＜論文紹介＞

A.L. Nagar and N.C. Kawani, The Bias and Moment Matrix of a Mixed Regression Estimator

1

ここに紹介する論文

A.L. Nagar and N.C. Kawani ; The Bias and Moment Matrix of a Mixed Regression Estimator (Econometrica, Jan-April, 1964)

は Goldberger や Theil のモデルに関する Maximum Likelihood Method の Bias に関するものである。

われわれは線型回帰方程式を次のように表わす。

$$y=X\beta+u \qquad (1\cdot1)$$

y は T 観察値の列ヴェクトルで従属変数であり，X は独立変数 Λ の観察値の $T\times\Lambda$ 行列であり，β は Λ component の列ヴェクトルである。又，u は回帰方程式の攪乱項の列ヴェクトルである。u の平均値は零で constant variance を持ち一時的に独立変数となる。このことは次のことを意味する。

$$Eu=0,\ Euu'=\sigma^2I \qquad (1\cdot2)$$

I は $T\times T$ 次の unit matrix を示す。更に X の要素が nonstochastic で $X=\Lambda$ であると仮定する。

これらの仮定の下に β の最善の線型で歪みのない計測値が古典的な最小自乗法によって得られるとする。

$$b=(X'X)^{-1}X'y \qquad (1\cdot3)$$

この計測の手続きを Pure estimation と呼ぶことにする。

さて (1·1) の係数に関する先験的情報を利用することができ，それを次のような形で表わせるとする。

$$\gamma=R\beta+v \qquad (1\cdot4)$$

ここに γ は G 要素の列ヴェクトルであり，R は既知の要素の $G\times\Lambda$ 行列である。その rank は G である。β は (1·1) 式の係数であり，v は G component の攪乱項ヴェクトルであって u ヴェクトルの要素とは独立に分布する。かくして (1·5) 式を得る。

$$E(v)=0,\ Evv'=\phi,\ Evu'=0 \qquad (1\cdot5)$$

ϕ は既知で nonsingular である。(1·5) から，(1·1) 及び (1·4) の攪乱項が独立であることが解る。

例 β の最初の2つの要素について先験的情報を利用できるとする。例えば非常にありそうなことであるが95%の確率を以て β_1 が0と1の間にあり，β_2 が1/4と3/4の間にあるとする。この場合 two times sigma rule を用いて，β_1 の range が $1/2\pm2\sqrt{1/16}$, β_2 の range が $1/2\pm2\sqrt{1/64}$ であるとすれば，次のように記すことができる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}&=\beta_1+v_1,\ Ev_1=0,\ Ev_1^2=\frac{1}{16}\\ \frac{1}{2}&=\beta_2+v_2,\ Ev_2=0,\ Ev_2^2=\frac{1}{64}\end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot6)$$

したがって，(1·7)式を導くことができる。

$$\left.\begin{aligned}\gamma&=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} & R&=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots\cdots&0\\0&1&0&\cdots\cdots&0\end{pmatrix}\\ v&=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} & \phi&=\begin{pmatrix}1/16&0\\0&1/64\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot7)$$

(1·1) と (1·4) を結合すれば次式を得る。

$$\begin{pmatrix}y\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\R\end{pmatrix}\beta+\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \qquad (1\cdot8)$$

たゞし

$$E\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(u'\ v')=\begin{pmatrix}\sigma^2I&0\\0&\phi\end{pmatrix}=\Omega \qquad (1\cdot9)$$

I は unit matrix で0は適当な次数の零行列である。

Aiken は

On Least Squares and Linear Combination of Observations" (Proceeding of the Royal Society of Edinburgh, 1934—35)

なる論文に於て β の歪みのない最良の計測値を得るために一般化された最小自乗法を提案した。この方法を (1·8) 式に適用すれば，(1·10) 式を得る。

$$\hat{\beta}=(\varphi X'X+R'\phi^{-1}R)^{-1}(\varphi X'y+R'\phi^{-1}\gamma) \qquad (1\cdot10)$$

ただし $\varphi=1/\sigma^2$ である。これは Theil と Goldberger の論文

On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics (International Economic Review 1961)

なるに論文に於て提案された方法による mixed estimation の手順である。

Theil の論文

On the Use of Incomplete Prior Information in Regression Analysis (Journal of the American Statistical Association, June, 1963)

に於て提案した f-class の計測によれば φ を f に置き代えて次のように展開される。f は任意の正の値であって stochastic でも non-stochastic でもよい。f-class の特性は次のようなものになることを提言する。

$$f=\frac{1}{s^2}=\frac{T-A}{y'y-y'X(X'X)^{-1}X'y} \qquad (1\cdot11)$$

s^2 は $(1\cdot1)$ の残差の variance σ^2 の歪みのない計測値である。

以下の分析に入るに先立って次の bias and moment matrix を定義しておくと都合がよい。

$$V=(\varphi X'X+R'\phi^{-1}R)^{-1} \qquad (1\cdot12)$$

この式に関して計測値の歪みのあるmoment matrix を考察する。これと対応して先験的情報の占める役割について考察する。ここに

$$\theta_p=\frac{1}{A}t\gamma R'\phi^{-1}R(\varphi X'X+R'\phi^{-1}R)^{-1} \qquad (1\cdot13)$$

が Theil によって与えられる。更に

$$\theta_p=(\varphi X'X+R'\phi^{-1}R)^{-1}R'\phi^{-1}R \qquad (1\cdot14)$$

を導入する。これは θ_p の先験的情報の演ずる役割の行列的一般化である。われわれは又次のように記す。

$$\bar{x}'=(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\cdots\cdots,\bar{x}_A) \qquad (1\cdot15)$$

ただし $\bar{x}_\lambda=(1/T)\ \sum_{t=1}^{T}x_\lambda(t)$ は観察値 $x_\lambda(\lambda=1,2\cdots\cdots,A)$ の算術平均値である。

命題 1 Tを観察の個数としたとき，これは $f=1/s^2$ の f-class の member に属し，bias が $1/T$ になるとする上述の仮定の下では次式が成立する。

$$-\varphi^2\mu_3\theta_pV\bar{x} \qquad (1\cdot16)$$

ただし $\mu_3=Eu^3(t)$ であり，$u(t)$ は $(1\cdot1)$ で定義された u ヴェクトルの要素である。

係 もし $(1\cdot1)$ で与えられた攪乱項が正常分布をするか又は対称的な分布をすれば命題 1 で与えられた bias は零になる。

命題 2 命題 1 の仮定が成立し，更に攪乱項が正常分布をするとの仮定を附け加えれば，$f=1/s^2$ によって定まった f-class の特定メムバーから成る $1/T^2$ の order にしたがって，真のパラメーター・ヴェクトルの周辺の moment matrix は $(1\cdot17)$ のようになる。

$$V(I+\frac{2}{T}\theta'_p-\frac{2}{T}\theta'_p\ \theta'_p) \qquad (1\cdot17)$$

ただし θ'_p は θ_p の変換された行列である。

2

2・1 **命題 1 の証明** $(1\cdot1)$のパラメーター・ヴェクトル β の計測値は次式で与えられる。

$$\hat{\beta}=\left(\frac{1}{s^2}X'X+R'\phi^{-1}R\right)^{-1}\left(\frac{1}{s^2}X'y+R'\phi^{-1}\gamma\right) \qquad (2\cdot1\cdot1)$$

ただし s^2 は$(1\cdot11)$によって与えられている。$(1\cdot8)$ $(2\cdot1\cdot1)$式と式とを結合すれば標本誤差として次式を得る。

$$\hat{\beta}-\beta=\left(\frac{1}{s^2}X'X+R'\phi^{-1}R\right)^{-1}\left(\frac{1}{s^2}X'u+R'\phi^{-1}v\right) \qquad (2\cdot1\cdot2)$$

更に次のように記す。

$$\varepsilon=s^2-\sigma^2 \qquad (2\cdot1\cdot3)$$

ε は $1/\sqrt{T}$次であるから，$(2\cdot1\cdot2)$を書き直して$(2\cdot1\cdot4)$のように記すことができる。

$$\hat{\beta}-\beta=[(X'X+\sigma^2R'\phi^{-1}R)+\varepsilon R'\phi^{-1}R]^{-1}\times[(X'u+\sigma^2R'\phi^{-1}v+\varepsilon R'\phi^{-1}v)] \qquad (2\cdot1\cdot4)$$

Theil の1963年の論文（前出）にしたがって $R'\phi^{-1}R$ は $X'X$ と同じく T order であると仮定する。この仮定により $R'\phi^{-1}v$ は$\sqrt{T}$ order となり，$X'u$ も $\sqrt{T}$ order である。$(2\cdot1\cdot4)$より次式を得る。

$$\hat{\beta}-\beta=(I+A_{-\frac{1}{2}})^{-1}B_{-1}(C_{\frac{1}{2}}+C_0) \qquad (2\cdot1\cdot5)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}A_{-\frac{1}{2}}&=\varepsilon(X'X+\sigma^2R'\phi^{-1}R)^{-1}R'\phi^{-1}R\\B_{-1}&=(X'X+\sigma^2R'\phi^{-1}R)^{-1}\\C_{\frac{1}{2}}&=X'u+\sigma^2R'\phi^{-1}v\\C_0&=\varepsilon R'\phi^{-1}v\end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot1\cdot6)$$

であり，添字 A,B,C は order の大いさを示す。かくして

$A_{-\frac{1}{2}}=O(T^{-\frac{1}{2}})$, $B_{-1}=0(T^{-1})$, $C_{\frac{1}{2}}=0(T^{\frac{1}{2}})$, $C_0=O(T^0)$ 又は $C_0=O(1)$ である。(2・1・5) の右辺を展開すると，(2・1・7) のようになる。

$$\hat{\beta}-\beta=B_{-1}C_{\frac{1}{2}}+(B_{-1}C_0-A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}})+O\left(\frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (2\cdot1\cdot7)$$

$\frac{1}{T}$ order に関して計測値 $\hat{\beta}$ の bias を得るには，(2・1・7)の右辺の個々の項の期待値を得る必要がある。

第1項の期待値は明らかに (2・1・8) で表わされる。

$$E(B_{-1}C_{\frac{1}{2}})=(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}\{X'(Eu)+\sigma^2R'\psi^{-1}XE(v)\}=0 \quad (2\cdot1\cdot8)$$

これが成立する理由として $Eu=0, Ev=0$ であるから X と R の要素は non-stochastic である。

更に，

$$E(B_{-1}C_0)=(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}[E(s^2R'\psi^{-1}v)-\sigma^2R'\psi^{-1}(E_v)] \quad (2\cdot1\cdot9)$$

が成立する。$s^2-\sigma^2=\varepsilon$ である。(2・1・9)右辺第2項の期待値は ($Ev=0$ であるから) 零となる。そして，$M=I-X(X'X)^{-1}X'$ とおくとき，$s^2=\left(\frac{1}{(T-A)}\right)u'Mu$ となり，u と v はそれぞれ独立の分布を示すから(2・1・10)を得る。

$$E(s^2R'\psi^{-1}v)=\frac{1}{T-A}E(u'M_u)R'\psi^{-1}(Ev)=0 \quad (2\cdot1\cdot10)$$

したがって(2・1・11)が導かれる。

$$E(B_{-1}C_0)=0 \quad (2\cdot1\cdot11)$$

$A=R'\psi^{-1}R(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}X'$ とおき，$\frac{1}{T}$より低い羃数の項の順に展開して期待値零の項を捨象すれば(2・1・12)を得る。

$$E(A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}})=\frac{1}{T}(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}XE(u'uAu) \quad (2\cdot1\cdot12)$$

Aの要素は non-stochastic であるから $u'uAv$ は A Component を持つ列ヴェクトルであって，その λ 番目の Component は，$\alpha_{\lambda t}$ を以て A の λ 番目の行，番目の列の項を表わせば

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{t'=1}^{T}\alpha_{\lambda t}(t)u^2(t') \quad (2\cdot1\cdot13)$$

となる。(2・1・13)の中で $t\neq t'$ の項は零の期待値は零である。と云うのは，(1・1) の攪乱項が一時的に独立であり，$Eu=0$ と云う仮定を置いているからである。

したがって，

$$E\left(\sum_{t=1}^{T}\sum_{t'=1}^{T}\alpha_{\lambda t}u(t)u^2(t')\right)=Eu^3(t)\left(\sum_{t=1}^{T}\alpha_{\lambda t}\right) \quad (2\cdot1\cdot14)$$

を得るし，この式から(2・1・15)式が導かれる。

$$E(u'uAu)=\mu_3A1 \quad (2\cdot1\cdot15)$$

ただし1は T unit element の列ヴェクトルである。かくして命題1は証明された。

命題2の証明 $1/T^2$ order の $\hat{\beta}$ の要素行列を得るために，次のように記す。

$$E(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'=E(D_{-\frac{1}{2}}D'_{-\frac{1}{2}})+E(D_{-\frac{1}{2}}D'_{-1}+D_{-1}D'_{-\frac{1}{2}})+E(D_{-\frac{1}{2}}D'_{-\frac{3}{2}}-D_{-1}D'_{-1}+D_{-\frac{3}{2}}D'_{-\frac{1}{2}}) \quad (2\cdot2\cdot1)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}D_{-\frac{1}{2}}&=B_{-1}C_{\frac{1}{2}}\\ D_{-1}&=B_{-1}C_0-A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}}\\ D_{-\frac{3}{2}}&=A_{-\frac{1}{2}}A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}}-A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_0\end{aligned}\right\} \quad (2\cdot2\cdot2)$$

である。

(2・2・1) の右辺の第1項について考えると次のようになる。

$$E(D_{-\frac{1}{2}}D'_{-\frac{1}{2}})=\sigma^2(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1} \quad (3\cdot2\cdot3)$$

又，第2項に関しては，

$$E(D_{-1}D'_{-\frac{1}{2}})=0 \quad (2\cdot2\cdot4)$$

が成り立つ。これを変換すれば

$$E(D_{-\frac{1}{2}}D'_{-1}+D_{-1}D'_{-\frac{1}{2}})=0 \quad (2\cdot2\cdot5)$$

が導かれる。更に

$$E(D_{-\frac{1}{2}}D'_{-\frac{1}{2}})=E(A_{-\frac{1}{2}}A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}}C'_{\frac{1}{2}}B'_{-1})-E(A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_0C'_{\frac{1}{2}}B'_{-1}) \quad (2\cdot2\cdot6)$$

について考える。右辺第1項は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}&(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}R'\psi^{-1}R(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}\\ &\times R'\psi^{-1}R(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}\\ &\times E[\varepsilon^2(X'u+\sigma^2R\psi^{-1}v)\ (u'X+\sigma^2v'\psi^{-1}R)]\\ &\times(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}\end{aligned} \quad (2\cdot2\cdot7)$$

そして又，次式の値を求めなければならない。

$$E[\varepsilon^2(X'uu'X\times\sigma^2X'uv'\psi^{-1}R+\sigma^2R'\psi^{-1}vu'X+\sigma^4R'\psi^{-1}vv\psi^{-1}R)]=$$

$$\frac{1}{(T-\Lambda)^2}E(u'Muu'MuX'uu')X+$$

$$\frac{\sigma^4}{(T-\Lambda)^2}E(u'Muu'Mu)R'\psi^{-1}R-$$

$$\frac{2\sigma^2}{T-\Lambda}E(u'MuXuu'')X-$$

$$\frac{2\sigma^6}{T-\Lambda}E(u'Mu)$$

$$XR'\psi^{-1}R+\sigma^6X'X+\sigma^8R'\psi^{-1}R \tag{2·2·8}$$

ただし $M=I-X(X'X)^{-1}X'$ である。この式が成立することは次式によって証明される。

$$E(u'Muu'Mu)=\sigma^4(T-\Lambda)(T-\Lambda+2)$$
$$E(u'MuX'uu')=\sigma^4(T-\Lambda)X'$$
$$E(u'Mu)=\sigma^2(T-\Lambda) \tag{2·2·9}$$

又,

$$E(u'Muu'Muuu')=X'E(u'Muu'Muuu') \tag{2·2·10}$$

となる。ただし $E(u'Muu'Muuu')$ は $T\times T$ order の行列で t^* 番目の列と t^{**} 番目の行の項は次式によって表わされる。

$$E\Big[u(t^*)u(t^{**})\sum_{t,t',t'',t'''=1}^{T} m_{tt'}m_{t''t'''}X$$
$$u(t)u(t')u(t'')u(t''')\Big] \tag{2·2·11}$$

この項の期待値を2つの case について評価すると次のようになる。

Case 1　$t^*=t^{**}$

Case 2　$t^*\neq t^{**}$

Case 1 に於ける期待値は (2·2·12) で表わされる。

$$\sigma^6(T-\Lambda)(T-\Lambda+2)$$
$$+4\sigma^6(T-\Lambda+2)\ m_{t^*t^*} \tag{2·2·12}$$

又, Case 2 の期待値は次のようになる。

$$4\sigma^6(T-\Lambda+2)\ m_{t^*t^{**}} \tag{2·2·13}$$

かくしてわれわれは次式を得る。

$$E(u'Muu'Muuu')$$
$$=\sigma^6(T-\Lambda)(T-\Lambda+2)I+4\sigma^6(T-\Lambda+2)M \tag{2·2·14}$$

そして $X'M=0$ であるから (2·2·15) が導かれる。

$$X'E(u'Muu'Muuu')$$
$$=\sigma^6(T-\Lambda)(T-\Lambda+2)X' \tag{2·2·15}$$

(2·2·9) と (2·2·15) を (2·2·8) に代入すれば, (2·2·16) を得る。

$$E[\varepsilon^2(X'uu'X+\sigma^2X'uv'\psi^{-1}R+\sigma^2R'\psi^{-1}vu'X'$$
$$+\sigma^4R'\psi^{-1}vv'\psi^{-1}R)]$$

$$=\frac{2}{T-\Lambda}\sigma^6(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R) \tag{2·2·16}$$

(2·2·16) を (2·2·7) に代入すれば (2·2·17) を得る。

$$E(A_{-\frac{1}{2}}A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}}C'_{\frac{1}{2}}B'_{-1})$$
$$=\frac{2}{T}\sigma^6(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}R'\psi^{-1}R$$
$$(X'X+\sigma^2R\psi^{-1}R)^{-1}$$
$$\times R'\psi^{-1}R(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1} \tag{2·2·17}$$

次に (2·2·6) の右辺の第2の期待値について考える。

$$E(A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_0C'_{\frac{1}{2}}B'_{-1})$$
$$=(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}R'\psi^{-1}R$$
$$\times(X'X+\sigma^2R^1\psi^{-1}R)^{-1}\times E[\varepsilon^2R'\psi^{-1}v$$
$$\times(u'X+\sigma^2v'\psi^{-1}R](X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1} \tag{2·2·18}$$

ここで (2·2·9) を用いて (2·2·19) を導く。

$$E[\varepsilon^2R'\psi^{-1}v(u'X+\sigma^2v'\psi^{-1}R)]$$
$$=\frac{2}{T-\Lambda}\sigma^6R'\psi^{-1}R \tag{2·2·19}$$

したがって $1/T^2$ order に達するには次式が成立する。

$$E(A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_0C'_{\frac{1}{2}}B'_{-1})$$
$$=\frac{2}{T}\sigma^6(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}$$
$$\times R'\psi^{-1}R(X'X+\sigma^2R\psi^{-1}R)^{-1}R'\psi^{-1}R$$
$$\times(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1} \tag{2·2·20}$$

(2·2·6), (2·2·17) 及び (2·2·20) から (2·2·21) が導かれる。

$$E(D_{-\frac{1}{2}}D'_{-\frac{1}{2}})=0 \tag{2·2·22}$$

最後にわれわれは次式について考える。

$$E(D_{-1}D'_{-1})=E[(B_{-1}C_0-A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}})$$
$$\times(B_{-1}C_0-A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}})']$$
$$=E(B_{-1}C_0C'_0B_{-1})$$
$$-E(B_{-1}C_0C'_{\frac{1}{2}}B'_{-1}A'_{-\frac{1}{2}})$$
$$-E(A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}}C'_0B'_{-1})$$
$$+E(A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}}C'_{\frac{1}{2}}B'_{-1}A'_{-\frac{1}{2}}) \tag{2·2·23}$$

この場合 $1/T^2$ order に達するまでには次式が成立つことは容易に云える。

$$E(B_{-1}C_0C'_0B'_{-1})$$
$$=\frac{2}{T}\sigma^4(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}$$
$$\times R'\psi^{-1}R(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1} \tag{2·2·24}$$

そして

$$E(A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}}C'_0B'_{-1})$$

$$=\frac{2}{T}\sigma^6(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}$$

$$\times R'\psi^{-1}R(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}R'\psi^{-1}R$$

$$\times(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1} \qquad (2\cdot2\cdot25)$$

この式の右辺は symmetric であるから次式を得る。

$$E(A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}}C'_0B'_{-1})$$

$$=E(B_{-1}C_0C'_{\frac{1}{2}}B'_{-1}A'_{-\frac{1}{2}}) \qquad (2\cdot2\cdot26)$$

最後に $1/T^2$ の order に達するまでには

$$E(A_{-\frac{1}{2}}B_{-1}C_{\frac{1}{2}}C'_{\frac{1}{2}}B'_{-1}A'_{-1})$$

$$=(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}$$

$$\times R'\psi^{-1}R(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}$$

$$\times E[\varepsilon^2(X'u+\sigma^2R'\psi^{-1}v)(u'X+\sigma^2v'\psi^{-1}R)]$$

$$\times(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}$$

$$\times R'\psi^{-1}R(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}$$

$$=\frac{2}{T}\sigma^6(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}R'\psi^{-1}R$$

$$\times(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}$$

$$\times R'\psi^{-1}R(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1} \qquad (2\cdot2\cdot27)$$

ここで(2・2・16)を使用し $1/T^2$ order までの値を求めれば(2・2・28)を得る。

$$E(D_{-1}D'_{-1})=\frac{2}{T}\sigma^4(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}$$

$$R'\psi^{-1}R$$

$$\times(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}\{I-\sigma^2R'\psi^{-1}R$$

$$\times(X'X+\sigma^2R'\psi^{-1}R)^{-1}\} \qquad (2\cdot2\cdot28)$$

(2・2・3)，(2・2・5)，(2・2・21)，(2・2・22) 及び(2・2・28)を使用すれば命題2の結果が得られる。

5

以上が本論文の大要であるが，中心となるべき命題1及び2について asymptotic moment matrix の解析を適用している点は旧来の分析より一歩を進めたものと云える。しかし偏倚型分布の解析そのものが対称的分布の分析よりも遅れている点を考えると，今後における一層の研究が望まれるであろう。

〔鈴木　諒一〕