三田商学研究
23 巻 1 号
1980 年 4 月

論文紹介

Arnold Zellner and H. Theil, "Three-Stage Least Squares: Simultaneous Estimations of Simultaneous Equations"

1

1960年代には2段階或いは3段階最小自乗法にもとづく誤差の問題が活潑に論ぜられた。その一端は本誌にも紹介したが，ここで紹介する。

Arnold Zellner and H. Theil : Three-Stage Least Squares; Simultaneous Estimation of Simultaneous Equations, (Econometrica, Jan., 1962) p. 25.

はこの方面の分析に関する代表的な論文で他の文献にも多く引用されている。

本論文は先ず3段階最小自乗法の説明から始まる。

T……観察値の数

y_μ……結合依存変数の行ヴェクトル

Y_μ……方程式中の説明依存変数の $T\times m_\mu$ 行列

γ_μ……Y_μ に対応する係数のヴェクトル

X_μ……説明先決変数の $T\times l_\mu$ 行列

β_μ……X_μ の係数ヴェクトル

u_μ……構造攪乱項の T 行ヴェクトル

とすれば，(1·1) 式が成立する。

$$y_\mu=Y_\mu\gamma_\mu+X_\mu\beta_\mu+u_\mu=Z_\mu\delta_\mu+u_\mu \qquad (1\cdot1)$$

ただし，

$$Z_\mu=[Y_\mu\ X_\mu],\quad \delta_\mu=\begin{bmatrix}\gamma_\mu\\ \beta_\mu\end{bmatrix} \qquad (1\cdot2)$$

である。更に凡ての先決変数 Λ の値の $T\times\Lambda$ 行列を X で表わす。われわれの目的はパラメーターのヴェクトル δ_μ を計測することであり，この目的のためには凡ての方程式が identifiable でなければならない。このことは次の式の成立を意味する。

$$\Lambda\geqq n_\mu=m_\mu+l_\mu \qquad (1\cdot3)$$

ただし n_μ は μ 番目の方程式において計測された係数の数である。

単一最小自乗法による2段階最小自乗法について考える。(1·1) 式の両辺に X' を掛ければ (1·4) 式を得る。

$$X'y_\mu=X'Z_\mu\delta_\mu+X'u_\mu \qquad (1\cdot4)$$

この特殊ケースとして (just-identifiable) $\Lambda=n_\mu$ なる場合を考えれば，次式によって δ_μ を計測することができる。

$$d_\mu=(X'Z_\mu)^{-1}X'y_\mu \qquad (1\cdot5)$$

即ち，(1·4) の計測値 d_μ を δ_μ に置き代え，同時に $X'u_\mu$ の代りにその期待値を代入するのである。これより一般的なケースに於ては，$\Lambda>n_\mu$ であるから，(1·4) を使用することに変りはないが，以後の計算が複雑になる。先決変数の凡てを「固定値」と仮定して攪乱項ヴェクトルの co-variance $X'u_\mu$ を導出する。

$$V(X'u_\mu)=E(X'u_\mu u'_\mu X)=\sigma_{\mu\mu}X'X \qquad (1\cdot6)$$

ただし $\sigma_{\mu\mu}$ は μ 番目の構造方程式の T 攪乱項の各々の variance である。したがって Aitken の

On Least-Squares and Linear Combination of Observations (1934-35)

なる論文によって示された手法を応用すれば次式を得る。

$$Z'_\mu X(\sigma_{\mu\mu}X'X)^{-1}X'y_\mu$$
$$=Z'_\mu X(\sigma_{\mu\mu}X'X)^{-1}X'Z_\mu d_\mu \qquad (1\cdot7)$$

この式から2段階最小自乗法の計測値を求めることができる。

$$d_\mu=[Z'_\mu X(X'X)^{-1}X'Z_\mu]^{-1}$$
$$Z'_\mu X(X'X)^{-1}X'y_\mu \qquad (1\cdot8)$$

$X'Z_\mu$ が square で且つ non-singular となる特殊の

場合に於ては，この式は (1·5) と一致する。d_μ の co-variance matrix は次のようになる。

$$V(d_\mu)=\sigma_{\mu\mu}[Z'_\mu X(X'X)^{-1}X'Z_\mu]^{-1}+o\left(\frac{1}{T}\right) \tag{1·9}$$

ただし $o\left(\frac{1}{T}\right)$は$\frac{1}{T}$より小なる高次の冪の項を示す。

次に Complete System に於ける3段階最小自乗法の問題をとり上げる。この場合 (1·4) は次の形で表わすことができる。

$$\begin{pmatrix} X'y_1 \\ X'y_2 \\ \vdots \\ X'y_M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X'Z_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & X'Z_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & X'Z_M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_M \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} X'u_1 \\ X'u_2 \\ \vdots \\ X'u_M \end{pmatrix} \tag{1·10}$$

これは ΛM個の方程式から成り，その中に次式を含む。(パラメーターの数)

$$n=\sum_{\mu=1}^{M} n_\mu \tag{1·11}$$

(1·10) 式の右辺のパラメーターの行ヴェクトル (n 個の要素を持つ) をδで表そう。したがって (2·10) に最小自乗法を適用すれば，δの全ての要素を計測することができる。この目的のために，われわれは (1·10) の攪乱項のヴェクトルの co-variance matrix を必要とする。

$$V\begin{pmatrix} X'u_1 \\ X'u_2 \\ \vdots \\ X'u_M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_{11}X'X & \sigma_{12}X'X\cdots\cdots & \sigma_{1M}X'X \\ \sigma_{21}X'X & \sigma_{22}X'X\cdots\cdots & \sigma_{2M}X'X \\ \vdots & & \\ \sigma_{M1}X'X & \sigma_{M2}X'X\cdots & \sigma_{MM}X'X \end{pmatrix} \tag{1·12}$$

ただし $\sigma_{\mu\mu'}$ はμ番目と μ' 番目の方程式の構造攪乱項の contem poraneous (同時) co-variance である。

$$E(u_\mu u'_{\mu'})=\begin{pmatrix} \sigma_{\mu\mu'} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{\mu\mu'} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \sigma_{\mu\mu'} \end{pmatrix}=\sigma_{\mu\mu'}I \tag{1·13}$$

IはT次の unit matrix である。又，われわれは (1·12) の逆行列を必要とする。

$$V^{-1}\begin{pmatrix} X'u_1 \\ X'u_2 \\ \vdots \\ X'u_M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma^{11}(X'X)^{-1} & \sigma^{12}(X'X)^{-1} & \cdots\cdots\sigma^{1M}(X'X)^{-1} \\ \sigma^{21}(X'X)^{-1} & \sigma^{22}(X'X)^{-1} & \cdots\cdots\sigma^{2M}(X'X)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma^{M1}(X'X)^{-1} & \sigma^{M2}(X'X)^{-1} & \cdots\cdots\sigma^{MM}(X'X)^{-1} \end{pmatrix} \tag{1·14}$$

ただし $\sigma^{\mu\mu'}$ は構造攪乱項の contemporaneous co-variance matrix の逆行列の1項である。

$$[\sigma^{\mu\mu'}]=[\sigma_{\mu\mu'}]^{-1} \tag{1·15}$$

したがって一般化された最小自乗法をそのまま適用すれば次のようになる。(1·7) の左辺の2段階の列ヴェクトル $Z'_\mu X(\sigma_{\mu\mu}X'X)^{-1}X'y_\mu$ の代りに次式を以て置き換える。

$$\begin{pmatrix} \sigma^{11}Z'_1X(X'X)^{-1}X'y_1+\cdots\cdots+\sigma^{1M}Z'_1X(X'X)^{-1}X'y_M \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma^{M1}Z'_MX(X'X)^{-1}X'y_1+\cdots+\sigma^{MM}Z'_MX(X'X)^{-1}X'y_M \end{pmatrix}$$

そして (1·7) の右辺の2段階 $n_\mu\times n_\mu$ 行列 $Z'_\mu X(\sigma_{\mu\mu}X'X)$ は次の $n\times n$ 行列によって置き換えられる。

$$\begin{pmatrix} \sigma^{11}Z'_1X(X'X)^{-1}X'Z\cdots\cdots\sigma^{1M}Z'X(X'X)^{-1}X'Z_M \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sigma^{M1}Z'_MX(X'X)^{-1}X'Z\cdots\cdots\sigma^{MM}Z'_MX(X'X)^{-1}X'Z_M \end{pmatrix}$$

これらの行列の中に含まれるσは一般には未知である。したがってこれを2段階最小自乗法に置き換えて，これを $s^{\mu\mu'}$ とおく。かくして3段階最小自乗法の計測値は次式によって定義される。

$$\delta\begin{pmatrix} s^{11}Z'_1X(X'X)^{-1}X'Z_1\cdots\cdots s^{1M}Z'_1X(X'X)^{-1}X'Z_M \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ s^{M1}Z'_MX(X'X)^{-1}X'Z_1\cdots s^{MM}Z'_MX(X'X)^{-1}X'Z_M \end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix} \sum s^{1\mu}Z'_1X(X'X)^{-1}X'y_\mu \\ \vdots \\ \sum s^{M\mu}Z'_MX(X'X)^{-1}X'y_\mu \end{pmatrix} \tag{1·16}$$

ここで右辺の列ヴェクトルの合計は，$\mu=1$，……，M となる。δの要素行列は前述の如く，次の (1. 17) のようになる。

$$V(\hat{\delta})=\begin{Bmatrix} s^{11}Z'_1X(X'X)^{-1}X'Z_1 \cdots\cdots s^{1M}Z'_1X(X'X)^{-1}X'Z_M \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ s^{M1}Z'_MX(X'X)^{-1}X'Z_1 \cdots\cdots s^{MM}Z'_MX(X'X)^{-1}X'Z_M \end{Bmatrix}^{-1}+0\left(\frac{1}{T}\right) \tag{1·17}$$

この場合にも $[\sigma_{\mu\mu'}]$ が対角行列でない場合にのみ，2段階最小自乗法で求めた asymptotic efficiency と比較することができる。$[\sigma_{\mu\mu'}]$ が対角行列になれば2段階最小自乗法と3段階最小自乗法の結果は同一となる。何となれば，(1·17) の対角線以外の項は零となり，したがって $\sigma^{\mu\mu}=\frac{1}{\sigma_{\mu\mu}}$ となるから。

2

(1·16) によって定義された3段階最小自乗法による計測値は Aitken の直接法による結果とは2つの点に於て異なる。第1に $\hat{\delta}$ は $s^{\mu\mu'}$ の上に基礎を置いて居り，2段階最小自乗法の計測値が $\sigma^{\mu\mu'}$ の上に基礎を置いている事実と対応する。第2に (1·10) 式の中の「説明変数」の或るものはその攪乱項と相関を保っている。これは各 $X'Z_\mu$ が sub-matrix として $X'Y_\mu$ を含んで居り，この Y_μ は (1·10) の攪乱項ヴェクトルの中に入って居る u と相関を示しているからである。

この2つの困難を解決するために特別の記号を使用する。即ち (1·10), (1·12) を次の形に書き換える。

$$v=W\delta+\varepsilon\;;\; E(\varepsilon\varepsilon')=\Omega \tag{2·1}$$

V　(1·10) の左辺の行

W　右辺の ΛMxn 行列

ε　(1·10) の攪乱項のヴェクトル

Ω　(1·12) に於て特定化された co-variance matrix 要素 Ω が $0(T)$ のそれであることは容易に証明できる。Ω が σ に依存する限り，それは未知であるから3段階最小自乗法では次の方式によって置換する。

$$\Omega_e=\Omega+\Delta_1 \tag{2·2}$$

ただし Ω_e は $0(T)$ の要素，Δ_1 は $0(T)^{\frac{1}{2}}$ の要素である。したがって3段階最小自乗法は次のようになる。

$$\hat{\delta}=(W'\Omega_e^{-1}W)^{-1}W'\Omega_e^{-1}v$$

この式の標本誤差は次のようになる。

$$\hat{\delta}-\delta=(W'\Omega_e^{-1}W)^{-1}W'\Omega_e^{-1}\varepsilon \tag{2·3}$$

(2·2) に適用すれば逆数 Ω_e^{-1} は次のように記すことができる。

$$\Omega_e^{-1}=(\Omega+\Delta_1)^{-1}=\Omega^{-1}+\Delta_2 \tag{2·4}$$

Δ_2 の確率は $0\left(T^{-1\frac{1}{2}}\right)$ となる。何となれば，Ω の確率は $0(T)$ であり，Δ_1 の確率は $0\left(T^{\frac{1}{2}}\right)$ であるから。

次にわれわれは，(1·10) の「説明変数」としてとり上げた値の行列 W について考える。その対角ブロック（例えば $X'Z_\mu$）の各項は先決変数としては $(X'X_\mu)$ を含むのみであり，結合依存変数としては $(X'Y_\mu)$ を含む。したがって W の条件附期待値を $\overline{W}$ で表すならば次式を得る。

$$W=\overline{W}+\Delta_3 \tag{2·5}$$

したがって Δ_3 の多くの項は零であり，X' 型の対角行列に，これに対応する Y_μ の攪乱項を乗じた小行列のみが零でない。したがって Δ_3 の要素は $0\left(T^{\frac{1}{2}}\right)$ の確率を持ち，$\overline{W}$ の要素の確率は $0(T)$ である。(2·4) と (2·5) を結合すれば次式を得る。

$$W'\Omega_e^{-1}=(\overline{W}+\Delta_3)'(\Omega^{-1}+\Delta_2)$$
$$=\overline{W}'\Omega^{-1}\overline{W}+\Delta_5 \tag{2·6}$$

ここに於て $\overline{W}'\Omega^{-1}$ の確率は $0(1)$，Δ_4 の確率は $0\left(T^{\frac{1}{2}}\right)$ である。同様にして

$$W'\Omega_e^{-1}W=(\overline{W}'\Omega^{-1}+\Delta_4)(\overline{W}+\Delta_3)$$
$$=\overline{W}'\Omega^{-1}\overline{W}+\Delta_5$$

この場合の $\overline{W}'\Omega^{-1}$ 確率は $0(T)$ であり，Δ_5 の確率は $0\left(T^{\frac{1}{2}}\right)$ である。これより次式を得る。

$$(W'\Omega_e^{-1}W)^{-1}=(\overline{W}'\Omega^{-1}\overline{W}+\Delta_5)^{-1}$$
$$=(\overline{W}'\Omega^{-1}\overline{W})^{-1}+\Delta_6$$
$$=(\overline{W}'\Omega^{-1}\overline{W})^{-1}\overline{W}'\Omega^{-1}+\Delta_7 \tag{2·7}$$

$(\overline{W}'\Omega^{-1}\overline{W})^{-1}$ の確率は $0(T^{-1})$，Δ_6 の確率は $0(T^{-1})$ である。(2·3) と結合すれば $\hat{\delta}$ の標本誤差に関する最終式を得る。

$$\hat{\delta}-\delta=(\overline{W}'\Omega^{-1}\overline{W})^{-1}\overline{W}'\Omega^{-1}\varepsilon+\Delta_7\varepsilon \tag{2·8}$$

2段階最小自乗法が3段階最小自乗法と同一でないと云う事実は2段階最小自乗法の方が効率に於て劣ることを意味する。例を挙げて説明しよう。

3段階最小自乗法の co-variance matrix の逆数が次式に等しくなったとしよう。

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11}Z'_1X(X'X)^{-1}X'Z_1 & \sigma^{12}Z'_1X(X'X)^{-1}X'Z_2 \\ \sigma^{21}Z'_2X(X'X)^{-1}X'Z_1 & \sigma^{22}Z'_2X(X'X)^{-1}X'Z_2 \end{bmatrix} \tag{2·9}$$

これに対して2段階最小自乗法の co-variance matrix の逆数は次のようになる。

$$\left(\frac{1}{\sigma_{11}}\right)Z'_1X(X'X)^{-1}X'Z_1 \qquad (2\cdot10)$$

Xの rank は Λ となるからKなる行列が存在し，$K'K=(X'X)^{-1}$となる。これにより，(2·9)，(2·10) を次のように記すことができる。

$$\begin{bmatrix}\sigma^{11}A'_1A_1 & \sigma^{12}A'_1A_2\\ \sigma^{21}A'_2A_1 & \sigma^{22}A'_2A_2\end{bmatrix} \text{及び} \left(\frac{1}{\sigma_{11}}\right)A'_1A_1$$

ただし $A_\mu=KX'Z_\mu$ である。A_1 の order は Λxn_1 であり，rank は n_1, A_2 の order は ΛXn_2, rank は n_2 である。更に $\sigma_{\mu\mu'}$ 行列を次のように記すことができる。

$$\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

したがってその逆数は次のようになる。

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & \dfrac{1}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)}\\ \dfrac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \dfrac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)}\end{pmatrix}$$

又，(2·9) の逆数は次のようになる。

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sigma^2(1-\rho^2)}A'_1A_1 & \dfrac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)}A'_1A_1\\ \dfrac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)}A'_2A_1 & \dfrac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)}A'_3A_2\end{pmatrix}$$

したがってその逆数の n_1, Xn_1 小行列はそれ自体次式の逆数となる。

$$Q^*=\frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)}A'_1A_1 - \frac{\rho^2}{\sigma_1^2(1-\rho^2)}A'_1A_2(A'_2A_2)^{-1}A'_2A_1 \qquad (2\cdot11)$$

これにより第一方程式の３段階要素行列は Q^{*-1} となり，２段階の要素行列は $Q^{-1}=\sigma_1^2(A'_1A_1)^{-1}$ となる。

第２方程式が just-identified であるとしよう。このことは $\Lambda=n_2$ で A_2 が square であることを意味する。又，それが non singular であるとすれば次のように記すことができる。

$$A'_1A_2(A'_2A_2)^{-1}A'_2A_1 =A'_1A_2A_2^{-1}A'_2{}^{-1}A'_2A_1=A'_1A_1$$

したがって (2·11) は $Q^*=\left(\frac{1}{\sigma_1^2}\right)A'_1A_1=Q$ と単純化される。

しかし第２方程式が over-identified で $\Lambda>n_2$ の場合には A_2 の列の数は行の数よりも多くなるから次式のようになる。

$$A'_1A_2(A'_2A_2)^{-1}A'_2A_1=A'_1A_1-A^*$$

A^* は正の semi-definite matrix である。したがって (2·11) は次のようになる。

$$Q^*=\frac{1}{\sigma_1^2}A'_1A_1+\frac{\rho^2}{\sigma_1^2+(1-\rho^2)}$$

$$=Q+\frac{\rho^2}{\sigma_1^2(1-\rho^2)}A^*$$

3

更に identification の問題を詳述しよう。over-identifid equation の数を P, just-identified equation の数を$M-P$とおく。更に前者を１，……P，後者を$P+1$，……，Mとする。凡ての方程式Mに３段階最小自乗法を適用すれば

$$\begin{bmatrix}G_1 & G_3\\ G'_3 & G_2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}H_1 & H_3\\ H'_1 & H_2\end{bmatrix} \qquad (3\cdot1)$$

添字１は over-identified equation に関するもの，添字２は just-identified equation に関するもので，添字３は両者の混合を示す。

$$G_1=\begin{pmatrix}\sigma^{p1}A'_1A'_1\cdots\cdots\cdots\cdots\sigma^{1p}A'_1A_p\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma^{p1}A'_pA_1\cdots\cdots\cdots\cdots\sigma^{pp}A'_pA_p\end{pmatrix}$$

$$G_2=\begin{pmatrix}\sigma^{qq}A'_qA_q\cdots\cdots\cdots\sigma^{qM}A'_qA_M\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma^{Mq}A'_MA_q\cdots\cdots\sigma^{MM}A'_MA_M\end{pmatrix}$$

$$G_3=\begin{pmatrix}\sigma^{1}A'_1A_q\cdots\cdots\cdots\sigma^{1M}A'_1A_M\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma^{pq}A'_pA_q\cdots\cdots\cdots\sigma^{pM}A'_pA_M\end{pmatrix} \qquad (3\cdot2)$$

A_μ は $KX'Z$ に等しいからKは平方であり，$K'K=(X'X)^{-1}$ である。部分的な掛け算をすることによって，われわれは (3·1) から (3·3) を得る。

$$H_1=(G_1-G_3G_2^{-1}G'_3)^{-1}$$
$$H'_3=-G_2^{-1}G'_3H_1$$
$$H_2=-G_2^{-1}+G_2^{-1}G'_3H_1G_3G_2^{-1} \qquad (3\cdot3)$$

$\mu\geq$ なる限り凡てのA_μが平方であると云う事実を考慮すれば次式が導かれる。

$$G_2^{-1}=\begin{pmatrix}\tau_{qq}A_q^{-1}A'_q{}^{-1}\cdots\cdots\cdots\tau_{qM}A_q^{-1}A'_M{}^{-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \tau_{Mq}A_M^{-1}A'_q{}^{-1}\cdots\cdots\tau_{MM}A_M^{-1}A'_M{}^{-1}\end{pmatrix} \qquad (3\cdot4)$$

ただし

$$[\tau_{\mu\mu'}]=\begin{pmatrix}\sigma^{qq}\cdots\cdots\cdots\cdots\sigma^{qM}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma^{Mq}\cdots\cdots\cdots\sigma^{MM}\end{pmatrix}^{-1} \qquad (3\cdot5)$$

である。

G_2^{-1} に G'_3 を掛ければ次式を得る。

$$G_2^{-1}G'_3=\begin{pmatrix} v_{q1}A_q^{-1}A_1 \cdots\cdots v_{qp}A_q^{-1}A_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{M1}A_M^{-1}A_1 \cdots\cdots v_{Mp}A_M^{-1}A_p \end{pmatrix} \tag{3·6}$$

ただし

$$[v_{\mu\mu'}]=\begin{pmatrix} \sigma^{qq}\cdots\cdots\sigma^{qM} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma^{Mq}\cdots\cdots\sigma^{MM} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma^{q1}\cdots\cdots\sigma^{qp} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma^{M1}\cdots\cdots\sigma^{Mp} \end{pmatrix} \tag{3·7}$$

$G_2^{-1}G'_3$ に G_3 を掛け，その積を G_1 から差引く。(3·3) により，これは H_1 の逆数となる。

$$H_1^{-1}=\begin{pmatrix} \varphi_{11}A'_1A_1 \cdots\cdots \varphi_{1p}A'_1A_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{p1}A'_pA_1 \cdots\cdots \varphi_{pp}A'_pA_p \end{pmatrix} \tag{3·8}$$

ただし

$$[\varphi_{\mu\mu'}]=\begin{pmatrix} \sigma^{11}\cdots\cdots\sigma^{1p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma^{p1}\cdots\cdots\sigma^{pp} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \sigma^{1q}\cdots\cdots\sigma^{1M} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma^{pq}\cdots\cdots\sigma^{pM} \end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix} \sigma^{qq}\cdots\cdots\sigma^{qM} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma^{Mq}\cdots\cdots\sigma^{MM} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \sigma^{q1}\cdots\cdots\sigma^{qp} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma^{M1}\cdots\cdots\sigma^{Mp} \end{pmatrix} \tag{3·9}$$

τ, v, φ について今少しく詳細に考えよう，これらの項は $[v^{\mu\mu'}]$ の変換から生じたものであるから次式を得る。

$$\begin{pmatrix} \sigma^{11}\cdots\cdots\sigma^{1p} & \sigma^{1q}\cdots\cdots\sigma^{1M} \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \sigma^{p1}\cdots\cdots\sigma^{pp} & \sigma^{pq}\cdots\cdots\sigma^{pM} \\ \sigma^{q1}\cdots\cdots\sigma^{qp} & \sigma^{qq}\cdots\cdots\sigma^{qM} \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \sigma^{M1}\cdots\cdots\sigma^{Mp} & \sigma^{Mq}\cdots\cdots\sigma^{MM} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} R_1 & R_3 \\ R'_3 & R_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_1 & S_3 \\ S'_3 & S_2 \end{pmatrix} \tag{3·10}$$

これより次式を得る。

$$[\tau_{\mu\mu'}]=R_2^{-1}$$
$$[v_{\mu\mu'}]=R_2^{-1}R'_3$$
$$[\varphi_{\mu\mu'}]=R_1-R_3R_2^{-1}R'_3 \tag{3·11}$$

したがって $[\varphi_{\mu\mu'}]=S_1^{-1}$ であるが，S_1 は over-identified equation の攪乱項の要素行列以外の何物でもないから次式が導かれる。

$$[\varphi_{\mu\mu'}]=\begin{pmatrix} \sigma_{11}\cdots\cdots\sigma_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{p1}\cdots\cdots\sigma_{pp} \end{pmatrix}^{-1} \tag{3·12}$$

次に over-identified equation に関しての3段階最小自乗法による計測値を $\hat{\delta}_A$, just-identified equation に関する計測値を $\hat{\delta}_B$ とおけば，(1·16) に対応する方程式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} G_1 & G_3 \\ G'_3 & G_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\delta}_A \\ \hat{\delta}_B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A'_1KX'\sum\sigma^{1\mu}y_\mu \\ \vdots \\ A'_MKX'\sum\sigma^{M\mu}y_\mu \end{pmatrix}$$

したがって just-identified equation の係数ヴェクトル $\hat{\delta}_B$ は次のように記すことができる。

$$\hat{\delta}_B=G_2^{-1}\begin{pmatrix} A'_qKX'\sum\sigma^{q\mu}y^\mu \\ \vdots \\ A'_MKX'\sum\sigma^{M\mu}y^\mu \end{pmatrix}-G_2^{-1}G'_3\hat{\delta}_A \tag{3·13}$$

それ故，$\hat{\delta}_B$ は2個のヴェクトルの合計である。(3·4) と (3·5) を適用すれば第1のヴェクトルは次のように記すことができる。

$$\begin{pmatrix} A_q^{-1}KX'\sum\limits_{\gamma=q}^{M}\sum\limits_{\mu=q}^{M}\tau_{q\gamma}\sigma^{\gamma\mu}y_\mu \\ \vdots \\ A_M^{-1}KX'\sum\limits_{\gamma=q}^{M}\sum\limits_{\mu=q}^{M}\tau_{M\gamma}\sigma^{\gamma\mu}y_\mu \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} A_q^{-1}KX'y_\mu \\ \vdots \\ A_M^{-1}KX'y_\mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (X'Z_q)^{-1}X'y_q \\ \vdots \\ (X'Z_M)^{-1}X'y_M \end{pmatrix}=d_B$$

これは just-identified equation の係数の2段階最小自乗法の計測値に一致する。(3·13) の右辺の第2ヴェクトルは (3·6) を使用すれば次のようになる。

$$G_2^{-1}G'_3\hat{\delta}_A=\begin{pmatrix} v_{q1}A_q^{-1}A_1 \cdots\cdots v_{qp}A_q^{-1}A_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{M1}A_M^{-1}A_1 \cdots\cdots v_{Mp}A_M^{-1}A_p \end{pmatrix}$$
$$\hat{\delta}_A=\begin{pmatrix} (X'Z_q)^{-1}X'\sum v_{q\mu}X'Z_\mu\hat{\delta}_\mu \\ \vdots \\ (X'Z_M)^{-1}X'\sum v_{M\mu}X'Z_\mu\delta_\mu \end{pmatrix} \tag{3·14}$$

ただし $\mu=1,\cdots\cdots,P$ である。したがって just-identified の3段階最小自乗法の計測値は次のようになる。

$$\hat{\delta}_B=\begin{pmatrix} (X'Z_q)^{-1}X'\sum v_{q\mu}X'Z_\mu\hat{\delta}_\mu \\ \vdots \\ (X'Z_M)^{-1}X'\sum v_{M\mu}X'Z_\mu\hat{\delta}_\mu \end{pmatrix}$$

v は (3·7) から得られるが次の方式を用いれば一層容易である。

$$[v_{\mu\mu'}]=-S'_3S_1^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix} \sigma_{q1}\cdots\cdots\sigma_{qp} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{M1}\cdots\cdots\sigma_{Mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{11}\cdots\cdots\sigma_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{p1}\cdots\cdots\sigma_{pp} \end{pmatrix} \tag{3·15}$$

just-identified equation の3段階要素行列は，(3·3) で定義したように H_2 で表わす。これは2個の行列か

ら成るが，第1の行列は (3·4) で示したようにG_2^{-1}で表わされる。行列を $A_q^{-1}A'^{-1}_q$ のように次の形で表わすことにする。

$$(A'_qA_q)^{-1}=(Z'_qXK'KX'Z_q)^{-1}$$
$$=(X'Z_q)^{-1}X'X(Z'_qX)^{-1}$$

(3·3) の右辺の第2行列は H_1 に $G_2^{-1}G'_3$ を先ず乗じ後に $G_3G_2^{-1}$ を乗じたものである。したがって次式を得る。

$$(KX'Z_q)^{-1}KX'Z_1=(X'Z_q)^{-1}K^{-1}KX'Z_1$$
$$=(X'Z_q)^{-1}X'Z_1$$

したがって just-identified equation の3段階要素行列は次のようになる。

$$H_2=\begin{pmatrix}\tau_{pq}(X'Z_q)^{-1}X'X(Z'_qX)^{-1}\cdots\cdots\tau_{qM}(X'Z_q)^{-1}X'X(Z'_MX)^{-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \tau_{Mq}(X'Z_M)^{-1}X'X(Z'_qX)^{-1}\cdots\cdots\tau_{MM}(X'Z_M)^{-1}X'X(Z'_MX)^{-1}\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}v_{q1}(X'Z_q)^{-1}X'Z_1\cdots\cdots v^q{}_p(X'Z_q)^{-1}X'Z_p\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_{M1}(X'Z_M)^{-1}X'Z_1\cdots\cdots v_{Mp}(X'Z_M)^{-1}X'Z_p\end{pmatrix}\times H_1\begin{pmatrix}v_{1q}Z'_1X(Z'_qX)^{-1}\cdots\cdots v_{1M}Z'_1X(Z'_MX)^{-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_{pq}Z'_pX(Z'_qX)^{-1}\cdots\cdots v_{pM}Z'_pX(Z'_MX)^{-1}\end{pmatrix}\qquad(3\cdot16)$$

τ を次のように表わせば一層便利である。

$$[\tau_{\mu\mu'}]=S_2-S'_3S_1^{-1}S_3=S_2+[v_{\mu\mu'}]S_2$$
$$=\begin{pmatrix}\sigma_{qq}\cdots\cdots\sigma_{qM}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \sigma_{M1}\cdots\cdots\sigma_{Mp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{q1}\cdots\cdots\sigma_{qp}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \sigma_{M1}\cdots\cdots\sigma_{Mp}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\cdots\cdots\sigma_{1p}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \sigma_{p1}\cdots\cdots\sigma_{pp}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_{1q}\cdots\cdots\sigma_{1M}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \sigma_{pq}\cdots\cdots\sigma_{pM}\end{pmatrix}\qquad(3\cdot17)$$

同様にして just-identified equation と over identified equation の cross-moment matrix は次のようになる。

$$H'_3=-\begin{pmatrix}v_{q1}(X'Z_q)^{-1}X'Z_1\cdots\cdots v_{qp}(X'Z_q)^{-1}X'Z_p\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_{M1}(X'Z_M)^{-1}X'Z_1\cdots v_{Mp}(X'Z_M)^{-1}X'Z_p\end{pmatrix}H_1\qquad(3\cdot18)$$

結局に於て $[\sigma_{\mu\mu'}]$ が block-diagonal であれば，それは次式によって表わされる。

$$[\sigma_{\mu\mu'}]=\begin{pmatrix}\Sigma_1 & 0\cdots\cdots 0\\ 0 & \Sigma_2\cdots\cdots 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0\cdots\cdots\Sigma_k\end{pmatrix}\qquad(3\cdot19)$$

即ち3段階最小自乗法の手順は block ごとに計算していくことができる。

4

次に現実の計算に適用してみよう。

Y　結合依存変数の行列

$y_\mu, Y_\mu\cdots\cdots Y$の小行列

$$Z=[Y\quad X]\qquad(4\cdot1)$$

$Z'_1X(X'X)^{-1}X'Z_1$, $Z'_1X(X'X)^{-1}y_1$ 等は次の対称行列の小行列である。

$$Z'X(X'X)^{-1}X'Z=\begin{bmatrix}Y'X(X'X)^{-1}X'Y & Y'X\\ X'Y & X'Y\end{bmatrix}\qquad(4\cdot2)$$

$s^{\mu\mu'}$ の2段階最小自乗法による攪乱項の co-variance matrix の逆数

とすれば，(1·1) のM方程式は次のようになる。

$$[y_1y_2\cdots\cdots y_M]=[Y_1Y_2\cdots Y_M]\begin{pmatrix}\gamma_1 & 0\cdots\cdots 0\\ 0 & \gamma_2\cdots\cdots 0\\ \vdots & \vdots\qquad\vdots\\ 0 & 0\cdots\cdots\gamma_M\end{pmatrix}$$
$$+[X_1X_2\cdots\cdots X_M]\begin{pmatrix}\beta_1 & 0\cdots\cdots 0\\ 0 & \beta_2\cdots\cdots 0\\ \vdots & \vdots\qquad\vdots\\ 0 & 0\cdots\cdots\beta_M\end{pmatrix}$$
$$+[u_1u_2\cdots\cdots u_M]\qquad(4\cdot3)$$

左辺の結合依存変数の value matrix を Y_L で，右辺の従属変数を Y_R で，先決変数を X_R で表わすことにする。

$$\left.\begin{aligned}Y_L&=[y_1y_2\cdots\cdots y_M]\\ Y_R&=[Y_1Y_2\cdots\cdots Y_M]\\ X_R&=[X_1X_2\cdots\cdots X_M]\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot4)$$

したがって(4·3)の2段階最小自乗法は次の形をとる。

$$Y_L=Y_RC+X_RB+\hat{U}\qquad(4\cdot5)$$

ただし$\hat{U}$は2段階最小自乗法に於ける攪乱項の TXM 行列である。そして

$$C=\begin{pmatrix}C_1 & 0\cdots\cdots 0\\ 0 & C_2\cdots\cdots 0\\ \vdots & \vdots\qquad\vdots\\ 0 & 0\cdots\cdots C_M\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}b_1 & 0\cdots\cdots 0\\ 0 & b_2\cdots\cdots 0\\ \vdots & \vdots\qquad\vdots\\ 0 & 0\cdots\cdots b_M\end{pmatrix}\qquad(4\cdot6)$$

である。c と b は2段階最小自乗法による係数の計測値である。

Y_R と X_R の分離をするにあたって，$X'_R\hat{u}=0$ とおく。そうすれば次の関係を得る。

$$[\tau s^{\mu\mu'}]=U'U=Y'_LY_L-Y'_LY_RC-C'Y'_RY_L+C'Y'_RY_RC-B'X'_RX_RB \qquad (4\cdot7)$$

右辺の初めの行列 (Y'_LY_L) は Y' の単純な小行列であり，第2項は小行列 c_1，c_2……を乗じ

$$Y'_LY_RC=[Y'_LY_1c_1\ Y'_LY_2c_2\cdots\cdots Y_LY_Mc_M] \qquad (4\cdot8)$$

とおくことによって計算できる。

(4・7)の右辺第3項は第2項の置換である。第4項は対称的行列である。即ち

$$C'Y'_RY_RC=\begin{pmatrix} c'_1Y'_1Y_1c_1\cdots\cdots c'_1Y'_1Y_Mc_M \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ c'_MY'_MY_1c_1\cdots\cdots c'_MY'_MY_Mc_M \end{pmatrix} \qquad (4\cdot9)$$

(4・7)の右辺の最後の項は完全に類推できる。

$$B'X'_RX_RB=\begin{pmatrix} b'_1X'_1X_1b_1\cdots\cdots b'_1X'_1X_Mb_M \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b'_MX'_MX_1b_1\cdots\cdots b'_MX'_MX_Mb_M \end{pmatrix} \qquad (4\cdot10)$$

この方式にもとづいて

Economic Fluctuations in U. S. A. における Klein の simple model の計測が行われる。

X

以上が本論文の大要であるが，この種論文に於ては今までのところ適用が特殊ケースに限られて居り，2段階最小自乗法より好結果を得ると云ってもそれは systematic part の完全性を前提としてのことであって，計測を行ってみてもそれが真のパラメーターであると主張できるかどうか疑わしい。

〔鈴木 諒一〕