\Delta,**} \\ \pi_{\Delta\Delta*} & \pi_{\Delta\Delta,**} \end{bmatrix}$$

命題(8・2) もし V_Δ が独立の行から構成され，この独立の行が $N(0, \Sigma_\Delta)$ であるとすれば ML (Maximum Likelihood Method) による (8・5)式の B_Δ と Γ_* の計測値は次式から得られる。

$$[\hat{B}_\triangle : \Gamma_*]=\hat{W}[\hat{A} : -\hat{A}_1\hat{\Pi}_{\triangle *}]$$

この命題を容認すれば次式が導かれる。

(i) $M_{\triangle, z}=n^{-1}Y_\triangle X'$

(ii) $M_{\triangle, z}M_{z, z}^{-1}M_{z, \triangle}=M_{\triangle, z}M_{z, z}^{-1}M_{z, \triangle}$
$-M_{\triangle, *}M_{**}^{-1}M_{*\triangle}$

これを解いて

(iii) $[r_j^{*2}(M_{\triangle, \triangle}-M_{\triangle, *}M_{*, *}^{-1}M_{*, A})$
$-M_{\triangle, z}-M_{z, z}^{-1}M_{z, \triangle}]\hat{a}_j^*=0$ (8·7)

ここに r^{*2} は次式の G_1 最小解である。

$$|r^{*2}(M_{\triangle\triangle}-M_{\triangle, *}M_{**}^{-1}M^*_\triangle) -M_{\triangle z}, M_{zz}^{-1}M_{zA}|=0 \quad (8\cdot 8)$$

(iv) $\hat{\pi}_{\triangle *}=M_{\triangle, *}M_{**}^{-1}$ とおき，行列 $\hat{A}_1$ の列 a_j^* を arrange すれば次式を得る。

$$[\hat{B}_\triangle : \Gamma_*]=\hat{W}[\hat{A}_1 : -\hat{A}_1\hat{\Pi}_{\triangle, *}] \quad (8\cdot 9)$$

$G_1=1$ の場合に関して，(8·7) 式の $r_1^*=0$ とおこう。$\hat{a}_1^*$ と $\hat{\beta}_\triangle$ が同一であると仮定すれば次式が導かれる。

$$\hat{\beta}_1=-[M_{1, z}M_{z, z}^{-1}M_{z1}]^{-1}M_{1z}M_{z, z}^{-1}m_{z1}$$

したがって $\hat{\beta}_1$ は $\hat{\beta}_\triangle$ の第1の $(G^\triangle-1)$ 要素から構成されるヴェクトルである。$\tilde{\gamma}_*=-M_{**}^{-1}M_{*\triangle}\hat{\beta}_\triangle$ とおけば，次式を得る。

$$\begin{bmatrix} M_{1, z}M_{z, z}^{-1}M_{z, 1} & M_{1, *} \\ M_{*1} & M_{**} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_* \\ \tilde{\beta}_1 \end{pmatrix}= -\begin{pmatrix} M_{1, z}\ M_{z, z}^{-1}\ m_{z, 1} \\ m_{*1} \end{pmatrix}$$

これは周知の TS (two stage) 法である。

9

(i) $G_1=1$ なるときには上述の方法は LISE (Limited Information Single Equation) に帰着する。

(ii) もし $G_\triangle=G_1$ にして $K^{**}=0$ ならば，この組織は just identifiable である。したがって G_1 に関して零の根が存在ししたがって X_* に対する $Y_\triangle$ の誘導形回帰方程式が実現し，(8·9) の特殊ケースを解けば次式が導かれる。

$$[\hat{B}_\triangle : \Gamma_*]=\hat{W}[I : -\hat{\pi}_{\triangle, *}]$$

(iii) もし $G_\triangle=G_1$ にして $K^{**}\geqq 0$ ならば subsystem は complete で FIML (Full Information Maximum Likelihood Method) に帰着する。

(iv) もし $G_\triangle-G_1=K^{**}$ であるならば (8·8) の G_1 には零の根が存在し，A_1 が次式で定まるような解が存在する。

$$M_{z, \triangle}\hat{A}_1'=0$$

これより G_1 は線型で独立な解を持つ。

$$[\hat{B}_\triangle : \hat{\Gamma}_*]=\hat{W}[\hat{A}_1 : -\hat{A}_1\hat{\Pi}_{\triangle *}]$$

(v) もし (8·5) の各列の凡ての零要素が $Y_\triangle$ の set に属するならば，その列は LISE に帰着する。$\eta_1, \cdots\cdots, \eta_{G\triangle}$ を以て X_* を消去した後の X_{**} に関する $Y_\triangle$ の discriminant Function としよう。$G^\triangle>K^{**}$ なる場合，これらの中の或るものは正規相関に一致する。又，$\xi_1, \cdots\cdots, \xi_{G\triangle}$ を以て X_{**} の discriminant function であるとする。$r_1^*, \cdots\cdots, r_{G\triangle}^*$ はこれら ξ が unit length を持った場合の正規相関とする。即ち，

$$\eta_0=\sum_1^{G\triangle}\alpha_j\eta_j,\ \sum\alpha_j^2=1$$

である。これに対応する X_{**} の discriminant function

$$\varphi_0=\sum\alpha_j r_j^*\varphi_j$$

である。したがって次式が成立する。

$$r_0^2=\sum\alpha_j^2\gamma_j^{*2}$$

ここで一例として $G^\triangle=4$, $G_1=2$, $K^*=1$, $K^{**}=5$, $n=15$ とし，

y_{1t} イギリスの紡績糸の家庭消費

y_{2t} 紡績糸の価格水準

y_{3t} イギリス綿紡糸の生産費

y_{4t} イギリスに於ける綿紡糸の消費者の所得

t 1924—38年の間の年

$$15.10^6[M_{\triangle, \triangle}-M_{\triangle, *}M_{*, *}^{-1}M_{*\triangle}]=\begin{pmatrix} 82700 & -84173 & -36393 & +35420 \\ & 172690 & 71874 & -32980 \\ & & 31240 & -13220 \\ & & & 26440 \end{pmatrix}$$

$$15.10^6[M_{\triangle, \triangle}-M_{\triangle, z}M_{z, z}^{-1}M_{z, \triangle}]=\begin{pmatrix} 13455 & -3378 & -3518 & -1808 \\ & 15671 & 9054 & 2597 \\ & & 5879 & 1956 \\ & & & 1278 \end{pmatrix}$$

相関係数は次の如くである。

$1-r_1^{*2}=0.01278 \qquad 1-r_2^{*2}=0.07809$

$1-r_3^{*2}=0.533249 \qquad 1-r_4^{*2}=0.92940$

$$m=\left\{15-1-\frac{1}{2}(4+5+1)\right\}=9$$

もし t と共に変化しない2つの構造的関係が存在するとすれば

$$-m\log_e(1-r_3^{*2})(1-r_4^{*2})$$

は $(G^\triangle-2)(K^{**}-2)=6$ の自由度を持つカイ自乗になるであろう。かくして次の結果を得る。

$$-0.596(y_{1,t}-\bar{y}_1)-2.244(y_{2,t}-\bar{y}_2)$$
$$+5.431(y_{3,t}-\bar{y}_3)+(y_{4,t}-\bar{y}_4)=0$$
$$-1.177(y_{1,t}-\bar{y}_1)+0.70(y_{2,t}-\bar{y}_2)$$
$$-2.907(y_{3,t}-\bar{y}_3)+(y_{4,t}-\bar{y}_4)=0$$

もし需要方程式から y_3 が脱落するか，又は供給方程式から y_4 が脱落するならば，次式が成立する。

$$(y_{1,t}-\bar{y}_1)=-0.310(y_{2,t}-\bar{y}_2)+1.029(y_{4,t}-\bar{y}_4)$$
$$(y_{1,t}-\bar{y}_1)=5.179(y_{2,t}-\bar{y}_2)-14.469(y_{3,t}-\bar{y}_3)$$

(iv) もし Γ_* の要素の中に零なる項が存在するとすれば，誘導形は LISE（単純最小自乗法）にはならない。これは次のようにして証明される。先ず

$$[\hat{B}_\Delta Y_\Delta+\hat{\Gamma}_* X_*]X_*'=0$$

より次式を得る。

$$\hat{W}[\hat{A}_1 Y_\Delta-\hat{A}_1\hat{\Pi}_{\Delta,*}X_*]X_*'$$
$$=n\hat{W}[\hat{A}_1 M_{\Delta,*}-\hat{A}_1 M_{\Delta,*}]$$

しかし，（8·5）式のある列に於ては Γ_* の或る要素が零と指定されているから，（8·5）式の左辺の計測値のうち，この列に関する最小自乗法の適用は X_{**} の中 X_* を除外した他の列との相関が非常に小さいとの前提に立つものである。

× × ×

以上が本論文の大要であるが実際の計測にあたっては special case しか適用されていず一般的な応用段階にはなお立ち至っていない点に問題が残されている。