〔書　評〕

D.F. Heathfield, Production Functions, London 1972

1

本書は生産函数に関する入門書で次の 4 章から成る。

1　序　章

2　Cobb-Douglas 函数

3　代替弾力性一定の生産函数—CES生産函数

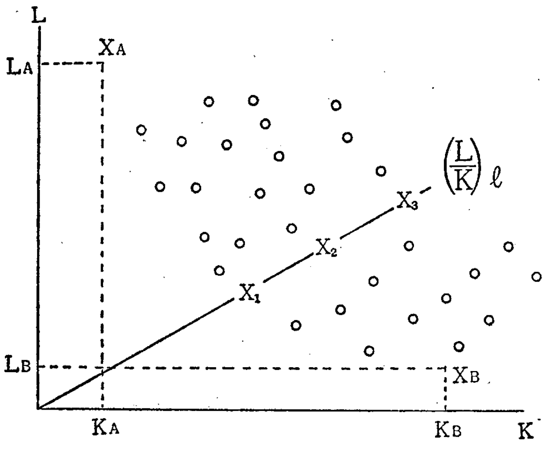
4　一般均衡理論に於ける函数

第1章では資本の性格を論じた後，次の議論がなされる。

Y　産出物　　L　労働　　K　資本

技術 X_A は労働量 L_A と資本量 K_A を要求し，技術 X_B は労働量 L_B と資本量 K_B を要求するものとする。L_i/K_i が固定されている限り，第1図の実線の上を X_1, X_2, X_3 と移動するであろう。凡ての X_A と X_B についてこのような関係が描かれるとすればその中で最も効率の高い L/K が選択されるであろう。これによって L と K の間の無差別曲線が描かれる。そして収穫逓減法則が妥当する限り，この曲線は両軸に対し凸である。

第1図



これに続いて製品価格と生産費の関係が述べられる。

P　製品価格　　N　土地　　R　地代

I　利子率　　W　賃金　　π　利潤

とすれば

$$\frac{\partial \pi}{\partial K}=\frac{\partial Y}{\partial K}P-I=0 \qquad (1\cdot\mathrm{A})$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L}=\frac{\partial Y}{\partial L}P-W=0 \qquad (1\cdot\mathrm{B})$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial N}=\frac{\partial Y}{\partial N}P-R=0 \qquad (1\cdot\mathrm{C})$$

が得られる。即ち限界生産力均等性法則である。これより帰属の原理と等費用線（価格線）の説明がある。

第2章に入って周知の Cobb-Douglas 函数

$$Y=AK^{1-\alpha}L^{\alpha} \qquad (2)$$

から出発する。基準時と比較時の教量に関しては

$$\frac{Y_t}{Y_0}=\frac{AK_t{}^{(1-\alpha)}L^{\alpha}{}_t}{AK_0{}^{(1-\alpha)}L^{\alpha}{}_0}$$

$$=\left(\frac{K_t}{K_0}\right)^{(1-\alpha)}\left(\frac{L_t}{L_0}\right)^{\alpha} \qquad (3)$$

となる。限界生産力説を前提とすれば

$$WL=\alpha Y \qquad (4)$$

であり，又

$$\frac{\partial Y}{\partial L}=\alpha\frac{Y}{L} \qquad (5)$$

更に

$$\frac{\partial Y}{\partial L}AK^{(1-\alpha)}\alpha L^{(\alpha-1)}=AK^{(1-\alpha)}L^{\alpha}\left(\frac{\alpha}{L}\right)$$

然るに　$AK^{(1-\alpha)}L^{\alpha}=Y$

であるからこの関係を代入すれば(5)が成り立つ。(4)，(5)から

$$W=\alpha\frac{Y}{L} \qquad (6)$$

Cobb-Douglas 函数の修正形は $Y=AK^{\beta}L^{\alpha}$ である

が，この式でも

$$W=\frac{\partial Y}{\partial L}=\alpha\frac{Y}{L} \tag{7}$$

が成立するから $\alpha+\beta=1$ はこの函数形成立のための必要条件ではない。（この著書では限界生産力説が $\alpha+\beta \fallingdotseq 1$ の場合成立する理論的根拠についての吟味を欠いている。）Y を任意の水準 $\bar{Y}$ に固定すれば

$$\bar{Y}=AK^{\beta}L^{\alpha} \tag{8}$$

となり，これを微分すれば，

$$0=AK^{(\beta-1)}\beta L^{\alpha}dK+AK^{\beta}\alpha L^{(\alpha-1)}dL$$
$$=\beta\frac{Y}{K}dK+\alpha\frac{Y}{L}dL$$

従って $$\frac{dL}{dK}=-\frac{\beta L}{\alpha K} \tag{9}$$

となる。Y と K の無差別曲線は原点に対して凸であるから L/K の増加に従って，限界代替率 $-\frac{dL}{dK}$ の勾配は増大する。

又，Y の増加につれて dY/dL は逓減し，
K の増加につれて dY/dK は逓減する。

この事実は

$$\frac{dY}{dL}=AK^{\beta}\alpha L^{(\alpha-1)}$$

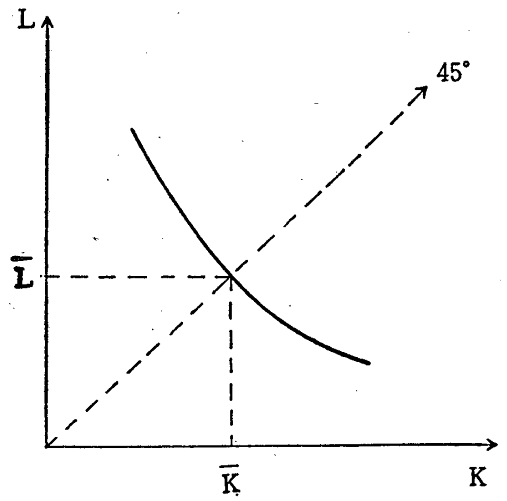
$$\frac{dY}{dK}=AK^{(\beta-1)}\beta L^{\alpha}$$

からも明らかである。

次に代替の弾力性を次の如く定義する。

$$0=\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)}\times\frac{\left(\frac{dK}{dL}\right)}{d\left(\frac{dK}{dL}\right)} \tag{10}$$

第2図



Cobb-Douglas 函数に於ては前述の如く

$$\frac{dL}{dK}=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{L}{K}\right)$$

或いは

$$\frac{\left(\frac{dK}{dL}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)}=\frac{-\alpha}{\beta} \tag{11}$$

となる。この式を (K/L) に関して再微分すれば，

$$\frac{d\left(\frac{dK}{dL}\right)}{d\left(\frac{K}{L}\right)}=\frac{-\alpha}{\beta} \tag{12}$$

を得る。(11) (12) を (10) に代入すれば

$$-\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{-\beta}{\alpha}=1$$

となる（第2図参照）。

第2図に於て原点を通り両軸に対し45度の傾斜を持つ直線が引かれる理由は次の如くである。

$$\bar{Y}=AB^{\beta}L^{\alpha}$$

に於て $\alpha+\beta=1$ であるから

$$\bar{Y}=AK^{(1-\alpha)}L^{\alpha}$$

を変形すれば

$$\bar{Y}=A\frac{K}{K^{\alpha}}L^{\alpha}=AK\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha}$$

したがって $L/K=1$ 換言すれば $\bar{K}=1$ に於て

$$\bar{K}=\frac{\bar{Y}}{A}$$

そして $\bar{K}=\bar{L}$ であるから，

$$\bar{L}=\frac{\bar{Y}}{A}$$

である。これに対し $\alpha+\beta \fallingdotseq 1$ なるときには

$$Y=AK^{\beta}L^{\alpha}$$

より

$$dY=\frac{\beta Y}{K}dK+\frac{\alpha Y}{L}=\frac{\beta Y}{K}dK+\alpha Y\frac{dK}{K}$$

となり，

$$\frac{dY}{Y}=\frac{dK}{K}(\alpha+\beta)$$

$\alpha+\beta>1$ の場合には K と L の増加率が等しいとして Y の増加率はそれよりも大きい。即ち規模の経済性が存在する。

技術進歩が時の経過と共に一様の率で進行すれば，Cobb-Douglas 函数は次の形に書き改められる。

$$Y=Ae^{x_1 t}K^{\beta}L^{\alpha} \tag{13}$$

Harrod 型の中立性はこの形に於ける労働生産性の向上として示される。もし労働投入量が労働生産性を単位として示されるならば

$$Y=AK^{\beta}L^{\alpha} \tag{14}$$

となる。ここに

$$L=e^{x2t}L$$

である。書き直せば (15)

$$Y=Ae^{x2t\alpha}K^{\beta}L^{\alpha} \tag{15 a}$$

同様にして

$$Y=A\bar{K}^{\beta}L^{\alpha} \tag{16}$$

$$\bar{K}=e^{x3t}K \tag{17}$$

$$Y=Ae^{x3t\beta}K^{\beta}L^{\alpha} \tag{20}$$

を得る。又,

$$Y=AK^{\beta}L^{\alpha}$$

より

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=\frac{Y}{K}\beta=I$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=\frac{Y}{L}\alpha=W$$

したがって

$$\frac{I}{W}=\frac{\beta L}{\alpha K} \tag{21}$$

I/W と $\frac{\beta}{\alpha}$ とが一定であれば $\frac{L}{K}$ も一定となる。

Douglas 函数によって,産出物,資本,労働の相対的成長率を知ることは可能である。その意味でこの函数は個々の企業についてよりも Aggregate した資料の説明に適している。最後にこの函数は生産要素間の代替の可能性を前提とし,補完の可能性を排除している。この意味でこの函数は短期よりも長期に於て妥当する可能性が強い。

2

第3章はＣＥＳ函数である。その出発点は Douglas 函数と軌を一にし,

$$\frac{Y}{L}=\alpha W$$

であるが,ＣＥＳは観察の結果

$$\frac{Y}{L}=XW^{\lambda} \tag{22}$$

なる関係を発見した。(22) のパラメーター α, λ は対数線型式

$$\log\left(\frac{Y}{L}\right)=\log\alpha+\lambda\log W \tag{23}$$

で計測される。ところでいかなる函数を用いても

$$dY=\frac{\partial Y}{\partial K}dK+\frac{\partial Y}{\partial L}dL \tag{24}$$

であり,規模の経済性がない場合には

$$\frac{dY}{Y}=\frac{dK}{K}=\frac{dL}{L} \tag{25}$$

である。(25) を (24) に代入すれば

$$Y=\frac{\partial Y}{\partial K}K+\frac{\partial Y}{\partial L}L \tag{26}$$

となる。労働に関する限界生産力説が成立すれば

$$\frac{\partial Y}{\partial L}=W$$

であるから,これを (26) に代入すれば

$$Y=\frac{\partial Y}{\partial K}K+WL$$

$$W=\frac{Y}{L}-\frac{K}{L}\cdot\frac{\partial Y}{\partial K} \tag{27}$$

(27) を (23) に代入すれば

$$\log\left(\frac{Y}{L}\right)\log\alpha+\lambda\log\left(\frac{Y}{L}-\frac{K}{L}\ \frac{\partial Y}{\partial K}\right) \tag{28}$$

或いは

$$\frac{Y}{L}=\alpha\left(\frac{Y}{L}-\frac{K}{L}\ \frac{\partial Y}{\partial K}\right)^{\lambda} \tag{29}$$

を得る。従って

$$\alpha^{-1/\lambda}\left(\frac{Y}{L}\right)^{1/\lambda}=\frac{Y}{L}-\frac{\partial Y}{\partial K}\cdot\frac{K}{L}$$

$$\frac{Y}{L}\left[1-\alpha^{-1/\lambda}\left(\frac{Y}{L}\right)^{1/\lambda-1}\right]=\frac{\partial Y}{\partial K}\ \frac{K}{L}$$

ここで

$$\alpha^{-1/\lambda}=a,\qquad 1\lambda-1\theta$$

とおけば

$$\frac{Y}{L}\left[1-a\left(\frac{Y}{L}\right)^{\theta}\right]=\frac{\partial Y}{\partial K}\ \frac{K}{L} \tag{30}$$

を得る。L を任意の水準 E に固定すれば

$$\frac{\partial Y}{\left(\frac{Y}{\bar{L}}\right)\left[1-a\left(\frac{Y}{\bar{L}}\right)^{\alpha}\right]}=\bar{L}\frac{\partial K}{K} \tag{31}$$

と書き直すことができる。従って

$$\bar{L}\ \frac{\partial Y}{Y}+\frac{a\left(\frac{Y}{\bar{L}}\right)^{\theta-1}\partial Y}{1-a\left(\frac{Y}{\bar{L}}\right)^{\theta}}=\bar{L}\ \frac{\partial K}{K} \tag{32}$$

となり，これを積分すれば

$$\bar{L}\log Y-\frac{\bar{L}}{\theta}\log\left[1-\alpha\left(\frac{Y}{\bar{L}}\right)^{\alpha}\right]$$

$$=\bar{L}\log K-\frac{1}{\theta}\log\beta \quad (33)$$

となる。θ, β は共に積分常数である。この逆対数をとれば

$$\frac{Y}{\left[1-\alpha\left(\frac{Y}{L}\right)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}}=\frac{K}{\beta^{1-L\theta}} \quad (34)$$

$$Y^{\theta}=\left[1-a\left(\frac{Y}{L}\right)^{\theta}\right]\times\frac{K^{\theta}}{\beta^{1/L\theta}} \quad (35)$$

$$\beta^{1/L}\frac{Y^{\theta}}{K^{\theta}}+a\frac{Y^{\theta}}{L^{\theta}}=1 \quad (36)$$

$$\beta^{1/L}\frac{K^{-\theta}}{Y^{-\theta}}+a\frac{\bar{L}^{-\theta}}{Y^{-\theta}}=1$$

したがって

$$Y^{-\theta}=\beta^{1/L}K^{-\theta}+a\bar{L}^{-\theta} \quad (37)$$

β は積分常数であるが，Y，K，L の値に依存する。(37) を L で偏微分すれば

$$-\theta Y^{-\theta-1}\partial Y=\frac{\partial}{\partial\bar{L}}(\beta^{1/L}K^{-\theta})-\theta aL^{-\theta-1}\partial L \quad (38)$$

となり，

$$\frac{\partial}{\partial L}(\beta^{1/L}K^{-\theta})=0 \quad \text{のときにのみ}$$

$$\frac{Y}{L}=\left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right)^{\lambda}$$

となる。$\beta^{1/L}=\mu$ とおき，L から独立なものとすれば，(37) は

$$Y^{-\theta}=\mu K^{-\theta}+aL^{-\theta} \quad (39)$$

と置き換えることができる。これはＣＥＳ函数であり

(1) 規模の経済性が存在しない

(2) 完全競争市場である。

との二前提を必要条件とする。前述の如く

$$\frac{Y}{L}\alpha W^{\lambda}$$

であるから Y を任意の水準 $\bar{Y}$ に固定すれば，

$$\bar{Y}^{-\theta}=\mu K^{-\theta}+aL^{-\theta}$$

$$0=-\mu\theta K^{-(\theta+1)}dK-a\theta L^{-(\theta+1)}dL$$

$$\therefore\ \frac{dL}{dK}=-\frac{\mu}{a}\left(\frac{L}{K}\right)^{\theta+1} \quad (40)$$

即ち $\frac{dL}{dK}$ は $\left(\frac{L}{K}\right)$ に比例する。$\theta+1=0$ のときには $\left(\frac{L}{K}\right)^{\theta+1}=1$ であるから次式が成り立つ。

$$\frac{dL}{dK}=\frac{-\mu}{a}$$

換言すれば dL/dK の勾配は一定である。かくして

$$Y^{-\theta}=\mu K^{-\theta}+aL^{-\theta} \quad (41)$$

より，

$$-\theta Y^{-(1+\theta)}dY=-\theta\mu K^{-(1+\theta)}dK-\theta aL^{-(1-\theta)}dL$$

したがって

$$\frac{dY}{Y^{(1-\theta)}}=\mu\frac{dK}{K^{(1+\theta)}}+a\frac{dL}{L^{(1+\theta)}}$$

$\theta=0$ のときには

$$\frac{dY}{Y}=\mu\frac{dK}{K}+a\frac{dL}{L} \quad (42)$$

即ち

$$Y=AK^{\mu}L^{a}$$

となり，Cobb-Douglas 函数が成立する。

代替の弾力性 σ は既に定義した如く，

$$\sigma=\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)}\times\frac{\frac{dK}{dL}}{d\left(\frac{dK}{dL}\right)} \quad (12)$$

である。ＣＥＳ函数を Y で微分し，$\bar{Y}$ に固定すれば

$$\bar{Y}^{-\theta}=\mu K^{-\theta}+aL^{-\theta}$$

$$0=-\theta\mu K^{-(1+\theta)}dK-\alpha\theta L^{-(1+\theta)}dL$$

したがって

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\theta} \quad (43)$$

$$\frac{\frac{dK}{dL}}{\frac{K}{L}}=-\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{K}{L}\right)^{\theta} \quad (44)$$

(43) を K/L に関して微分すれば

$$\frac{d\left(\frac{dK}{dL}\right)}{d\left(\frac{K}{L}\right)}=-(1+\theta)\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{K}{L}\right)^{0} \quad (45)$$

(44)，(45) を (11) に代入すれば

$$\sigma=\frac{-\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{K}{L}\right)^{0}}{-(1+\theta)\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{K}{L}\right)^{\theta}}$$

$$=\frac{1}{1+\theta} \quad (46)$$

$$\gamma^{-\theta}=\mu+\alpha,\quad \delta=\mu\gamma^{\theta} \quad (47)$$

とおけば

$$\frac{WL}{KI}=\frac{(1-\delta)}{\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{\theta} \tag{48}$$

を得る。これに対応する Cobb-Douglas 函数の方程式は

$$\frac{WL}{KI}=\frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (\text{一定})$$

である。

次に技術進歩の影響はどうか。ＡＣＭＳ函数

$$Y=\gamma[\delta K^{-\theta}+(1-\delta)L^{-\theta}]^{-1/\theta} \tag{49}$$

を書き改めれば

$$Y^{-\theta}=\gamma^{-\theta}\delta K^{-\theta}+\gamma^{-\theta}(1-\sigma)L^{-\theta} \tag{50}$$

これをKとLで偏微分し，限界生産力説が妥当するとすれば

$$\frac{I}{W}=\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{L}{K}\right)^{1+\theta} \tag{51}$$

が導かれる。又，今までの考察は規模の経済性が存在しないとの前提での展開であるが

$$Y=\gamma[\delta K^{-\theta}+(1-\delta)L^{-\theta}]^{\mu/\theta} \tag{52}$$

と置いて展開すれば

$$\frac{dY}{Y}=\mu\frac{dK}{K} \tag{53}$$

となる。

ところで Cobb-Douglas 函数は結局に於て指数を使用するがＣＥＳ函数は current value を使用する。したがって γ の値はY，K，Lに依存せざるを得ない。そこに Aggregation の問題が起るのであって，企業単位で計測した γ を産業全体に適用することはできない。第２にＣＥＳ函数は Douglas 函数と違って代替関係ばかりでなく，補完関係をも包括するから，長期の妥当性に限定する必要はない。しかし補完関係が存在する場合には限界生産費と限界収入を考慮した場合，ある点に来ると後者は零になるから，結局に於てＣＥＳ函数も長期についてのみ妥当すると云わざるを得ない。

第４章は産業連関分析で先ず第１表が与えられる

第１表

購　入

		A	B	C	D	E	
販	A	AA	AB	AC	AD	AE	AS
	B	BA	BB	BC	BD	BE	BS
	C	CA	CB	CC	CD	CE	CS
	D	DA	DB	DC	DD	DE	DS
売	E	EA	EB	EC	ED	EE	ES
		AP	BP	CP	DP	EP	

例えばＡＢはＡ部門で生産されＢ部門に売られる財の価値を示す。これより生産係数を導くにあたっては要素間の代替の可能性がなく，規模の経済性も存在しないと仮定する。従って各要素は購入部門の産出物の変化によってのみ変化する。これにより前者を後者で割って投入係数を求める。

第２表

	A	B	C	D	E	S	F	G
A	—	$\frac{AB}{BG}$	$\frac{AC}{CG}$	$\frac{AD}{DG}$	$\frac{AE}{EG}$	AS	AF	AG
B	$\frac{BA}{AG}$	—	$\frac{BC}{CG}$	$\frac{BD}{DG}$	$\frac{BE}{EG}$	BS	BF	BG
C	$\frac{CA}{AG}$	$\frac{CB}{BG}$	—	$\frac{CD}{DG}$	$\frac{CE}{EG}$	CS	CF	CG
D	$\frac{DA}{AG}$	$\frac{DB}{BG}$	$\frac{DC}{CG}$	—	$\frac{DE}{EG}$	DS	DF	DG
E	$\frac{EA}{AG}$	$\frac{EB}{BG}$	$\frac{EC}{DG}$	$\frac{ED}{DG}$	—	ES	EF	EG

ここにＡＳ，ＢＳ等は中間生産物の販売量，ＡＦ，ＢＦ等は最終生産物の販売量，ＡＧ，ＢＧ等はその合計である。書き直して

第３表

	A	B	C	D	E	S	F	G
A	—	a_{AB}	a_{AC}	a_{AD}	a_{AE}		AF	
B	a_{BA}	—	a_{BC}	a_{BD}	a_{BE}		BF	
C	a_{CA}	a_{CB}	—	a_{CD}	a_{CE}		CF	
D	a_{DA}	a_{DB}	a_{DC}	—	a_{DE}		DF	
E	a_{EA}	a_{EB}	a_{EC}	a_{ED}	—		EF	

となる。資本と労働の投入量を考慮に入れるならば

第４表

	A	B	C	D	E	L	K	I	F	G
A	0	AB	AC	AD	AE	0	0	AS	AF	AG
B	BA	0	BC	BD	BE	0	0	BS	BF	BG
C	CA	CB	0	CD	CE	0	0	CS	CF	CG
D	DA	DB	DC	0	DE	0	0	DS	DF	DG
E	EA	EB	EC	ED	0	0	0	ES	EF	EG
L	LA	LB	LC	LD	LE	0	0	LS	LF	LG
K	KA	KB	KC	KD	KE	0	0	KS	KF	KG

のように修正される。例えば係数ＬＡはＡ産業の産出物一単位に必要な労働量である。これを以て生産函数と見るには

(1) 規模の経済性が存在しない。

(2) 相対価格の変化及び要素間の代替関係の変化がない。

(3) 技術進歩がない

の三条件が必要で，第二条件と第三条件とは短期に於てのみ認められるべき性格のものである。

×

以上が本書の大要で特に新らしい事実を述べているわけではないが，冒頭に述べたように今までの代表的な生産函数理論を整理し，解り易く記述したと云う点で，この問題に関する入門書として推薦したい。（全部で84頁の小冊子でよくまとまっている。）

〔鈴木　諒一〕